

文章编号: 1000_0887(2004) 05_0455_12

时滞速度反馈对强迫自持系统 动力学行为的影响*

徐 鉴¹, 陈予恕²

(1. 教育部固体力学重点实验室, 同济大学 力学系, 上海 200092;
2. 天津大学 力学系, 天津 300072)

(本刊编委陈予恕来稿)

摘要: 研究强迫自持振动系统因时滞反馈产生的主共振解及其分岔。通过对强迫非自治系统的时滞反馈控制, 得到所要研究的数学模型。讨论对应的线性化系统使平凡平衡态失稳出现周期解的稳定性临界条件。特别关注主共振及分岔。结果表明, 稳定的主共振解随着时滞的变化周期性地出现在系统中。同时, 也给出了不稳定的主共振关于时滞变化的区域, 在理论方面给出了系统出现概周期运动的时滞区域。数据模拟证实了理论结果。

关键词: 非线性动力学; 时滞微分方程; 分岔
中图分类号: O322; O193 文献标识码: A

引 言

具有闭环反馈控制和外激励的平面非线性系统可以表示成

$$\dot{u} = Cu + F(u) + P(t) + U(u), \quad (1)$$

其中 $u = [x, y]^T \in R^2$, $C \in R^{2 \times 2}$, $F(u)$ 是关于 u 的非线性函数, $P(t)$ 是周期激励, $U(u)$ 是控制变量。若取 $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \alpha_1 \end{bmatrix}$, $F(u) = [0, -\alpha_3 y^3]^T$, $P(t) = [0, k \cos(\Omega t)]^T$, $U(u) = [0, A(y\tau - y) + B(y\tau - y)^3]^T$, 则系统(1)就是时滞速度反馈控制系统, 其中 $\alpha_1 \alpha_3 > 0$, $k > 0$, $y\tau = y(t - \tau)$, τ 是时滞量。如果 $A, B < 0$, 称为负反馈, 而 $A, B > 0$ 是正反馈。当 $\tau = 0$ 时, 系统(1)就是强迫自持(self_sustained)振动系统^[1,2]。

尽管系统(1)是通过增加时滞速度反馈控制得到的, 但是许多学者已经涉及过类似于方程(1)的系统($k = 0$), 这样的时滞微分方程可以描述许多学科领域的动力学现象, 如物理系统^[3], 生物系统^[4], 机械系统^[5]以及其他的自然现象^[6,7,8,9]。时滞有时是无法避免的, 主要原因在于有限的信号传输速度、系统反应的滞后和系统内部子系统之间连接的处理时间。因此, 有必要研究时滞对现实系统动力学行为的影响机理。最近, Reddy 等^[10]考察了时滞线性或非

* 收稿日期: 2002_08_25; 修订日期: 2003_12_06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072039)

作者简介: 徐鉴(1961—), 男, 浙江人, 教授, 博士生导师, 博士(联系人, Tel: + 86_21_65985364; Fax: + 86_21_65981138; E_mail: xujian@mail.tongji.edu.cn).

线性反馈对 Stuart_Landau 系统的影响, 这个系统是系统(1)当 $k = 0$ 时的平均系统. Readdy 的研究结果表明, 在反馈控制作用下, 系统出现丰富的动力学现象, 包括各种类型的分岔和混沌. Combell 也有过类似的研究^[11,12,13], 只是她的研究局限于讨论极限极限环(周期解). 本文作者讨论了退化的 Li nard 时滞微分方程平凡解的临界稳定性条件和 Hopf 分岔^[14]. 然而, 很少有学者研究具有外激励的时滞系统, 即系统(1)中的 $k \neq 0$.

受 Cuomo^[15], Pyragas^[16] 和 Gregory^[17] 研究工作的启发, 基于由方程(1)所描述的系统, 本文的目的是发展一种解析的方法, 研究时滞量 τ 导致系统出现共振、周期解分岔、甚至概周期运动的机理. 期望时滞量可以作为控制开关, 即可消除系统出现的有害动力学行为, 又可使系统产生可利用的动力学行为.

1 线性化系统稳定性分析

在本节中, 我们首先分析(1)的线性化系统(无激励)平凡平衡态的稳定性条件, 主要是给出平凡平衡态失去稳定性的临界边界. 这将有助于后续的研究, 也是我们进一步研究的基础.

