应用数学和力学, 第 26 卷 第 12 期(2005 年 12 月)　　　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　　　重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 12_1493_07

带有不等式约束的非线性规划问题的一个精确增广 Lagrange 函数*

杜学武[1,2], 张连生[1], 尚有林[1], 李铭明[1]

(1. 上海大学 数学系, 上海 200444;
2. 河南理工大学 数学与信息科学学院, 河南 焦作 454010)

(戴世强推荐)

摘要: 对求解带有不等式约束的非线性非凸规划问题的一个精确增广 Lagrange 函数进行了研究• 在适当的假设下, 给出了原约束问题的局部极小点与增广 Lagrange 函数, 在原问题变量空间上的无约束局部极小点之间的对应关系• 进一步地, 在对全局解的一定假设下, 还提供了原约束问题的全局最优解与增广 Lagrange 函数, 在原问题变量空间的一个紧子集上的全局最优解之间的一些对应关系• 因此, 从理论上讲, 采用该文给出的增广 Lagrange 函数作为辅助函数的乘子法, 可以求得不等式约束非线性规划问题的最优解和对应的 Lagrange 乘子•

关 键 词: 局部最优; 全局最优; 非线性规划; 精确罚函数; 增广 Lagrange 函数
中图分类号: O221.2　　文献标识码: A

引　　言

求解有约束最优化问题的一类重要方法是构造一个辅助函数, 使得这一函数的无约束极小点也是有约束问题的极小点, 然后用无约束极小化方法求出辅助函数的极小点, 从而获得原问题的最优解• 基于这一思想, 无论在理论方面还是从计算角度都有许多的研究, 试图通过对某个辅助函数的一个单一的无约束极小化过程求解有约束非线性规划问题• 相对于序列罚函数方法而言, 通常称这类方法为精确罚函数方法(参看文献[1~ 5]) •

精确罚函数方法基于构造某个依赖于参数的辅助函数, 使得对充分大的参数值, 这一辅助函数的无约束极小点也是有约束问题的极小点• 我们将精确罚函数方法分为两类: 一类是基于精确罚函数的方法(参见文献[6~ 9]) , 另一类是基于精确增广 Lagrange 函数的方法(参见文献[10~ 14]) • 通常情况下, 当无约束问题的变量与原约束问题的变量在同一空间时, 称为精确罚函数方法; 而当无约束问题定义在原问题变量与乘子变量的乘积空间时, 则称为精确增广 Lagrange 函数方法•

本文提出了一个全局精确的增广 Lagrange 函数, 并从理论方面研究了它的精确性•

* 收稿日期: 2004_02_01; 修订日期: 2005_05_31
作者简介: 杜学武(1965—) , 男, 河南辉县人, 副教授, 博士(联系人. 河南理工大学 数学与信息科学学院, 河南 焦作 454010.Tel: + 86_391_3980615; E_mail: duxuewu@ hpu. edu. cn)•

1 问题阐述

本文考虑如下的只带有不等式约束的非线性规划问题:

(P) $\min f(\boldsymbol{x})$, s.t. $\boldsymbol{x} \in S$,

这里 $S = \{\boldsymbol{x} \in X: \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leqslant \boldsymbol{0}\}$ 是问题(P)的可行集。假设 $f: R^n \to R^1$ 和 $\boldsymbol{g}: R^n \to R^m$ 都是二次连续可微函数,X 是 R^n 中的一个非空紧集。显然,S 也是 R^n 中的紧集。我们总假设 S 是非空的。

问题(P)的局部极小点的集合和全局极小点的集合分别记为 $L(\mathrm{P})$ 和 $G(\mathrm{P})$。不等式约束的指标集记为 I,即 $I = \{1, 2, \dots, m\}$。对任意的 $\boldsymbol{x} \in R^n$,定义指标集 $I(\boldsymbol{x}) = \{i \in I: g_i(\boldsymbol{x}) = 0\}$。$I(\boldsymbol{x})$ 称为在 $\boldsymbol{x}$ 处积极的不等式约束指标集。

问题(P)的 Lagrange 函数 $L: R^n \times R^m \to R^1$ 定义为:

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda^{\mathrm{T}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),$$

