

文章编号: 1000-0887(2005) 12-1436-09

圆形界面刚性线夹杂的平面问题^{*}

刘又文, 方棋洪

(湖南大学 工程力学系, 长沙 410082)

(本刊原编委樊大钧推荐)

摘要: 研究了圆弧形界面刚性线夹杂的平面弹性问题。集中力作用于夹杂或基体中的任意点, 并且无穷远处受均匀载荷作用。利用复变函数方法, 得到了该问题的一般解答。当只含一条界面刚性线夹杂时, 获得了分区复势函数和应力场的封闭形式解答, 并给出刚性线端部奇异应力场的解析表达式。结果表明, 在平面荷载下界面圆弧形刚性线夹杂尖端应力场和裂纹尖端相似具有奇异应力振荡性。对无穷远加载的情况, 讨论了刚性线几何条件、加载条件和材料失配对端部场的影响。

关键词: 复变函数方法; 圆形夹杂; 界面刚性线; 集中力

中图分类号: O343.7 **文献标识码:** A

引 言

复合材料在制造和使用中不可避免会产生缺陷, 例如, 裂纹、孔洞或刚性夹杂; 它们极大地影响了复合材料的力学性能。研究微结构缺陷对应力场的扰动和由此引起的应力集中就成为固体力学和材料科学工作者十分关注的课题。关于不同加载情况下界面裂纹问题, 包括共直线和共圆弧裂纹, 都已得到较为充分的研究。在过去的十几年里, 对于刚性线夹杂(即反裂纹)问题, 也有不少研究成果; 文献[1~7]研究了直线刚性线夹杂问题, 包括单个线夹杂和共线夹杂在任意荷载作用下的情况。然而, 对于曲线型刚性线夹杂的研究并不充分, 我们在文献[8]中研究了平面任意荷载作用下无限大均匀材料含圆弧刚性线夹杂的问题, 文献[9]研究了无穷远均匀热流作用下无限大平面内含一条圆弧刚性线夹杂的热应力集中问题, 文献[10]研究了载荷作用于刚性线上时, 均匀材料含圆弧刚性线夹杂的问题。文献[11]研究了圆弧形界面刚性线的反平面问题。关于圆弧形界面刚性线的平面问题, 至今未见研究成果。而这一模型对于描述复合材料的界面强度具有重要应用价值。

本文利用解析延拓技术和复势函数的奇性主部分析方法, 研究了共圆弧界面刚性线夹杂的平面问题。导出了在平面集中力和无穷远均匀载荷作用下弹性场的一般解答, 获得了几种典型情况复势函数的封闭形式解。导出了刚性线夹杂尖端的奇异应力场公式。结果表明, 在平面荷载下, 理想弹性界面圆弧形刚性线夹杂尖端应力场和裂纹尖端相似, 具有奇异应力振荡

* 收稿日期: 2004_03_03; 修订日期: 2005_08_02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472030)

作者简介: 刘又文(1948—), 男, 湖南益阳人, 教授, 硕士, 博士生导师(联系人, Tel: + 86_731_8821889; Fax: + 86_731_8822330; E_mail: Liuyouwen8294@sina.com)•

性。数值结果显示了应力的强度与刚性线夹杂的形状、加载方式和材料性质相关。

1 问题描述

如图 1 所示,弹性常数为 k_2 和 μ_2 的无限大介质 S^- 包含一个半径为 R , 弹性常数为 k_1 和 μ_1 的圆形弹性介质 S^+ 。此处, $\mu_j (j = 1, 2)$ 为剪切模量, 对于平面应变问题 $k_j = 3 - 4\nu_j$, 对于平面应力问题 $k_j = (3 - 4\nu_j)/(1 + \nu_j)$, ν_j 为泊松比。在两种材料的交界面上有一系列圆弧形刚性线夹杂 $L (L = L_1 + L_2 + \dots + L_n)$, 刚性线 L 的分量 L_j 的尖端分别用 a_j 和 $b_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 表示; 界面的剩余部分用 L' 表示, 并设两种材料粘结完好。整个系统受无穷远均匀拉载荷 T^∞ 和 S^∞ 作用, 前者与实轴成 ω 角度, 集中力 $F_x + iF_y$ 作用在基体(或夹杂)任意点 z_0 , 设无穷远旋转为零。

