

文章编号: 1000_0887(2005) 12_1387_07

含曲线裂纹圆柱扭转问题的新边界元法^{*}

王银邦, 陆孜子

(中国海洋大学 工程学院, 山东 青岛 266071)

(我刊编委王银邦来稿)

摘要: 研究含曲线裂纹圆柱的 Saint_Venant 扭转, 将问题化归为裂纹上边界积分方程的求解。利用裂纹尖端的奇异元和线性元插值模型, 给出了扭转刚度和应力强度因子的边界元计算公式。对圆弧裂纹、曲折裂纹以及直线裂纹的典型问题进行了数值计算, 并与用 Gauss_Chebyshev 求积法计算的直裂纹情形结果进行了比较, 证明了方法的有效性和正确性

关键词: Saint_Venant 扭转; 曲线裂纹; 边界积分方程; 边界元; 应力强度因子

中图分类号: O346.1 文献标识码: A

引 言

使用传统边界元法研究裂纹柱的扭转问题时, 由于裂纹在几何上的退化特性, 导致边界积分方程是不适定的。而对偶边界元法(dual boundary element method)又具有未知函数多、奇异性强等缺点。文献[1]联合应用 Mellin 变换和边界积分方程方法, 研究了含直线裂纹柱的扭转问题, 获得了许多有益的结果。

本文研究圆截面曲线裂纹柱的 Saint_Venant 扭转问题, 利用作者导出的一般扭转问题的新边界积分方程, 对柱体边界上的积分方程进行解析求解。将问题进一步简化为曲线裂纹上的新边界积分方程, 并建立了裂纹尖端的奇异元和线性元插值模型, 给出了抗扭刚度和应力强度因子的边界元计算公式。对圆弧裂纹、曲折裂纹以及直线裂纹的典型问题进行了数值计算, 与用 Gauss_Chebyshev 求积法计算的直裂纹情形结果进行了比较, 证明了本文方法的有效性和正确性。

1 基本公式

考虑图 1 所示圆形横截面 Ω 的裂纹柱(半径为 R), 假设曲线裂纹的集合为 $\Gamma = \bigcup_{j=1}^n \Gamma_j$, S 为区域的外边界。当此裂纹柱两端受扭矩 T 作用而产生 Saint_Venant 扭转时, 柱体中的位移、应力、扭转刚度 D 和扭率 α 可分别表示为^[2]

$$u = -\alpha yz, \quad v = \alpha xz, \quad w = \alpha \Phi(x, y); \quad (1)$$

$$\tau_{zx} = G\alpha \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right], \quad \tau_{zy} = G\alpha \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right]; \quad (2)$$

* 收稿日期: 2004_08_11; 修订日期: 2005_09_15

作者简介: 王银邦(1956—), 男, 甘肃人, 教授, 博士, 博导(联系人, Tel: + 86_532_85901684; E_mail: wangyb@ouc.edu.cn)。

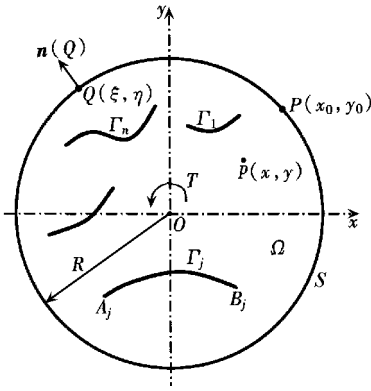


图 1 裂纹柱的截面几何

$$D = G \iint_{\Omega} \left[x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x^2 + y^2 \right] d\Omega, \quad (3)$$

$$\alpha = T/D, \quad (4)$$

其中 φ 为扭转函数, G 为剪切模量.