其中 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^{\mathrm{T}}$ 称为乘子向量。

问题(P)的 Karush_Kuhn_Tucker 对(简称为 KKT 对)是 $R^n \times R^m$ 中满足下列条件的点$(\boldsymbol{x}, \lambda)$:

$$\boldsymbol{x} \in S, \quad \nabla_x L(\boldsymbol{x}, \lambda) = \boldsymbol{0}, \quad \lambda^{\mathrm{T}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \lambda \geqslant \boldsymbol{0}. \tag{1}$$

这时,我们也称 $(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 满足KKT 条件(1);而称 $\boldsymbol{x}$ 为问题(P)的一个KKT 点,λ 为与 $\boldsymbol{x}$ 相对应的一个 KKT 乘子向量。

设 $(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 是问题(P)的一个KKT 对,我们称严格互补松弛性条件在 $(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 成立,如果对所有的 $i \in I(\boldsymbol{x})$,都有 $\lambda_i > 0$。

设 $(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 是问题(P)的一个 KKT 对,分别定义指标集 $I^+(\boldsymbol{x})$, $I^0(\boldsymbol{x})$ 和锥 C 如下:

$$I^+(\boldsymbol{x}) = \{i \in I(\boldsymbol{x}): \lambda_i > 0\}, \quad I^0(\boldsymbol{x}) = \{i \in I(\boldsymbol{x}): \lambda_i = 0\},$$

$$C = \{\boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0}: \nabla g_i(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0},\ i \in I^+(\boldsymbol{x}),\ \nabla g_i(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} \leqslant \boldsymbol{0},\ i \in I^0(\boldsymbol{x})\}.$$

我们称 $\boldsymbol{x}$ 是问题(P)的一个严格局部极小点的二阶充分最优性条件在 $(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 成立,如果对所有的 $\boldsymbol{d} \in C$,都有

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}, \lambda) \boldsymbol{d} > 0,$$

这里 $\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}, \lambda) = \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i \in I(\boldsymbol{x})} \lambda_i \nabla^2 g_i(\boldsymbol{x})$ 是问题(P)的 Lagrange 函数在 $(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 处的 Hessian 矩阵。

定义二元函数

$$P_c(t, \gamma) = \begin{cases} \gamma t + \dfrac{c}{2} t^2, & \text{当 } t \geqslant -\dfrac{\gamma}{c}; \\ -\dfrac{\gamma^2}{2c}, & \text{当 } t \leqslant -\dfrac{\gamma}{c}, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $c > 0$ 为参数,$t \in R^1$,$\gamma \in R^1$。

本文给出问题(P)的增广 Lagrange 函数 $F_c(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 如下:

$$F_c(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i \in I} P_c[g_i(\boldsymbol{x}), \lambda_i], \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in R^n$,$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^{\mathrm{T}} \in R^m$,$c > 0$ 为罚参数。

下面我们首先陈述两个预备引理;然后在第 3 节,我们在适当的假设下,给出原约束问题(P)的局部极小点与增广 Lagrange 函数 $F_c(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 的无约束局部极小点之间的对应关系;最后

在第 4 节, 我们在合理的假设下, 给出原约束问题(P) 的全局最优解与增广 Lagrange 函数 $F_c(\boldsymbol{x}, \lambda)$, 在紧集 X 上的全局最优解之间的某些对应关系•

2 预备引理

引理 2.1 设 $(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 是问题(P) 的一个KKT 对, 且严格互补松弛性条件在$(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 成立• 那么, 对任意给定的 $c > 0$, 存在 $\varepsilon_c > 0$ 使得对所有的 $\boldsymbol{x} \in N_{\varepsilon_c}(\boldsymbol{x})$ 成立:

$$g_i(\boldsymbol{x}) \geqslant -\frac{\lambda_i}{c}, \qquad \text{如果 } i \in I(\boldsymbol{x});$$

$$g_i(\boldsymbol{x}) \leqslant -\frac{\lambda_i}{c} = 0, \qquad \text{如果 } i \in I \setminus I(\boldsymbol{x}),$$