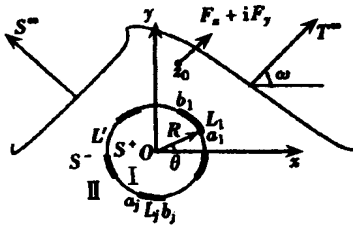


图 1 弹性平面中的圆弧形界面刚性线

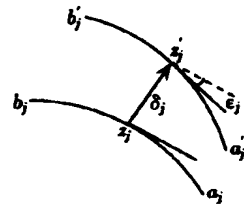


图 2 刚性线的平移和旋转

设圆形夹杂的中心在复平面 $z = x + iy$ 的坐标原点, 用 $t = R \cdot e^{i\theta}$ 表示在圆形界面上的点。界面位移和应力的连接条件可表示为

$$u_1^+(t) + iv_1^+(t) = u_2^-(t) + iv_2^-(t), \quad t \in L', \tag{1}$$

$$\sigma_{r1}^+(t) + i\tau_{r01}^+(t) = \sigma_{r2}^-(t) + i\tau_{r02}^-(t), \quad t \in L', \tag{2}$$

$$u_1^+(t) + iv_1^+(t) = u_2^-(t) + iv_2^-(t) = \begin{cases} \delta_1 + i\epsilon_1(t - z_1), & t \in L_1, \\ \dots, \\ \delta_n + i\epsilon_n(t - z_n), & t \in L_n, \end{cases} \tag{3}$$

式中 σ_r 和 τ_{θ} 表示极坐标中的应力分量, u 和 v 是直角坐标中的位移分量。下标 1 和 2 分别表示区域 S^+ 和 S^- , 上标+ 和- 表示当 z 分别从区域 S^+ 和 S^- 趋向于界面时, 函数所取的边界值。复常数 δ_j 表示刚性线 L_j 随某点 z_j 的平移, ϵ_j 表示绕该点的小角度旋转(图 2)。

由方程(3)对 θ 微分后相加和相减得到

$$[u_1'(t) + iv_1'(t)]^+ + [u_2'(t) + iv_2'(t)]^- = 2iH(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n), \tag{4}$$

$$[u_1'(t) + iv_1'(t)]^+ - [u_2'(t) + iv_2'(t)]^- = 0, \tag{5}$$

其中
$$H(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = \begin{cases} i\epsilon_1, & t \in L_1, \\ \dots, \\ i\epsilon_n, & t \in L_n. \end{cases}$$

此外,还必须考虑刚性线的平衡条件,假设刚性线上无外载荷作用,则作用于刚性线上的合力和合力矩应该为零,由此得到

$$\int_{a_j}^{b_j} (\sigma_{r1} + i\tau_{r01})^+ dt - \int_{a_j}^{b_j} (\sigma_{r2} + i\tau_{r02})^- dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{6}$$

$$\text{Re} \int_{a_j}^{b_j} (\sigma_{r1} + i\tau_{r01})^+ \frac{dt}{t} - \text{Re} \int_{a_j}^{b_j} (\sigma_{r2} + i\tau_{r02})^- \frac{dt}{t} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{7}$$

平面问题的弹性场可以用两个复变函数 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 表示为^[12]

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad (8)$$

$$\sigma_x + i\tau_{\theta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \frac{z}{z}\overline{\Psi(z)}, \quad (9)$$

$$2\mu(u' + v') = iz\left[\kappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \frac{z}{z}\overline{\Psi(z)}\right], \quad (10)$$

式中, $u' = \partial u/\partial\theta$, $v' = \partial v/\partial\theta$, $\Phi'(z) = d[\Phi(z)]/dz$, 横杠表示对复变函数求共轭。

2 一般情形解答

对于上节所述问题, 复势函数 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 在区域 S^- 中可以写成如下形式

$$\Phi_2(z) = \frac{M_2}{z - z_0} + \Gamma + \Phi_{20}(z), \quad z \in S^-, \quad (11)$$

$$\Psi_2(z) = \frac{N_2}{z - z_0} + \frac{\overline{z_0}M_2}{(z - z_0)^2} + \Gamma' + \Psi_{20}(z), \quad z \in S^-, \quad (12)$$

式中

$$M_2 = -\frac{F_x + iF_y}{2\pi(1 + \kappa_2)}, \quad N_2 = \frac{\kappa_2(F_x - iF_y)}{2\pi(1 + \kappa_2)},$$

$$\Gamma = \frac{1}{4}(T^\infty + S^\infty), \quad \Gamma' = -\frac{1}{2}(T^\infty - S^\infty)e^{-2i\omega}.$$

函数 $\Phi_{20}(z)$ 和 $\Psi_{20}(z)$ 在 S^- 中全纯, 在无穷远处为零。

利用 Schwarz 对称原理, 在区域 S^+ 和 S^- 中分别引入新的解析函数 $\Omega_2(z)$ 和 $\Omega_1(z)$

$$\Omega_2(z) = \Phi_2\left(\frac{R^2}{z}\right) - \frac{R^2}{z}\Phi_2'\left(\frac{R^2}{z}\right) - \frac{R^2}{z^2}\Psi_2\left(\frac{R^2}{z}\right), \quad z \in S^+, \quad (13)$$

$$\Omega_1(z) = \Phi_1\left(\frac{R^2}{z}\right) - \frac{R^2}{z}\Phi_1'\left(\frac{R^2}{z}\right) - \frac{R^2}{z^2}\Psi_1\left(\frac{R^2}{z}\right), \quad z \in S^-. \quad (14)$$