系统(1)的线性化系统可以表示成

$$\dot{x} + \omega_0^2 x - \alpha_1 x - A(x - x) = 0 \quad (2)$$

方程(2)的特征方程是

$$\lambda^2 + (A - \alpha_1) \lambda + \omega_0^2 - A \lambda \exp(-\lambda \tau) = 0, \quad (3)$$

其中, ω_0 是系统(1)当 $\tau = 0$ 时的线性固有频率且 $\omega_0 > 0$. 显然, $\lambda = 0$ 不是特征方程(3)的根. 为了找到临界稳定边界, 设 $\lambda = \alpha + i\beta$ 是特征方程(3)的根, 其中 α 和 β 是实数, $i = \sqrt{-1}$. 由于特征复根总是以共轭对出现的, 不失一般性, 设 $\beta > 0$. 将 λ 代入方程(3)并且比较方程两边的实部和虚部得到

$$\begin{cases} A\alpha + \alpha^2 - \alpha\alpha_1 - \beta^2 + \omega_0^2 - A \exp[-\alpha\tau] [\alpha \cos(\beta\tau) + \beta \sin(\beta\tau)] = 0, \\ A\beta + 2\alpha\beta - \alpha_1\beta - A \exp[-\alpha\tau] [\beta \cos(\beta\tau) - \alpha \sin(\beta\tau)] = 0 \end{cases} \quad (4)$$

在方程(4)中令 $\alpha = 0$, 则临界的稳定边界满足

$$\omega_0^2 - \beta^2 = A\beta \sin(\beta\tau), \quad A\beta - \alpha_1\beta = A\beta \cos(\beta\tau). \quad (5)$$

消去方程(5)中的 τ 得到

$$\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^4 - \left[2 + \left(\frac{A}{\omega_0}\right)\left(\frac{\alpha_1}{\omega_0}\right) - \left(\frac{\alpha_1}{\omega_0}\right)^2\right] \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2 + 1 = 0 \quad (6)$$

设 β_+ 和 β_- 是方程(6)的正根, 则从方程(6)可以得到

$$\left(\frac{\beta_{\pm}}{\omega_0}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{A}{\omega_0} - \frac{\alpha_1}{\omega_0}\right) \frac{\alpha_1}{\omega_0} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\omega_0} \left(2\frac{A}{\omega_0} - \frac{\alpha_1}{\omega_0}\right)} \sqrt{4 + \frac{\alpha_1}{\omega_0} \left(2\frac{A}{\omega_0} - \frac{\alpha_1}{\omega_0}\right)}. \quad (7)$$

从方程(7)中可以看出, 只有当 $\alpha_1(2A - \alpha_1) \geq 0$, 才能保证 β_+ 和 β_- 是正的实数. 这个条件实际上就是 α_1 和 A 所满足的稳定性条件, 其临界值记为 α_{1c} 和 A_c .

注意到 $\omega_0^2 - \beta_+^2 < 0$ 和 $\omega_0^2 - \beta_-^2 > 0$, 可以得到时滞 τ 对应于 β_+ 和 β_- 的稳定临界条件

$$\tau_c [j, A, \alpha_1, \omega_0] = \begin{cases} \frac{1}{\beta_+} \left[2j\pi + \arccos \left(1 - \frac{\alpha_1}{A} \right) \right] & (\text{当 } A < 0), \\ \frac{1}{\beta_+} \left[(2j + 2)\pi - \arccos \left(1 - \frac{\alpha_1}{A} \right) \right] & (\text{当 } A > 0), \end{cases} \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (8)$$

和
$$\tau [j, A, \alpha_1, \omega_0] = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \left[(2j + 2)\pi - \arccos \left\{ 1 - \frac{\alpha_1}{A} \right\} \right] & (\text{当 } A < 0), \\ \frac{1}{\beta} \left[2j\pi + \arccos \left\{ 1 - \frac{\alpha_1}{A} \right\} \right] & (\text{当 } A > 0), \end{cases} \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (9)$$

下面的定理就是本节的主要结果

定理 当 α_1, A 和 τ 满足下列条件之一, 系统(2)的平凡平衡态是渐近稳定的

- (i) $\alpha_1 < \min\{0, 2A\}, \tau > 0$;
- (ii) $A < \alpha_1/2 < 0, 0 < \tau < \tau_- [0, A, \alpha_1, \omega_0],$
 $\tau [j, A, \alpha_1, \omega_0] < \tau < \tau_+ [j + 1, A, \alpha_1, \omega_0];$
- (iii) $A > \alpha_1/2 > 0, \tau_- [j, A, \alpha_1, \omega_0] < \tau < \tau_+ [j + 1, A, \alpha_1, \omega_0],$