这里 $N_{\varepsilon_c}(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的 ε_c 开邻域• 进一步地, 对所有的 $\boldsymbol{x} \in N_{\varepsilon_c}(\boldsymbol{x})$ 成立:

$$F_c(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i \in I(\boldsymbol{x})} \left[\lambda_i g_i(\boldsymbol{x}) + \frac{c}{2} g_i^2(\boldsymbol{x}) \right] •$$

证明 由严格互补松弛性条件在 KKT 对 $(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 处成立, 并根据 $F_c(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 的定义式(3), 我们容易证明该引理的结论成立•

引理 2.2 (i) 对任意的 $t \in R^1$, $\gamma \in R^1$ 和 $c > 0$, 不等式 $P_c(t, \gamma) \geqslant -\gamma^2/(2c)$ 恒成立; (ii) 对任意的 $t \leqslant 0$, $\gamma \in R^1$ 和 $c > 0$, 不等式 $P_c(t, \gamma) \leqslant 0$ 恒成立•

证明 根据 $P_c(t, \gamma)$ 的表达式(2), 容易证明结论(i) 成立• 下面证明结论(ii) 也成立• 设 $\gamma \in R^1$, $c > 0$• 如果 $t \geqslant -\gamma/c$, 即 $\gamma + ct \geqslant 0$, 那么由条件 $t \leqslant 0$ 可知, $\gamma + ct/2 \geqslant \gamma + ct \geqslant 0$, 因此有

$$P_c(t, \gamma) = \gamma t + \frac{c}{2} t^2 = t\left(\gamma + \frac{c}{2} t \right) \leqslant 0•$$

如果 $t \leqslant -\gamma/c$, 那么 $P_c(t, \gamma) = -\gamma^2/(2c) \leqslant 0$• 引理证毕•

3 局部最优性结果

本节通过两个定理, 给出约束问题(P) 的局部极小点与增广 Lagrange 函数 $F_c(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 的无约束局部极小点之间的关系•

定理 3.1 设 $(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 是问题(P) 的一个KKT 对, 并假设

(i) 严格互补松弛性条件在 $(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 成立;

(ii) $\boldsymbol{x}$ 是问题(P) 的满足二阶充分最优性条件的一个严格局部极小点•

那么, 存在 $c > 0$ 使得对所有的 $c \in [c, +\infty)$, $\boldsymbol{x}$ 是增广 Lagrange 函数 $F_c(•, \lambda)$ 的一个无约束严格局部极小点, 并且 Hessian 矩阵 $\nabla_x^2 F_c(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 正定•

证明 首先, 由引理 2.1 知, 对任意给定的 $c > 0$, 存在 $\varepsilon_c > 0$ 使得

$$F_c(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i \in I(\boldsymbol{x})} \left[\lambda_i g_i(\boldsymbol{x}) + \frac{c}{2} g_i^2(\boldsymbol{x}) \right], \qquad \boldsymbol{x} \in N_{\varepsilon_c}(\boldsymbol{x})•$$

因此, 对 $\boldsymbol{x} \in N_{\varepsilon_c}(\boldsymbol{x})$ 有

$$\nabla_x F_c(\boldsymbol{x}, \lambda) = \nabla f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i \in I(\boldsymbol{x})} \lambda_i \nabla g_i(\boldsymbol{x}), \tag{4}$$

$$\nabla_x^2 F_c(\boldsymbol{x}, \lambda) = \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}, \lambda) + c \sum_{i \in I(\boldsymbol{x})} \nabla g_i(\boldsymbol{x}) \nabla g_i(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}• \tag{5}$$

因为 $(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 是问题(P) 的一个 KKT 对, 所以由(4) 式得 $\nabla_x F_c(\boldsymbol{x}, \lambda) = \boldsymbol{0}$, 这说明对任意 $c > 0$,