把式(10)代入式(1)和(5)中, 由界面上的位移连续条件得到

$$\left[\frac{\kappa_1}{\mu_1}\Phi_1(t) + \frac{1}{\mu_2}\Omega_2(t)\right]^+ = \left[\frac{\kappa_2}{\mu_2}\Phi_2(t) + \frac{1}{\mu_1}\Omega_1(t)\right]^-, \quad t \in L + L'. \quad (15)$$

根据广义 Liouville 定理^[12], 由式(15)得到

$$h(z) = \begin{cases} \frac{\kappa_1}{\mu_1}\Phi_1(z) + \frac{1}{\mu_2}\Omega_2(z), & z \in S^+, \\ \frac{\kappa_2}{\mu_2}\Phi_2(z) + \frac{1}{\mu_1}\Omega_1(z), & z \in S^-, \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{其中 } h(z) = \frac{\kappa_2}{\mu_2} \frac{M_2}{z - z_0} + \frac{1}{\mu_2} \left[\frac{\overline{N_2}}{z - z^*} - \frac{\overline{N_2}}{z} - \frac{\overline{M_2}z^*(z_0 - z^*)}{z_0(z - z^*)^2} \right] + \frac{\kappa_2}{\mu_2} \Gamma - \frac{R^2}{\mu_2 z^2} \overline{\Gamma} + D_0.$$

由式(14)和(16), 可得 $D_0 = \overline{\Phi_1(0)}/\mu_1$. 从式(2)和(9), 可得到

$$[\Phi_1(t) - \Omega_2(t)]^+ = [\Phi_2(t) - \Omega_1(t)]^-, \quad t \in L'. \quad (17)$$

$$\text{设 } W(z) = \begin{cases} \Phi_1(z) - \Omega_2(z), & z \in S^+, \\ \Phi_2(z) - \Omega_1(z), & z \in S^-, \end{cases} \quad (18)$$

分析复势函数 $W(z)$ 的奇性主部, 可以得到

$$W(z) = \frac{M_2}{z - z_0} - \frac{\overline{N_2}}{z - z^*} + \frac{\overline{N_2}}{z} + \frac{\overline{M_2}z^*(z_0 - z^*)}{z_0(z - z^*)^2} + \Gamma + \frac{R^2}{z^2} \overline{\Gamma} - \mu_1 D_0 + W_0(z), \quad (19)$$

其中函数 $W_0(z)$ 在沿 L 割开的全平面全纯, 并且在无穷远处为零。

把式(10)代入式(4)中, 且注意到式(16)~(19), 得到

$$W_0^+(t) - gW_0^-(t) = B[4H + Ah(t)] - (1-g) \left[\frac{M_2}{z-z_0} - \frac{\overline{N_2}}{z-z^*} - \frac{\overline{N_2}}{z} - \frac{\overline{M_2 z^* (z_0 - z^*)}}{z_0(z-z^*)^2} + \Gamma + \frac{R^2}{z^2} \overline{\Gamma} - \mu_1 D_0 \right], \quad (20)$$

式中 $g = -\frac{(\mu_1 + \kappa_1 \mu_2) \kappa_2}{(\mu_2 + \kappa_2 \mu_1) \kappa_1}$, $A = \frac{2 \mu_1 \mu_2 (1 - \kappa_1 \kappa_2)}{(\mu_1 + \kappa_1 \mu_2)(\mu_2 + \kappa_2 \mu_1)}$, $B = \frac{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1}{2 \kappa_1}$.

式(20)的一般解答为^[12]

$$W_0(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{X_0^+(t)} \frac{dt}{t-z} + P_n(z) X_0(z), \quad (21)$$

式中

$$f(t) = B[4H + Ah(t)] - (1-g) \left[\frac{M_2}{t-t_0} - \frac{\overline{N_2}}{t-z^*} + \frac{\overline{N_2}}{t} + \frac{\overline{M_2 z^* (z_0 - z^*)}}{z_0(t-z^*)^2} + \Gamma + \frac{R^2}{t^2} \overline{\Gamma} - \mu_1 D_0 \right],$$

$$X_0(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{-0.5 - i\beta} (z - b_j)^{-0.5 + i\beta}, \quad \beta = (\ln |g|) / 2\pi$$

函数 $X_0(z)$ 是沿 L 割开的平面上的一单值支, 在 L 上满足关系 $X_0^+(t) = gX_0^-(t)$, 并且有 $\lim_{z \rightarrow \infty} zX_0(z) = 1$ 。函数 $P_n(z)$ 是与 $W_0(z)$ 在无穷远处性质有关的一个任意多项式 $P_n(z) = C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-2} + \dots + C_n$ 。式(21)中剩余的系数 C_1, C_2, \dots, C_n 和实常数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 将由平衡条件式(6)和(7)确定。