其中 $j = 0, 1, 2, \dots, \tau_- [j, A, \alpha_1, \omega_0]; \tau_+ [j, A, \alpha_1, \omega_0]$ 分别由方程(8)和(9)确定

应用 Hopf 分岔定理并注意到特征方程(3)是依赖于 A 和 τ 连续变化的, 就可以证明上述定理. 由于篇幅有限, 这里忽略证明过程.

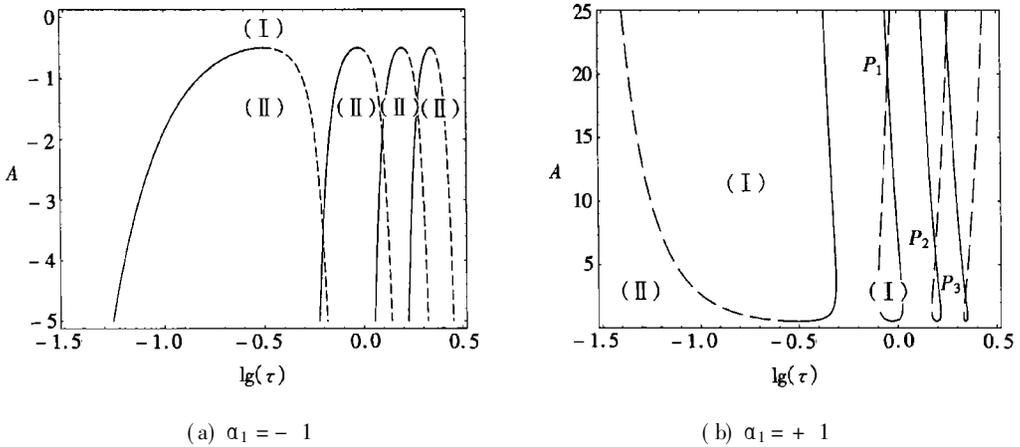


图 1 方程(2)平凡平衡态在平面 $\tau - A$ 上的临界稳定边界

图 1 直观地显示了定理的结论, 其中 $\omega_0 = 10$. 图 1(a) 和 1(b) 是分别表示 $\alpha_1 = -1$ 和 $\alpha_1 = 1$. 平凡平衡态的稳定区域记为 (I), 不稳定区域为 (II). 实线和虚线分别代表临界时滞量 τ_+ 和 τ_- .

从定理和图 1 中可以看到:

- 1) Hopf 分岔出现在临界稳定边界.
- 2) 正如表明在图 1(b) 中的点 P_1, P_2 和 P_3 , 随着 A 和 τ 的变化, 系统会出现由两对纯虚根引起的余维 2Hopf 分岔 (或双 Hopf 分岔).

对于双 Hopf 分岔, 我们将另文讨论.

2 主共振解及其分岔

从上节的分析中已经看到当参数穿过由方程(5)确定的临界稳定边界, 时滞量可以导致静平衡态失稳, 使系统产生 Hopf 分岔而出现周期振动, 振动频率记为 β_c . 于是, 当系统(1)的外激励频率 Ω , 接近 β_c 时, 系统(1)就会出现主共振. 本节将给出主共振解的近似解析表达式, 并且讨论其分岔.

2.1 中心流形约化

由于描述系统(1)的方程是时滞微分方程,其初值空间和解空间都是无限维的,因此,必须将方程(1)约化到中心流形上才能进行研究.我们希望的中心流形是在 $u = 0$ 处与由对应于特征值 $\pm i\beta_c$ 的特征向量张成的子空间相切.为此,设 $\alpha_1 = \alpha_{1c} + \mu_1 \varepsilon$, $A = A_c + \mu_2 \varepsilon$ 并且重新标度 $x \rightarrow \sqrt{\varepsilon}x$, $k \rightarrow \varepsilon^{3/2}k$ (因为这里研究的是主共振解),则方程(1)可以被重新写为

$$\begin{cases} i\partial_t u_1 = u_2, \\ i\partial_t u_2 = -\omega_1^2 u_1 + (\alpha_{1c} - A_c)u_2 + A_c u_{2\tau} + \varepsilon[(\mu_1 - \mu_2)u_2 + \mu_2 u_{2\tau}] + \\ \quad \varepsilon[k \cos \Omega t - \alpha_3 u_2^3 + B(u_{2\tau} - u_2)^3], \end{cases} \quad (10)$$

其中 $u_1 = x$, $u_{2\tau} = u_2(t - \tau)$.