$\boldsymbol{x}$ 是 $F_c(\cdot, \lambda)$ 的一个平稳点•

由定理的条件(i) 和(ii) 可知, $\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L_c(\boldsymbol{x}, \lambda)\boldsymbol{d} > 0$ 对所有的 $\boldsymbol{d} \in C = \left\{\boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0}: \nabla g_i(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}, i \in I(\boldsymbol{x})\right\}$成立• 下面我们证明: 对充分大的 $c > 0$, $\nabla_x^2 F_c(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 是正定的• 用反证法, 假设不存在 $c > 0$ 使得对所有的 $c \in [c, +\infty)$, $\nabla_x^2 F_c(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 是正定的, 那么, 对每个正整数 k 存在 $c_k \geqslant k$ 和 $\boldsymbol{d}_k \in R^n$, 且 $\|\boldsymbol{d}_k\| = 1$, 使得

$$\boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 F_{c_k}(\boldsymbol{x}, \lambda)\boldsymbol{d}_k = \boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}, \lambda)\boldsymbol{d}_k + c_k \sum_{i \in I(\boldsymbol{x})} [\nabla g_i(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d}_k]^2 \leqslant 0 \tag{6}$$

因为对所有的 k 有 $\|\boldsymbol{d}_k\| = 1$, 所以, $\left\{\boldsymbol{d}_k\right\}$存在一个收敛子列• 设这一收敛子列的极限为 $\boldsymbol{d}$, 则 $\|\boldsymbol{d}\| = 1$• 对于这个收敛子列, 因为当 $k \to +\infty$时, 不等式(6) 左端的第一项趋于常数$\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}, \lambda)\boldsymbol{d}$, 所以, 要使(6) 式对所有的 k 成立, 必有 $\nabla g_i(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ 对每个 $i \in I(\boldsymbol{x})$ 成立• 因此$\boldsymbol{d} \in C$• 仍由(6) 式可知, $\boldsymbol{d}_k^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}, \lambda)\boldsymbol{d}_k \leqslant \boldsymbol{0}$ 对所有的 k 成立, 所以有 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}, \lambda)\boldsymbol{d} \leqslant 0$, 这与二阶充分最优性条件在$(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 成立的假设相矛盾• 因此, 存在 $c > 0$ 使得对所有的 $c \geqslant c$, $\nabla_x^2 F_c(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 是正定的, 从而可知, 当 $c \geqslant c$ 时$\boldsymbol{x}$ 是$F_c(\cdot, \lambda)$ 的一个无约束严格局部极小点• 定理证毕•

定理 3.2 设 $\boldsymbol{x} \in S$, 并假设 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)^{\mathrm{T}} \geqslant \boldsymbol{0}$ 使得对每个 $i \in I(\boldsymbol{x})$ 有 $\lambda_i > 0$, 而对每个 $i \in I \setminus I(\boldsymbol{x})$ 有 $\lambda_i = 0$• 考虑定义在 $\lambda = \lambda$ 的增广 Lagrange 函数 $F_c(\cdot, \lambda)$, 其中 $c > 0$• 那么,

(i) 如果 $\boldsymbol{x}$ 是 $F_c(\cdot, \lambda)$ 的一个稳定点, 则$(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 是问题(P) 的一个 KKT 对;

(ii) 如果 $\boldsymbol{x}$ 是 $F_c(\cdot, \lambda)$ 的一个无约束严格局部极小点, 并且 Hessian 矩阵$\nabla_x^2 F_c(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 正定, 则 $\boldsymbol{x}$ 是问题(P) 的一个严格局部极小点, 并且满足二阶充分最优性条件•

证明 按照和引理 2.1 相似的证明过程可知, 对任意给定的 $c > 0$, 存在 $\varepsilon_c > 0$ 使得

$$F_c(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i \in I(\boldsymbol{x})} \left[\lambda_i g_i(\boldsymbol{x}) + \frac{c}{2} g_i^2(\boldsymbol{x})\right], \qquad \boldsymbol{x} \in N_{\varepsilon_c}(\boldsymbol{x})\text{•}$$

因此(4) 式和(5) 式成立• 于是由(4) 式和定理的假设易知结论(i) 成立•

下面我们证明(ii) 也成立• 事实上, 如果 $\boldsymbol{x}$ 是$F_c(\cdot, \lambda)$ 的一个无约束严格局部极小点, 则由(i) 知, $(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 是问题(P) 的一个KKT 对• 因为 $\nabla_x^2 F_c(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 是正定的, 所以由(5) 式可得, 对任意的 $\boldsymbol{d} \in C = \left\{\boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0}: \nabla g_i(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}, i \in I(\boldsymbol{x})\right\}$, 有