3 典型问题示例

设圆形夹杂界面上含一条关于 x 轴对称的刚性线, 在 $|z| = R$ 上, 有端点 $a = R \cdot e^{-i\alpha}$ 和 $b = R \cdot e^{i\alpha}$ 。计算式(21)中的 Cauchy 积分后得到

$$W(z) = \frac{1}{1-g} [4HB + ABh(z)] - \frac{X_0(z)}{1-g} [G_0(z) + G_\infty(z) + G_{z_0}(z) + G_{z^*}(z) - (1-g)P_n(z)], \quad (22)$$

式中, $X_0(z) = (z-a)^{-0.5-i\beta} (z-b)^{-0.5+i\beta}$; $G_0(z), G_\infty(z), G_{z_0}(z)$ 和 $G_{z^*}(z)$ 分别代表函数 $f(z)/X_0(z)$ 在 $z=0, z=\infty, z=z_0$ 和 $z=z^*$ 点的奇性主部。

3.1 无穷远受均匀荷载 T^∞ 和 S^∞

对于这种情况, 有

$$h(z) = \frac{\kappa_2}{\mu_2} \Gamma - \frac{R^2}{\mu_2 z^2} \overline{\Gamma} + D_0, \quad (23)$$

$$W(z) = \frac{1}{1-g} [4i\varepsilon_1 B + ABh(z)] - \frac{X_0(z)}{1-g} [G_0(z) + G_\infty(z)], \quad (24)$$

式中

$$G_0(z) = \left[AB \frac{\overline{\Gamma}}{\mu_2} + (1-g) \overline{\Gamma} \right] \left[\frac{R^3}{z^2} - \frac{R^2}{z} (\cos \alpha - 2\beta \sin \alpha) \right] e^{2\beta(\alpha + \pi)},$$

$$G_\infty(z) = \left[\left(4H + A \frac{\kappa_2 \Gamma}{\mu_2} + AD_0 \right) B - (1-g)(\Gamma - \mu_1 D_0) \right] \times$$

$$\begin{aligned}
 & [z - R(\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha)], \\
 D_0 = & \left\{ \frac{k_2 \Gamma}{\mu_2} \left[1 + \frac{AB}{(1-g)\mu_2} \right] + \frac{e^{-2\alpha\beta}}{2(1-g)\mu_2} \left[\frac{1}{4} + \beta^2 + \frac{3\cos 2\alpha}{4} - \beta^2 \cos 2\alpha - \right. \right. \\
 & \left. \left. 2\beta \sin 2\alpha - (\cos \alpha - 2\beta \sin \alpha)^2 \right] \left[\frac{AB}{\mu_2} + 1 - g \right] (\Gamma' + \overline{\Gamma'}) - \right. \\
 & \left. \frac{\Gamma e^{-2\alpha\beta}}{(1-g)\mu_2} (\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha) \left[AB \frac{k_2}{\mu_2} + 1 - g \right] \right\} \left\{ \left[\frac{\mu_1 + \mu_2 k_1}{\mu_2} - 1 - \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{AB}{(1-g)\mu_2} + \frac{\Gamma e^{-2\alpha\beta}}{(1-g)\mu_2} (\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha) \left[AB \frac{k_2}{\mu_2} - 1 + g \right] \right] \right\}, \\
 \varepsilon_1 = & \frac{-e^{2\beta\pi}}{8iB(1-e^{-2\alpha\beta} \cos \alpha - 2\beta e^{-2\alpha\beta} \sin \alpha)} \left[\frac{1}{4} + \beta^2 + \frac{3\cos 2\alpha}{4} - \beta^2 \cos 2\alpha - \right. \\
 & \left. 2\beta \sin 2\alpha - (\cos \alpha - 2\beta \sin \alpha)^2 \right] \left[\frac{AB}{\mu_2} + 1 - g \right] (\overline{\Gamma'} - \Gamma').
 \end{aligned}$$

由式(16)、(18)、(23)和(24)可以获得复势函数 $\Phi_1(z)$ 和 $\Phi_2(z)$ 。 $\Psi_1(z)$ 和 $\Psi_2(z)$ 可以由式(13)和(14)得到; 应力和位移分量可以从式(8)~(10)得到。