系统(10)的初值空间 $C = C([- \tau, 0], R^2)$, 则对于任意的 $\phi \in C$, 定义范数 $\|\phi\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|$ 和 $u_i(\theta) = u_i(t + \theta)$, $-\tau \leq \theta \leq 0$. 应用文献[14]的方法和符号计算软件 Mathematica, 经过许多代数推导后得到中心流形上的动力学方程

$$v_t = \begin{bmatrix} 0 & \beta_c \\ -\beta_c & 0 \end{bmatrix} v + D\varepsilon v + \varepsilon N_\varepsilon(v), \quad (11)$$

其中 $v = (v_1, v_2)^T$ 是在 u_i 在中心流形上的投影的两维局部坐标.正如期望的那样,方程(11)中的 $O(1)$ 线性部分是 Jordan 标准型, $D\varepsilon$ 是线性项 $O(\varepsilon)$ 的系数,而 $N_\varepsilon(v)$ 代表非线性项,分别可以表示成

$$\begin{cases} D\varepsilon = \frac{2\beta_c}{(l^2 + m^2)} \begin{bmatrix} l\mu_2 \sin(\beta_c \tau) & l(\mu_1 - \mu_2) + l\mu_2 \cos(\beta_c \tau) \\ m\mu_2 \sin(\beta_c \tau) & m(\mu_1 - \mu_2) + m\mu_2 \cos(\beta_c \tau) \end{bmatrix}, \\ N_\varepsilon(v) = \frac{\sqrt{2}}{l^2 + m^2} (k \cos \Omega - 2\sqrt{2}\alpha_3 \beta_c^3 v^3 + \\ \quad 2\sqrt{2}\beta_c^3 [\sin(\beta_c \tau)v_1 + (\cos(\beta_c \tau) - 1)v_2]^3) \begin{Bmatrix} l \\ m \end{Bmatrix}, \end{cases} \quad (12)$$

其中 $l = \mu_1 A_c \sin(\beta_c \tau)$, $m = 2\beta_c + A_c [\sin(\beta_c \tau) + \tau \beta_c \cos(\beta_c \tau)]$.

2.2 主共振的近似解析解

$$\text{设 } \Omega = \beta_c + \sigma, \quad (13)$$

其中 σ 是调谐参数并且 $\sigma = O(1)$. 对方程(11)应用平均法,可以解析地得到系统(1)的主共振解:

$$x(t) = u_1(t) = u_{1t}(0) = \sqrt{2}v_1 + O(\varepsilon) = \sqrt{2}r \cos(\Omega t - \gamma) + O(\varepsilon). \quad (14)$$

表达式(14)中 r 和 γ 可以由 $r' = \gamma' = 0$ 确定,而

$$\begin{cases} r' = \frac{1}{2(l^2 + m^2)} \left\{ 2m\beta_c r (\mu_1 - \mu_2) - 3m\beta_c^3 r^3 (\alpha_3 + 3B) + \right. \\ \quad \sqrt{2}k[l \cos(\gamma) + m \sin(\gamma)] + 2mr\beta_c(6Br^2\beta_c^2 + \mu_2) \cos(\beta_c \tau) + \\ \quad \left. 2l\beta_c r(3B\beta_c^2 r^2 + \mu_2) \sin(\beta_c \tau) - 3Br^3\beta_c^3 [m \cos(2\beta_c \tau) + l \sin(2\beta_c \tau)] \right\}, \\ \gamma' = \sigma + \frac{1}{2(l^2 + m^2)r} \left\{ -2l\beta_c r (\mu_1 - \mu_2) + 3l\beta_c^3 r^3 (\alpha_3 + 3B) + \right. \\ \quad \sqrt{2}k[m \cos(\gamma) - l \sin(\gamma)] + 2lr\beta_c(6Br^2\beta_c^2 + \mu_2) \cos(\beta_c \tau) + \\ \quad \left. 2m\beta_c r(3B\beta_c^2 r^2 + \mu_2) \sin(\beta_c \tau) + 3B\beta_c^3 r^3 [l \cos(2\beta_c \tau) - m \sin(2\beta_c \tau)] \right\}, \end{cases} \quad (15)$$

其中 $r = r(t)$, $\gamma = \gamma(t) = \sigma t - \theta(t)$, $(\cdot)' = d(\cdot)/d(t)$.