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 L(\boldsymbol{x}, \lambda)\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 F_c(\boldsymbol{x}, \lambda)\boldsymbol{d} - c \sum_{i \in I(\boldsymbol{x})} [\nabla g_i(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}]^2 =$$
$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}} \nabla_x^2 F_c(\boldsymbol{x}, \lambda)\boldsymbol{d} > 0\text{•}$$

因此, $\boldsymbol{x}$ 是问题(P) 的一个严格局部极小点, 且满足二阶充分最优性条件• 定理证毕•

4 全局最优性结果

本节考虑全局最优性•

定理 4.1 假设 $G(\mathrm{P})$ 是单点集, 而 $\boldsymbol{x}$ 是问题(P) 的唯一全局最优解, λ 是与$\boldsymbol{x}$ 相对应的 KKT 乘子向量, 并且假设定理 3.1 的条件(i) 和(ii) 均成立• 那么, 存在 $c^* > 0$ 使得对所有的 $c \in [c^*, +\infty)$, $\boldsymbol{x}$ 是增广 Lagrange 函数 $F_c(\cdot, \lambda)$ 在 X 上的唯一全局极小点•

证明 由定理 3.1 知, 存在 $c > 0$ 使得对任意的 $c \in [c, +\infty)$, $\boldsymbol{x}$ 是$F_c(\cdot, \lambda)$ 的一个无约束严格局部极小点• 因此存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$F_c(\boldsymbol{x},\ \lambda) > F_c(\boldsymbol{x},\ \lambda) \tag{7}$$

对所有的 $\boldsymbol{x} \in N_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \cap X$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}$ 成立•

下面我们用反证法证明定理的结论成立• 假设对任意的正整数 $k \geqslant c$, 存在 $c_k \geqslant k$ 和 $\boldsymbol{x}_k \in X$, $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{x}$, 使得

$$F_{c_k}(\boldsymbol{x}_k,\ \lambda) \leqslant F_{c_k}(\boldsymbol{x},\ \lambda)• \tag{8}$$

由引理2.1知, 对所有的 $c \in [c,\ +\infty)$ 和所有的 $k \geqslant c$, 均有

$$F_c(\boldsymbol{x},\ \lambda) = f(\boldsymbol{x}) = F_{c_k}(\boldsymbol{x},\ \lambda)•$$

因此, (8) 式即化为

$$f(\boldsymbol{x}_k) + \sum_{i \in I} P_{c_k}[g_i(\boldsymbol{x}_k),\ \lambda_i] \leqslant f(\boldsymbol{x}), \tag{9}$$

并且由(7) 式和(8) 式知, $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k \geqslant c} \subseteq X \setminus N_\varepsilon(\boldsymbol{x})$• 根据 $X \setminus N_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ 的紧性, $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k \geqslant c}$ 必存在子列收敛于 $X \setminus N_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ 中的点• 不失一般性, 假设 $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k \geqslant c}$ 收敛于 $\boldsymbol{x}^* \in X \setminus N_\varepsilon(\boldsymbol{x})$•

如果 $\boldsymbol{x}^* \in X \setminus [S \cup N_\varepsilon(\boldsymbol{x})]$, 那么存在某个 $i_0 \in I$ 使得 $g_{i_0}(\boldsymbol{x}^*) > 0$• 由 $g_{i_0}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}^*$ 处的连续性和 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}^*$ 可知, 当 $k \to +\infty$ 时, $g_{i_0}(\boldsymbol{x}_k) \to g_{i_0}(\boldsymbol{x}^*)$• 因此, 存在某个正整数 $K \geqslant c$ 使得对所有的 $k \geqslant K$, $g_{i_0}(\boldsymbol{x}_k) > 0 \geqslant -\lambda_{i_0}/c_k$• 从而由 $P_c(t,\ \gamma)$ 的表达式和引理 2.2 的结论(ⅰ)可得