3.2 基体中任意点 z_0 作用集中力 $F_x + iF_y$

设只有集中力 $F_x + iF_y$ 作用在基体中 z_0 点, 则有

$$h(z) = \frac{k_2}{\mu_2} \frac{M_2}{z - z_0} + \frac{1}{\mu_2} \left[\frac{\overline{N_2}}{z - z^*} - \frac{\overline{N_2}}{z} - \frac{\overline{M_2 z^*} (z_0 - z^*)}{z_0(z - z^*)^2} \right] + D_0, \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
 W(z) = & \frac{1}{1-g} [4i\varepsilon_1 B + ABh(z)] - \\
 & \frac{X_0(z)}{1-g} [G_0(z) + G_\infty(z) + G_{z_0}(z) + G_{z^*}(z) - (1-g)C_1], \quad (26)
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
 G_0(z) &= \frac{-1}{X_0(0)} \left[\frac{AB}{\mu_2} + 1 - g \right] \frac{\overline{N_2}}{z}, \\
 G_\infty(z) &= [z - R(\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha)] (4i\varepsilon_1 B + ABD_0 + \mu_1 D_0 - g\mu_1 D_0) + \\
 & \quad \left[\frac{ABk_2}{\mu_2} - 1 + g \right] M_2, \\
 G_{z_0}(z) &= \frac{M_2}{X_0(z_0)} \frac{1}{z - z_0} \left[\frac{ABk_2}{\mu_2} - 1 + g \right], \\
 G_{z^*}(z) &= \frac{1}{X_0(z^*)} \left[\frac{AB}{\mu_2} + 1 - g \right] \left\{ \frac{z^* (z_0 - z^*) \overline{M_2}}{z_0(z - z^*)^2} \left[(z - z^*) \frac{X_0'(z^*)}{X_0(z^*)} - 1 \right] + \frac{\overline{N_2}}{z - z^*} \right\},
 \end{aligned}$$

其中, 常数 D_0 由式 $D_0 = \overline{\Phi_1(0)}/\mu_1$ 确定; ε_1 由式(7)确定。

3.3 夹杂中任意点 z_0 作用集中力 $F_x + iF_y$

考虑夹杂中任意点 z_0 作用集中力 $F_x + iF_y$ 。与式(11)和(12)相似, 我们定义在夹杂区域的复势函数为

$$\Phi_1(z) = \frac{M_1}{z - z_0} + \Phi_{10}(z), \quad (27)$$

$$\Psi_1(z) = \frac{N_1}{z - z_0} + \frac{\overline{z_0 M_1}}{(z - z_0)^2} + \Psi_{10}(z), \quad (28)$$

式中 $M_1 = -\frac{F_x + iF_y}{2\pi(1+k_1)}$, $N_1 = \frac{k_1(F_x - iF_y)}{2\pi(1+k_1)}$,

函数 $\Phi_0(z)$ 和 $\Psi_{10}(z)$ 在 S^+ 中全纯

复势函数 $\Phi_2(z)$ 和 $\Psi_2(z)$ 在定义区域内全纯, 当 $|z|$ 充分大时有

$$\Phi_2(z) = \frac{M_2}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \Psi_2(z) = \frac{N_2}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (29)$$

运用第 2 节中类似的方法, 得到函数 $\Phi_1(z)$ 和 $\Phi_2(z)$ 的表达式

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) = & \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1} \left[\frac{\kappa_1 M_1}{\mu_1 z - z_0} + \frac{1}{\mu_1 z - z^*} \frac{\overline{N_1}}{z - z^*} - \frac{\overline{M_1 z^* (z_0 - z^*)}}{\mu_1 \overline{z_0 (z - z^*)}^2} + D_0^* + \right. \\ & \frac{\kappa_2 M_2}{\mu_2 z} - \frac{1}{\mu_2 z} \frac{\overline{N_2}}{z} \left. + \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1} \frac{1}{1 - g} \left\{ 4i \varepsilon^* B + AB \left[\frac{\kappa_1 M_1}{\mu_1 z - z_0} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{\mu_1 z - z^*} \frac{\overline{N_1}}{z - z^*} - \frac{\overline{M_1 z^* (z_0 - z^*)}}{\mu_1 \overline{z_0 (z - z^*)}^2} + D_0^* + \frac{\kappa_2 M_2}{\mu_2 z} - \frac{1}{\mu_2 z} \frac{\overline{N_2}}{z} \right\} - \right. \\ & \left. \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1} \frac{X_0(z)}{1 - g} [G_0^*(z) + G_\infty^*(z) + G_{z_0}^*(z) + G_{z^*}^*(z)], \right. \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) = & \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1} \left[\frac{\kappa_1 M_1}{\mu_1 z - z_0} + \frac{1}{\mu_1 z - z^*} \frac{\overline{N_1}}{z - z^*} - \frac{\overline{M_1 z^* (z_0 - z^*)}}{\mu_1 \overline{z_0 (z - z^*)}^2} + D_0^* + \right. \\ & \frac{\kappa_2 M_2}{\mu_2 z} - \frac{1}{\mu_2 z} \frac{\overline{N_2}}{z} \left. + \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1} \frac{1}{1 - g} \left\{ 4i \varepsilon^* B + AB \left[\frac{\kappa_1 M_1}{\mu_1 z - z_0} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{\mu_1 z - z^*} \frac{\overline{N_1}}{z - z^*} - \frac{\overline{M_1 z^* (z_0 - z^*)}}{\mu_1 \overline{z_0 (z - z^*)}^2} + D_0^* + \frac{\kappa_2 M_2}{\mu_2 z} - \frac{1}{\mu_2 z} \frac{\overline{N_2}}{z} \right\} - \right. \\ & \left. \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1} \frac{X_0(z)}{1 - g} [G_0^*(z) + G_\infty^*(z) + G_{z_0}^*(z) + G_{z^*}^*(z)], \right. \end{aligned} \quad (31)$$