扭转函数 φ 由 Neumann 问题确定^[2], 此问题可转化为求解如下的边界积分方程(证明另文给出):

$$\int_{S+\Gamma} \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial s(P)} F(Q) ds(Q) = \int_S \frac{\partial \varphi^*(P, Q)}{\partial n(P)} q(Q) ds(Q) - \frac{1}{2} f(P) \quad (P(x_0, y_0) \in S + \Gamma), \quad (5)$$

其中:

$$\begin{cases} F(Q) \equiv \frac{\partial \varphi(Q)}{\partial s(Q)} & (Q(\xi, \eta) \in S), \\ F(Q) \equiv \frac{\partial \Delta \varphi(Q)}{\partial s(Q)} & (Q(\xi, \eta) \in \Gamma \equiv \Gamma^+); \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} f(P) = q(P) & (P(x_0, y_0) \in S), \\ f(P) \equiv q^+(P) - q^-(P) = 2q^+(P) & (P(x_0, y_0) \in \Gamma); \end{cases} \quad (7)$$

$$q(Q) \equiv \frac{\partial \varphi(Q)}{\partial n(Q)} = n_1(Q)\eta - n_2(Q)\xi \quad (Q(\xi, \eta) \in S + \Gamma), \quad (8)$$

$$\Delta \varphi(Q) \equiv \varphi^+(Q) - \varphi^-(Q) \quad (Q(\xi, \eta) \in \Gamma), \quad (9)$$

$$\varphi^*(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad r = |Q - P| = [(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2]^{1/2}; \quad (10)$$

$n_k(Q)$ 是边界 $S + \Gamma$ 上 Q 点的单位法向量.

边界积分方程(5)中的未知函数 $F(Q)$ 还必须满足位移单值性条件

$$\int_S F(Q) ds(Q) = 0, \quad (11)$$

$$\int_{\Gamma_j} F(Q) ds(Q) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (12)$$

如果在裂纹尖端引进局部极坐标 (ρ, θ) 并定义 III 型应力强度因子为

$$K_{III} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\rho} \sigma_{\theta\theta}(\rho, 0),$$

则在条件(11)和(12)下求得边界积分方程(5)的解 $F(Q)$ 后, 裂纹尖端的应力强度因子和扭转刚度可按以下公式直接计算:

$$\begin{cases} K_{III}(A_j) = -\frac{G\alpha}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_j} \sqrt{2\pi|Q - A_j|} F(Q) ds(Q), \\ K_{III}(B_j) = -\frac{G\alpha}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_j} \sqrt{2\pi|Q - B_j|} F(Q) ds(Q), \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, n); \quad (13)$$

$$\frac{D}{G} = \frac{\pi}{2} R^4 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\xi^2 + \eta^2) F(Q) ds(Q). \quad (14)$$

2 边界积分方程的简化

对于边界 S 为圆周的情形(见图 1), 在 $P(x_0, y_0)$ 点和 $Q(\xi, \eta)$ 点分别引进复变量:

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \zeta_0 = x_0 + iy_0 \quad (i = \sqrt{-1}), \quad (15)$$

并注意到位移单值性条件(11)、(12)和

$$\begin{cases} q(Q) = 0 & (Q \in S), \\ \frac{\partial \Phi^*(P, Q)}{\partial s(P)} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{e^{i\beta(\zeta_0)}}{\zeta - \zeta_0} + \frac{e^{-i\beta(\zeta_0)}}{\zeta - \bar{\zeta}_0} \right] & (\beta(\zeta_0) \text{ 为 } \zeta_0 \text{ 点的切线与 } x \text{ 轴的夹角}), \end{cases}$$

则边界积分方程(5)可用复变量表示为

$$\int_S \frac{F(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = -\frac{i}{2R} \int_{\Gamma} \left[\frac{\zeta}{\zeta - \zeta_0} + \frac{\zeta^*}{\zeta^* - \bar{\zeta}_0} \right] F(\zeta) ds(\zeta) \quad (\zeta^* = R^2/\zeta, \zeta_0 \in S), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{R}{4\pi} \int_S \left[\frac{e^{i\beta(\zeta_0)}}{(\zeta - \zeta_0)\zeta} - \frac{e^{-i\beta(\zeta_0)}}{\zeta_0(\zeta - \bar{\zeta}_0)} \right] F(\zeta) d\zeta + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi^*(P, Q)}{\partial s(P)} F(Q) ds(Q) = \\ -q^+(P) \quad (\zeta_0 = R^2/\zeta_0, \zeta_0(P) \in \Gamma). \end{aligned} \quad (17)$$