$$f(\boldsymbol{x}_k) + \sum_{i \in I} P_{c_k}[g_i(\boldsymbol{x}_k),\ \lambda_i] = f(\boldsymbol{x}_k) + \sum_{i \in I,\ i \neq i_0} P_{c_k}[g_i(\boldsymbol{x}_k),\ \lambda_i] + P_{c_k}[g_{i_0}(\boldsymbol{x}_k),\ \lambda_{i_0}] \geqslant$$

$$f(\boldsymbol{x}_k) + \sum_{i \in I,\ i \neq i_0}\left(-\frac{\lambda_i^2}{2c_k}\right) + \left[\lambda_{i_0} g_{i_0}(\boldsymbol{x}_k) + \frac{c_k}{2} g_{i_0}^2(\boldsymbol{x}_k)\right] \to +\infty, \qquad 当\ k \to +\infty•$$

在(9)式中令 $k \to +\infty$, 得到 $+\infty \leqslant f(\boldsymbol{x})$, 这是一个矛盾•

如果 $\boldsymbol{x}^* \in S \setminus N_\varepsilon(\boldsymbol{x})$, 则由(9)式和引理 2.2(ⅰ)得

$$f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x}_k) + \sum_{i \in I} P_{c_k}[g_i(\boldsymbol{x}_k),\ \lambda_i] \geqslant f(\boldsymbol{x}_k) + \sum_{i \in I}\left(-\frac{\lambda_i^2}{2c_k}\right)•$$

在上式中令 $k \to +\infty$, 得到 $f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{x}^*)$, 这与 $\boldsymbol{x}$ 是问题(P)的唯一全局最优解相矛盾• 定理证毕•

定理 4.2　假设 $G(\mathrm{P})$ 是单点集, 并且 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{int}\ S$ 是问题(P) 的唯一全局最优解, λ 是与 $\boldsymbol{x}$ 相对应的KKT 乘子向量• 那么, 存在 $c_0 > 0$ 使得对所有的 $c \in [c_0,\ +\infty)$, $F_c(\cdot,\ \lambda)$ 在 X 上的任一全局极小点均属于原约束问题(P) 的可行集 S•

证明　因为 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{int}\ S$ 是问题(P) 的唯一全局最优解, 而 λ 是与 $\boldsymbol{x}$ 相对应的KKT 乘子向量, 所以 $g_i(\boldsymbol{x}) < 0$ 和 $\lambda_i = 0$ 对每个 $i \in I$ 成立, 并且 $f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x})$ 对所有的 $\boldsymbol{x} \in S$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}$ 成立•

下面我们采用反证法• 假设对任意正整数 k, 存在 $c_k \geqslant k$ 和 $F_{c_k}(\cdot,\ \lambda)$ 在 X 上的一个全局极小点 $\boldsymbol{x}_{c_k}$ 使得

$$\boldsymbol{x}_{c_k} \in X \setminus S \subseteq X \setminus \mathrm{int}\ S•$$

因为 $X \setminus \mathrm{int}\ S$ 是 R^n 中的紧集, 所以 $\{\boldsymbol{x}_{c_k}\}$ 存在子列收敛于 $X \setminus \mathrm{int}\ S$ 中的点• 不妨设 $\boldsymbol{x}_{c_k} \to \boldsymbol{x}^* \in X / \mathrm{int}\ S$• 对于每个 k, 由于 $\boldsymbol{x}_{c_k}$ 是 $F_{c_k}(\cdot,\ \lambda)$ 在 X 上的一个全局极小点, 所以

$$F_{c_k}(\boldsymbol{x}_{c_k},\ \lambda) > F_{c_k}(\boldsymbol{x},\ \lambda)$$

对任意的 $\boldsymbol{x} \in X$ 成立• 因为 $g_i(\boldsymbol{x}) < 0 = -\lambda_i/c_k$ 对每个 $i \in I$ 成立, 所以

$$F_{c_k}(\boldsymbol{x},\ \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i \in I} P_{c_k}[g_i(\boldsymbol{x}_k),\ \lambda_i] = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i \in I}\left(-\frac{\lambda_i^2}{2c_k}\right) = f(\boldsymbol{x}),$$