式中

$$\begin{aligned} G_0^*(z) &= \frac{1}{X_0(0)} \left[\frac{AB\kappa_2}{\mu_2} - 1 + g \right] \frac{M_2}{z} - \frac{1}{X_0(0)} \left[\frac{AB}{\mu_2} + 1 - g \right] \frac{\overline{N_2}}{z}, \\ G_\infty^*(z) &= [z - R(\cos \alpha + 2\beta \sin \alpha)] (4i \varepsilon^* B + ABD_0^* + \mu_1 D_0^* - g \mu_1 D_0^*) + \\ & \left[\frac{AB\kappa_2}{\mu_2} - 1 + g \right] M_2 - \left[\frac{AB}{\mu_2} + 1 - g \right] \overline{N_2}, \\ G_{z_0}^*(z) &= \frac{M_1}{X_0(z_0)} \frac{1}{z - z_0} \left[\frac{AB\kappa_1}{\mu_1} - 1 + g \right], \\ G_{z^*}^*(z) &= \frac{1}{X_0(z^*)} \left[\frac{AB}{\mu_1} + 1 - g \right] \left\{ \frac{z^* (z_0 - z^*)}{\overline{z_0 (z - z^*)}^2} \overline{M_1} \left[(z - z^*) \frac{X_0'(z^*)}{X_0(z^*)} - 1 \right] - \frac{\overline{N_1}}{z - z^*} \right\}. \end{aligned}$$

4 刚性线尖端应力场奇异因子

引入刚性线尖端应力场奇异因子, 该因子定义如下^[9]

$$S_1 - iS_2 = \sqrt{2\pi}(1 - \kappa_2) \lim_b (z - b)^{0.5 - i\beta} \quad z(z), \quad \text{在端点 } b, \quad (32)$$

$$S_1 - iS_2 = \sqrt{2\pi}(1 - \kappa_2) \lim_a (z - a)^{0.5 + i\beta} \quad z(z), \quad \text{在端点 } a. \quad (33)$$

为了采用公式 (32) 和 (33) 计算刚性线尖端的应力场奇异因子, 我们将坐标轴进行旋转, 使刚性线尖端切线平行于 x 轴. 变换函数如下

$$z = \omega(Z) = ie^{i\alpha}(Z - iR - 0.5R \sin 2\alpha), \quad \text{在端点 } b, \quad (34)$$

$$z = \omega(Z) = -ie^{i\alpha}(Z + iR - 0.5R\sin 2\alpha), \quad \text{在端点 } a \quad (35)$$

考虑无穷远加载的情况, 可得端点 b 的应力奇异因子为

$$S_{1-} - iS_{2-} = \frac{\sqrt{2\pi R}(1 - K_2)ie^{-i\alpha/2 - \alpha\beta}}{(1 - g)(2R\sin\alpha)^{1/2 - i\beta}} \left\{ \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_1 K_2} \times \right. \\ \left[AB \frac{\bar{\Gamma}}{\mu_2} + (1 - g) \bar{\Gamma} \right] [e^{-2i\alpha} - e^{-i\alpha}(\cos\alpha - 2\beta\sin\alpha)] e^{2\beta(\alpha + \pi)} + \\ \left[\left(4i\epsilon_1 + A \frac{K_2 \Gamma}{\mu_2} + AD_0 \right) B - (1 - g)(\Gamma - \mu_1 D_0) \right] \times \\ \left. [e^{i\alpha} - (\cos\alpha + 2\beta\sin\alpha)] \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_1 K_2} \right\} \quad (36)$$

和端点 a 的应力奇异因子

$$S_{1-} - iS_{2-} = \frac{-\sqrt{2\pi R}(1 - K_2)ie^{i\alpha/2 - \alpha\beta}}{(1 - g)(2R\sin\alpha)^{1/2 + i\beta}} \left\{ \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_1 K_2} \times \right. \\ \left[AB \frac{\bar{\Gamma}}{\mu_2} + (1 - g) \bar{\Gamma} \right] [e^{2i\alpha} - e^{i\alpha}(\cos\alpha - 2\beta\sin\alpha)] e^{2\beta(\alpha + \pi)} + \\ \left[\left(4i\epsilon_1 + A \frac{K_2 \Gamma}{\mu_2} + AD_0 \right) B - (1 - g)(\Gamma - \mu_1 D_0) \right] \times \\ \left. [e^{-i\alpha} - (\cos\alpha + 2\beta\sin\alpha)] \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_1 K_2} \right\}. \quad (37)$$