外边界 S 上的边界积分方程(16)满足条件(11)的解可求得为^[13]

$$F(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma} \left[\frac{\zeta}{\zeta - \zeta_0} + \frac{\zeta}{\zeta - \bar{\zeta}_0} \right] F(\zeta) ds(\zeta) \quad (\zeta_0 \in S). \quad (18)$$

将(18)式代入边界积分方程(17)左端的第一个积分,简化可得曲线裂纹上的 Cauchy 主值型边界积分方程:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \operatorname{Re} \left[e^{i\beta(\zeta_0)} \left[\frac{1}{\zeta - \zeta_0} + \frac{\zeta}{\zeta \zeta_0 - R^2} \right] \right] F(\zeta) ds(\zeta) = \\ -2\pi [x_0 \cos(\beta(\zeta_0)) + y_0 \sin(\beta(\zeta_0))] \quad (\zeta_0 = x_0 + iy_0 \in \Gamma). \end{aligned} \quad (19)$$

边界积分方程(19)具有 Cauchy 主值型奇异性,可结合位移单值性条件(12)进行求解,而应力强度因子和扭转刚度可由(13)和(14)式直接计算。因此,本文已将带有任意曲线裂纹圆柱的扭转问题简化为裂纹上边界积分方程(19)的求解。

3 边界元数值方法

边界积分方程(19)的解析解一般很难求得,只能进行数值求解。为此,将曲线裂纹划分为线性单元,即 $\Gamma = \sum L_e$, 每个单元被映射到区间 $-1 \leq t \leq 1$, 复变量 ζ 可表示为

$$\zeta = \zeta_1^e N_1(t) + \zeta_2^e N_2(t) \quad (|t| \leq 1, \zeta \in L_e), \quad (20)$$

其中 ζ_1^e 和 ζ_2^e 为第 e 个单元的两个端节点的复坐标,而形函数为

$$N_1(t) = \frac{1}{2}(1-t), \quad N_2(t) = \frac{1}{2}(1+t). \quad (21)$$

根据裂纹上未知函数 $F(\zeta)$ 的性质,将单元分为裂尖单元和一般线性单元。对于不包含裂纹尖端的一般线性单元,取插值函数为:

$$F(\zeta) = F_1^e N_1(t) + F_2^e N_2(t) \quad (|t| \leq 1, \zeta \in L_e). \quad (22)$$

如果单元的起始节点 ($t = -1$) 为一个裂纹尖点,则 $F(\zeta)$ 被表示为

$$F(\zeta) = \frac{F_1^e}{\sqrt{N_2(t)}} + (F_2^e - F_1^e) N_2(t) \quad (|t| \leq 1, \zeta \in L_e). \quad (23)$$

当单元的末尾节点 ($t = 1$) 为一个裂纹尖点时,未知函数 $F(\zeta)$ 可近似为

$$F(\zeta) \approx (F_1^e - F_2^e) N_1(t) + \frac{F_2^e}{\sqrt{N_1(t)}} \quad (|t| \leq 1, \zeta \in L_e). \quad (24)$$

将插值函数(23)和(24)代入极限公式(13)可得:

$$\begin{cases} K_{III}(A_j) = -\frac{G\alpha}{2} \sqrt{2\pi |\zeta_2^e - \zeta_1^e|} F_1^e, & \text{当 } \zeta_1^e = A_j, \\ K_{III}(B_j) = -\frac{G\alpha}{2} \sqrt{2\pi |\zeta_2^e - \zeta_1^e|} F_2^e, & \text{当 } \zeta_2^e = B_j, \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (25)$$