于是,在上面的不等式中取 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ 可得

$$f(\boldsymbol{x}_{c_k}) + \sum_{i \in I} P_{c_k}[g_i(\boldsymbol{x}_{c_k}), \lambda_i] \leqslant f(\boldsymbol{x}) \cdot \tag{10}$$

现在我们分两种情况进行讨论:

(ⅰ) 如果 $\boldsymbol{x}^* \in X \setminus S$,则存在某个 $i_0 \in I$ 使得 $g_{i_0}(\boldsymbol{x}^*) > 0$• 由于当 $k \to +\infty$ 时 $\boldsymbol{x}_{c_k} \to \boldsymbol{x}^*$,所以存在正整数 K 使得 $g_{i_0}(\boldsymbol{x}_{c_k}) > 0 = -\lambda_{i_0}/c_k$ 对所有的 $k \geqslant K$ 成立• 于是由 $P_c(t, \gamma)$ 的定义式和引理 2.2(ⅰ)可得

$$f(\boldsymbol{x}_{c_k}) + \sum_{i \in I} P_{c_k}[g_i(\boldsymbol{x}_{c_k}), \lambda_i] = f(\boldsymbol{x}_{c_k}) + \sum_{i \in I, i \neq i_0} P_{c_k}[g_i(\boldsymbol{x}_{c_k}), \lambda_i] + P_{c_k}[g_{i_0}(\boldsymbol{x}_{c_k}), \lambda_{i_0}] \geqslant$$

$$f(\boldsymbol{x}_{c_k}) + \sum_{i \in I, i \neq i_0} \left(-\frac{\lambda_i^2}{2c_k} \right) + \left[\lambda_{i_0} g_{i_0}(\boldsymbol{x}_{c_k}) + \frac{c_k}{2} g_{i_0}^2(\boldsymbol{x}_{c_k}) \right] \to +\infty, \qquad 当 k \to +\infty \cdot$$

在(10)式中令 $k \to +\infty$,得到 $+\infty \leqslant f(\boldsymbol{x})$,这是一个矛盾•

(ⅱ) 如果 $\boldsymbol{x}^* \in \partial S$,则由(10)式和引理 2.2(ⅰ)得

$$f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{x}_{c_k}) + \sum_{i \in I} \left(-\frac{\lambda_i^2}{2c_k} \right) = f(\boldsymbol{x}_{c_k}),$$

令 $k \to +\infty$,得到 $f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{x}^*)$,这与 $\boldsymbol{x} \in \operatorname{int} S$ 是问题(P)的唯一全局极小点相矛盾• 定理证毕•

定理 4.3 假设 $\boldsymbol{x} \in S \cap \operatorname{int} X$ 是 $F_c(\cdot, \lambda)$ 在 X 上的一个全局极小点,这里 $c > 0$,且 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^{\mathrm{T}} \geqslant \mathbf{0}$ 使得对每个 $i \in I(\boldsymbol{x})$ 有 $\lambda_i > 0$,而对每个 $i \in I \setminus I(\boldsymbol{x})$ 有 $\lambda_i = 0$• 那么,$\boldsymbol{x}$ 是问题(P)的一个全局最优解,并且 $(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 是问题(P)的一个 KKT 对•

证明 首先,由 $\boldsymbol{x} \in \operatorname{int} X$ 是 $F_c(\cdot, \lambda)$ 在 X 上的一个全局极小点可知,$\boldsymbol{x}$ 也是 $F_c(\cdot, \lambda)$ 的一个无约束局部极小点,所以 $\boldsymbol{x}$ 是 $F_c(\cdot, \lambda)$ 的一个稳定点,于是由定理 3.2(ⅰ)得知,$(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 是问题(P)的一个 KKT 对•

下面我们证明 $\boldsymbol{x}$ 是问题(P)的一个全局最优解• 仍用反证法,并假设存在 $\boldsymbol{x}^* \in S$,$\boldsymbol{x}^* \neq \boldsymbol{x}$,使得 $f(\boldsymbol{x}^*) < f(\boldsymbol{x})$• $\boldsymbol{x}^* \in S$ 蕴涵 $g_i(\boldsymbol{x}^*) \leqslant 0$ 对所有的 $i \in I$ 成立• 由引理 2.2(ⅱ),并注意到 $F_c(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x})$,我们有

$$F_c(\boldsymbol{x}^*, \lambda) = f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i \in I} P_{c_k}[g_i(\boldsymbol{x}^*), \lambda_i] \leqslant f(\boldsymbol{x}^*) < f(\boldsymbol{x}) = F_c(\boldsymbol{x}, \lambda),$$