从公式(36)和(37)可以看出刚性线夹杂尖端的应力奇异因子和刚性线的几何条件、载荷条件和材料常数相关。对于一般的平面应变情形 ($\kappa = 3 - 4\nu$), 利用式(36), 画出上述因素对刚性线尖端 b 的应力场奇异因子的影响规律如图3~图8所示。首先, 设 $\kappa_1 = \kappa_2 = 1.8$, $R = 1$ 和 $S^\infty = 0$; 定义无量纲应力奇异因子为 $S_{10} = S_1/T^\infty$ 和 $S_{20} = S_2/T^\infty$ 。当 $\omega = 0$, $m = \mu_1/\mu_2$ 取不同值时, 应力奇异因子随刚性线角度 α 的变化如图3(S_{10})和图4(S_{20})所示。从图中可以看出, 奇异因子随 m 的减小而变大。无量纲奇异因子 S_{10} 随刚性线角度 α 的变大而增加, 在 $\alpha = 20^\circ$ 附近时达到最大值, 然后随 α 的增大而减小, 在 $\alpha = 110^\circ$ 附近时有最小值, 随后再增加。奇异因子 S_{10} 的绝对值随着夹杂材料的软化而增加。从破坏机理来看, 在无穷远载荷作用下, 刚性线角度 $\alpha = 20^\circ$ 时, 最容易发生破坏。当 $m \leq 1$ 时, 奇异因子 S_{20} 在 $\alpha = 60^\circ$ 附近达到最大值, 而当 $m > 1$ 时, 在 $\alpha = 160^\circ$ 附近达到最大值, 此时界面最容易发生破坏。

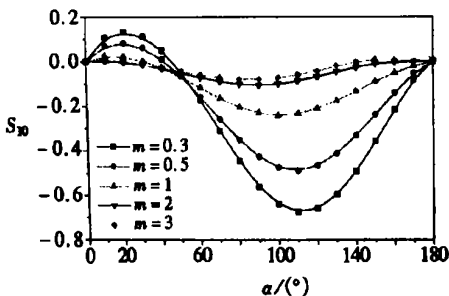


图3 m 取不同值时, S_{10} 随 α 的变化

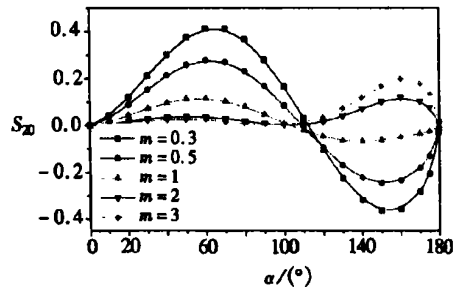


图4 m 取不同值时, S_{20} 随 α 的变化

设 $\mu_1 = \mu_2$, $R = 1$ 和 $S^\infty = 0$ 。当 $\omega = 0$ 和 $K_2 = 1.8$, K_1 取不同值时, 刚性线尖端 b 点的应力奇异因子随刚性线角度 α 的变化如图5(S_{10})和图6(S_{20})所示。图5和图6说明 K_1 对奇

异因子的影响较大, 随着 κ_1 的改变, 奇异因子的最大值也发生变化。可以看出应力奇异因子的最大值随着 κ_1 的减小而增加。对于 $\kappa_1 = 1.1$ 的情况, 界面破坏应当发生在 $\alpha = 25^\circ$ 的附近, 此时应力奇异因子 S_{10} 有最大的正值。