现在将边界积分方程(19)和位移单值性条件(12)中的积分分别写成边界单元的积分和,并将插值函数(22)至(23)根据单元的类型分别代入,再取(19)式中的源点 ζ_0 分别为各个单元的中节点,即可得关于未知函数 $F(\zeta)$ 的节点值 $\{F_j\}$ 的封闭代数方程组,其系数矩阵由常规积分和奇异积分构成。对于非奇异积分,直接利用 Gauss-Legendre 求积公式进行计算即可。当源点 ζ_0 为积分单元 L_e 的中节点时,方程(19)左端的第一个积分中包含如下的奇异积分

$$\int_{L_e} \text{Re} \left[\frac{e^{i\beta(\zeta_0)}}{\zeta - \zeta_0} \right] F(\zeta) ds(\zeta) = \int_{-1}^1 F(\zeta(t)) \frac{dt}{t} \quad \left[\zeta_0 = \frac{\zeta_1^e + \zeta_2^e}{2} \in L_e \right] \quad (26)$$

将插值函数(22)至(24)分别代入上式,可得以下奇异积分公式:

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 F(\zeta(t)) \frac{dt}{t} = F_2^e - F_1^e & (\text{对于常规单元 } L_e), \\ \int_{-1}^1 F(\zeta(t)) \frac{dt}{t} = F_2^e \sqrt{2\ln(3-2\sqrt{2})} + (F_2^e - F_1^e) & (\text{对于起始裂尖单元 } L_e), \\ \int_{-1}^1 F(\zeta(t)) \frac{dt}{t} = -F_2^e \sqrt{2\ln(3-2\sqrt{2})} + (F_2^e - F_1^e) & (\text{对于末端裂尖单元 } L_e). \end{cases} \quad (27)$$

一旦由代数方程组解得未知函数 $F(\zeta)$ 的节点值 $\{F_j\}$,则应力强度因子可由(25)式直接计算,而扭转刚度 D 可通过将插值函数(22)至(24)式代入(14)式进行计算。

4 数值算例

圆截面裂纹柱的扭转问题(见图1),本文已简化为裂纹上边界积分方程(19)和(12)的求解。为了验证以上公式的正确性和边界元方法的有效性,对圆截面柱体分别含有直线裂纹、曲折裂纹和偏心圆弧裂纹的扭转问题,进行数值计算。

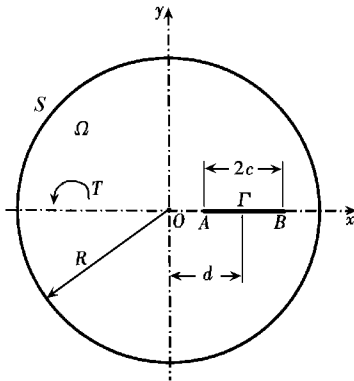


图2 含直裂纹圆柱的扭转

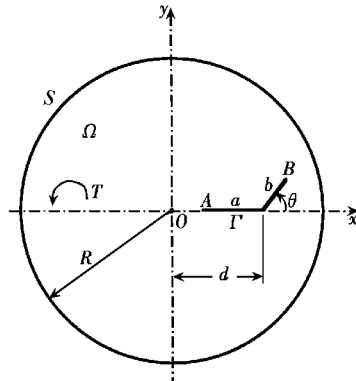


图3 含曲折裂纹圆柱的扭转

4.1 直线裂纹

对于图2所示带有直裂纹圆柱的扭转问题,边界积分方程(19)和(12)又可写为

$$\int_{d-c}^{d+c} \left(\frac{1}{\xi - x_0} - \frac{\xi}{R^2 - x_0 \xi} \right) F(\xi) d(\xi) = -2\pi x_0 \quad (d - c < x_0 < d + c),$$

$$\int_{d-c}^{d+c} F(\xi) d(\xi) = 0.$$

上述方程可利用 Gauss-Chebyshev 积分公式^[4] 求数值解, 由此求得的无量纲扭转刚度 $D^* = D/((\pi/2)GR^4)$ 和无量纲应力强度因子 $K_{III}^* = K_{III}/(G\alpha R\sqrt{\pi c})$ 列于表 1, 与利用第 3 节边界元法(裂纹上取 200 个单元)计算的结果(见表 1)相比较符合得很好, 证明了本文边界元法的有效性和正确性。