这与 $\boldsymbol{x}$ 是 $F_c(\cdot, \lambda)$ 在 X 上的全局极小点相矛盾• 定理证毕•

[参 考 文 献]

[1] Bertsekas D P. Constrained Optimization and Lagrange Multipliers Methods[M]. New York: Academic Press, 1982.

[2] Burke J. An exact penalization viewpoint of constrained optimization[J]. SIAM J Control Optim, 1991, **29**(4): 968—998.

[3] Di Pillo G. Exact penalty methods[A]. In: Spedicato E Ed. Algorithms for Continuous Optimization: the State of the Art[C]. Boston: Kluwer Academic Press, 1994, 209—253.

[4] Di Pillo G, Grippo L. Exact penalty functions in constrained optimization[J]. SIAM J Control Optim, 1989, **27**(6): 1333—1360.

[5] Yevtushenko Y G, Zhadan V G. Exact auxiliary functions in optimization problems[J]. USSR Comput Maths and Math Phys, 1990, **30**(1): 31—42.

[6] Contaldi G, Di Pillo G, Lucidi S. A continuously differentiable exact penalty function for nonlinear

programming problems with unbounded feasible set[J]. Oper Res Lett, 1993, **14**(3): 153—161.

[7] Di Pillo G, Grippo L. A continuously differentiable exact penalty function for nonlinear programming problems with inequality constraints[J]. SIAM J Control Optim, 1985, **23**(1): 72—84.

[8] Di Pillo G, Grippo L. On the exactness of a class of nondifferentiable penalty functions[J]. J Optim Theory Appl, 1988, **57**(3): 399—410.

[9] Lucidi S. New results on a continuously differentiable exact penalty function[J]. SIAM J Optim, 1992, **2**(4): 558—574.

[10] Di Pillo G, Grippo L. A new augmented Lagrangian function for inequality constraints in nonlinear programming problems[J]. J Optim Theory Appl, 1982, **36**(4): 495—519.

[11] Di Pillo G, Grippo L. A new class of augmented Lagrangians in nonlinear programming[J]. SIAM J Control Optim, 1979, **17**(5): 618—628.

[12] Di Pillo G, Lucidi S. An augmented Lagrangian function with improved exactness properties[J]. SIAM J Optim, 2001, **12**(2): 376—406.

[13] Di Pillo G, Lucidi S. On exact augmented Lagrangian functions in nonlinear programming[A]. In: Di Pillo G, Giannessi F Eds. Nonlinear Optimization and Applications[C]. New York: Plenum Press, 1996, 85—100.

[14] Lucidi S. New results on a class of exact augmented Lagrangians[J]. J Optim Theory Appl, 1988, **58**(2): 259—282.

Exact Augmented Lagrangian Function for Nonlinear Programming Problems With Inequality Constraints

DU Xue_wu[1, 2], ZHANG Lian_sheng[1], SHANG You_lin[1], LI Ming_ming[1]

(1. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, P.R.China;

2. School of Mathematics and Informatics, Henan Polytechnic University, Jiaozuo, Henan 454010, P.R.China)

Abstract: An exact augmented Lagrangian function for the nonlinear nonconvex programming problems with inequality constraints was discussed. Under suitable hypotheses, the relationship was established between the local unconstrained minimizers of the augmented Lagrangian function on the space of problem variables and the local minimizers of the original constrained problem. Furthermore, under some assumptions, the relationship was also established between the global solutions of the augmented Lagrangian function on some compact subset of the space of problem variables and the global solutions of the constrained problem. Therefore, from the theoretical point of view, a solution of the inequality constrained problem and the corresponding values of the Lagrange multipliers can be found by the well known method of multipliers which resort to the unconstrained minimization of the augmented Lagrangian function presented.

Key words: local minimizer; global minimizer; nonlinear programming; exact penalty function; augmented Lagrangian function