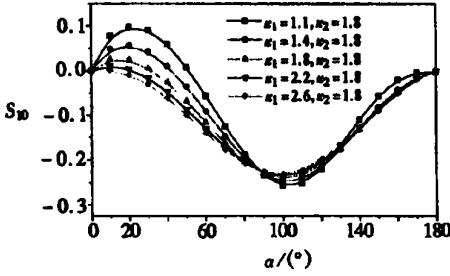


图 5 κ_1 取不同值时, S_{10} 随 α 的变化

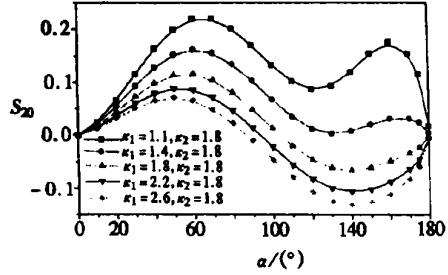


图 6 κ_1 取不同值时, S_{20} 随 α 的变化

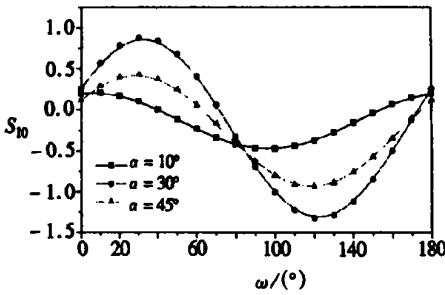


图 7 α 取不同值时, S_{10} 随 ω 的变化

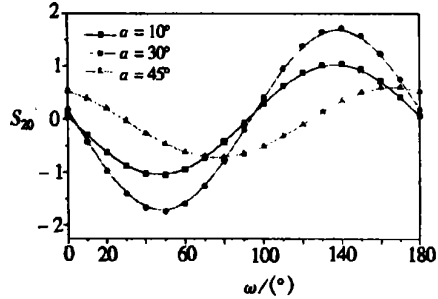


图 8 α 取不同值时, S_{20} 随 ω 的变化

当 $m = 0.2$, $\kappa_1 = 1.1$ 和 $\kappa_2 = 1.8$, 刚性线角度取不同值时, 刚性线尖端 b 点的应力奇异系数随无穷远加载角度 ω 的变化如图 7(S_{10}) 和图 8(S_{20}) 所示。在 $10^\circ < \alpha < 45^\circ$ 的范围内, 随着刚性线的角度增加, 应力奇异因子 S_{10} 最大值先变大, 后减小。对于 $\alpha = 30^\circ$ 的情况, 界面破坏应当发生在加载角度 $\omega = 35^\circ$ 时, 此时应力奇异因子 S_{10} 有最大的正值。应力奇异因子 S_{20} 的变化规律和 S_{10} 相似。对于 $\alpha = 30^\circ$ 的情况, 在加载角度 $\omega = 50^\circ$ 时, 应力奇异因子 S_{20} 有最大的正值。

5 总 结

利用复变函数方法, 获得了在无穷远拉伸作用和集中力作用下圆弧形界面刚性线夹杂平面问题的封闭形式解答。给出了刚性线夹杂尖端应力场奇异因子的解析表达式; 表明在平面荷载下理想弹性界面圆弧形刚性线夹杂尖端应力场和裂纹尖端相似, 具有奇异应力振荡性。对无穷远加载的情况, 以图表的形式讨论了刚性线的几何形状、载荷条件和材料常数, 对刚性线夹杂尖端应力场奇异因子的影响规律。本文解答为复合材料的细观结构设计提供了科学依据。

[参 考 文 献]

- [1] Wang Z Y, Zhang H T, Chou Y T. Stress singularity at the top of a rigid line inhomogeneity under antiplane shear loading[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1986, 53(3): 459—461.
- [2] Ballarini R. A rigid line inclusion at a biomaterial interface[J]. Eng Frac Mech, 1990, 37(1): 1—5.

- [3] JIANG Chi_ping, LIU Chun_tu. Stress distribution around a rigid line in dissimilar media[J]. Eng Frac Mech, 1992, **42**(1): 27—32.
- [4] JIANG Chi_ping. The plane problem of collinear rigid lines arbitrary loads[J]. Eng Frac Mech, 1991, **39**(2): 299—308.
- [5] Hao T H, Wu Y C. Elastic plane problem of collinear periodical rigid lines[J]. Eng Frac Mech, 1989, **33**(2): 979—981.
- [6] JIANG Chi_ping, Chueng Y C. Antiplane problems of collinear rigid line inclusions in dissimilar media [J]. Eng Frac Mech, 1995, **52**(5): 907—916.
- [7] Markenscoff X, Ni L Q, Dundurs J. Interface anticrack and Green's functions for interacting anticracks and cracks/anticracks[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1994, **61**(4): 797—802.
- [8] LIU You_wen, JIANG Chi_ping. Stress distribution at the rigid circular arc inclusion end[J]. Eng Frac Mech, 1994, **47**(3): 431—440.
- [9] Shen M H, Chao C K. Explicit solutions for elastic and thermo_elastic fields with rigid circular arc inclusion[J]. Internat J Fracture, 1995, **65**(1): 1—18.
- [10] CHEN Yi_zhou. Circular arc rigid line problem with loading on_line[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1998, **65**(4): 776—778.
- [11] 刘又文, 方棋洪. 圆形界面刚性线夹杂的反平面问题[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(4): 417—424.
- [12] Muskhelishvili N L. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity [M]. Leyden: Noordhoff, 1975.

Plane Elastic Problem on the Rigid Lines Along a Circular Inclusion

LIU You_wen, FANG Qi_hong

(Department of Engineering Mechanics, Hunan University,
Changsha 410082, P. R. China)

Abstract: The plane elastic problem of circular arc rigid line inclusions is considered. The model is subjected to remote general loads and concentrated force which is applied at an arbitrary point inside either the matrix or the circular inclusion. Based on complex variable method, the general solutions of the problem were derived. The closed form expressions of the sectionally holomorphic complex potentials and the stress fields were derived for the case of the interface with a single rigid line. The exact expressions of the singular stress fields at the rigid line tips were calculated which show that they possess a pronounced oscillatory character similar to that for the corresponding crack problem under plane loads. The influence of the rigid line geometry, loading conditions and material mismatch on the stress singularity coefficients is evaluated and discussed for the case of remote uniform load.

Key words: complex variable method; circular inclusion; interfacial rigid line; concentrated force