表 1 直裂纹情形 D^* 和 K_{III}^* 随参数 c/R 的变化 ($d/R = 0.4$)

c/R	Gauss-Chebyshev 求积法			边界元法		
	D^*	$K_{III}^*(A)$	$K_{III}^*(B)$	D^*	$K_{III}^*(A)$	$K_{III}^*(B)$
0.1	0.996 752	- 0.352 7	0.453 0	0.996 751	- 0.352 1	0.451 9
0.2	0.986 411	- 0.310 9	0.513 3	0.986 407	- 0.310 4	0.512 0
0.3	0.967 002	- 0.274 9	0.585 1	0.966 991	- 0.274 7	0.583 4
0.4	0.934 280	- 0.246 9	0.680 1	0.934 257	- 0.246 9	0.678 0
0.5	0.877 602	- 0.234 2	0.846 9	0.877 553	- 0.234 4	0.843 9

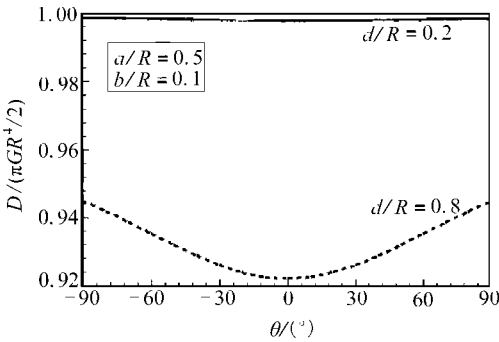


图 4 扭转刚度 D 随 θ 的变化

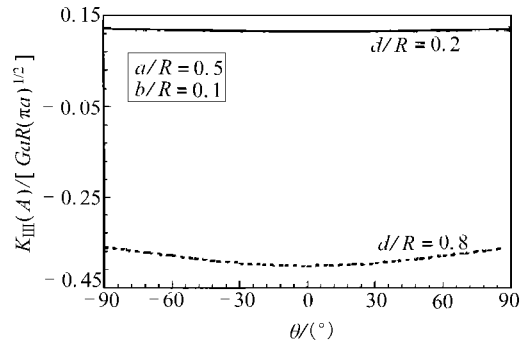


图 5 应力强度因子 $K_{III}(A)$ 随 θ 的变化

4.2 曲折裂纹

考虑图 3 所示带有曲折裂纹的圆柱的扭转问题, 计算时在裂纹上取 140 个单元, 扭转刚度 D 和裂纹的应力强度因子的边界元计算结果分别绘于图 4~ 图 6。由此可见, 裂纹越靠近外边界, 柱体的扭转承载能力就越小。

4.3 偏心圆弧裂纹

对于图 7 所示带有偏心圆弧裂纹的圆柱的扭转问题, 为了更好的用线性单元近似圆弧裂纹, 在裂纹上取 500 个单元。扭转刚度 D 和裂纹的应力强度因子 ($K_{III}(A) = K_{III}(B)$) 的边界元计算结果分别绘于图 8 和图 9。当偏心距越大时, 圆弧裂纹越靠近外边界, 这时柱体的扭转承载能力也就越小。另外, 当圆弧裂纹的中心角 2θ 增大时, 扭转刚度 D 减小, 而应力强度因子的绝对值开始时增大, 达到某一临界值时又开始减小。换句话说, 圆弧裂纹的中心角 2θ 超过某一临界值时, 其对柱体扭转的影响接近相同半径偏心圆孔的情形。

5 结 论

本文研究了带有曲线裂纹圆柱的扭转问题, 通过对柱体边界上的积分方程进行解析求解,

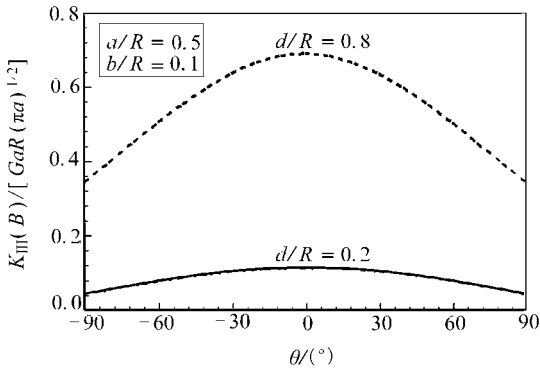


图 6 应力强度因子 $K_{III}(B)$ 随 θ 的变化

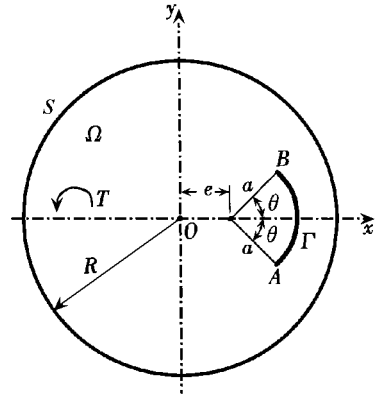


图 7 含偏心圆弧裂纹圆柱的扭转

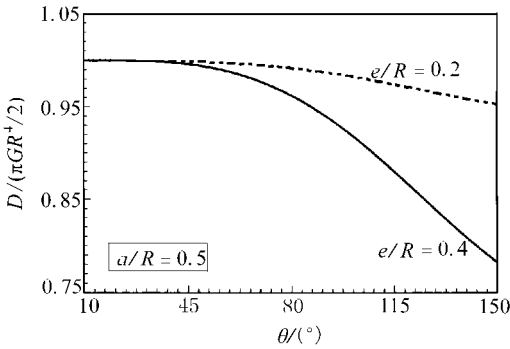


图 8 扭转刚度 D 随 θ 的变化

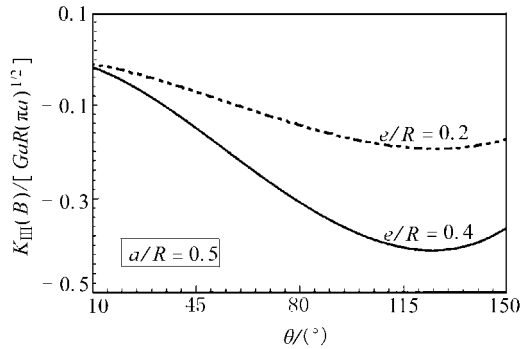


图 9 应力强度因子 $K_{III}(B)$ 随 θ 的变化

将问题简化为曲线裂纹上新边界积分方程的计算,并建立了裂纹尖端的奇异元和线性元插值模型,给出了扭转刚度和应力强度因子的边界元计算公式。对扭转柱体分别含有圆弧裂纹、曲折裂纹以及直线裂纹的典型问题进行了数值计算,并与用 Gauss-Chebyshev 求积法计算的直裂纹情形结果进行了比较,证明了本文公式的正确性和新边界元法的有效性。

[参 考 文 献]

[1] 汤任基. 裂纹柱的扭转理论[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1996, 1—13.
 [2] 钱伟长, 叶开沅. 弹性力学[M]. 北京: 科学出版社, 1956, 148—151.
 [3] Muskhelishvili N I. Singular Integral Equations [M]. Holland: P Noordhoff LTD Groningen, 1953, 56—61.
 [4] TANG Ren_ji, WANG Yin_bang. On the problem of crack system with an elliptic hole[J]. Acta Mechanica Sinica, 1986, 2(1): 47—57.

New Boundary Element Method for Torsion Problems of a Cylinder With Curvilinear Cracks

WANG Yin_bang, LU Zi_zi

(College of Engineering , Ocean University of China ,
Qingdao , Shan dong 266071, P . R . China)

Abstract: The Saint_Venant torsion problems of a cylinder with curvilinear cracks were considered and reduced to solving the boundary integral equations only on cracks. Using the interpolation models for both singular crack tip elements and other crack linear elements, the boundary element formulas of the torsion rigidity and stress intensity factors were given. Some typical torsion problems of a cylinder involving a straight, kinked or curvilinear crack were calculated. The obtained results for the case of straight crack agree well with those given by using the Gauss_Chebyshev integration formulas, which demonstrates the validity and applicability of the present boundary element method.

Key words: Saint_Venant torsion; curvilinear crack; boundary integral equation; boundary element; stress intensity factor