主共振解(14)中的 Ω 和 γ 是常数, 这就意味着系统(11) 或(1) 的主共振响应与外激励同步。这与 $k = 0$ 时系统(1) 所表现的动力学行为有本质的区别, 因为当 $k = 0$ 时, 系统(1) 有多稳态的响应出现(参看文献[10, 5]), 而这种情形不会出现在 $k \neq 0$ 时的系统(1) 中。

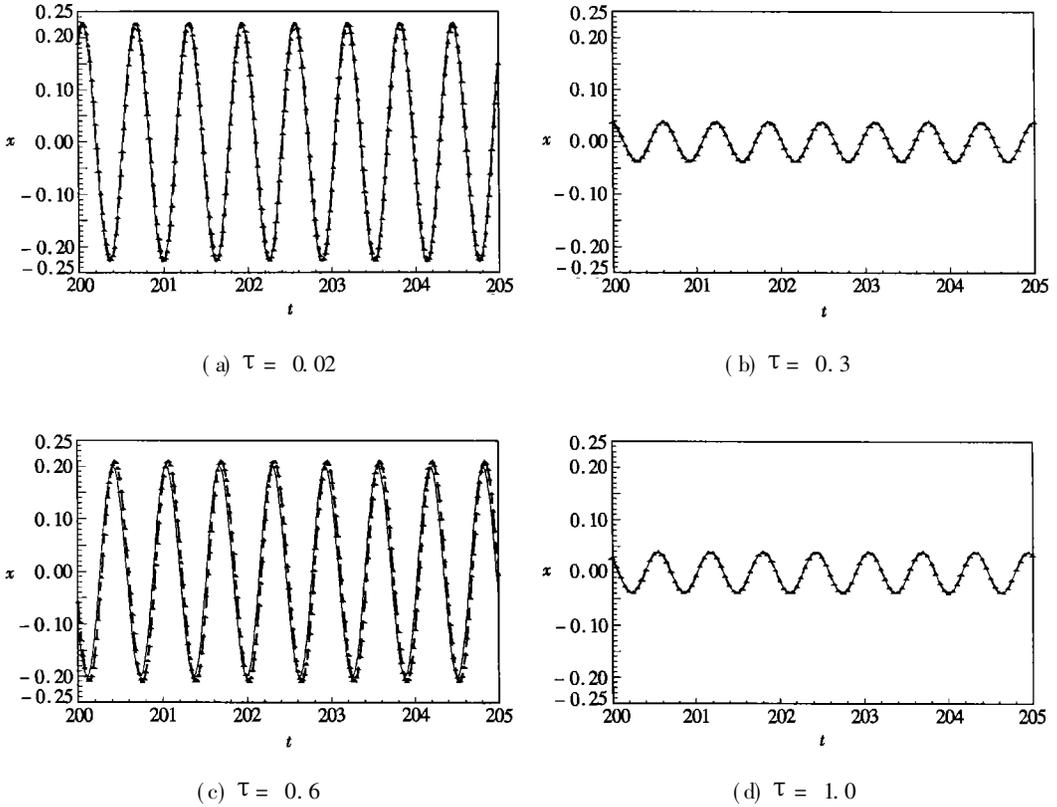


图2 对不同的时滞量 τ 方程(1) 的数值模拟解与解析解(14) 的比较

(其中实线代表解析解, 带三角标的虚线是数值解)

为了验证解析解(14) 的有效性和精确性, 对于不同的时滞量, 我们将近似解析解和数值解进行比较。比较的结果表示在图2 上, 其中数值结果是通过模拟原系统(1) 得到的, 除了将时滞量 τ 作为可变参数外, 其他的参数分别取 $\alpha_1 = 1.0, \alpha_3 = 1/3, A = 1.0, \omega_0 = 10.0, k = 0.5, B = 0.1$ 和 $\sigma = 0.0$ 。图2(a), (b), (c) 和(d) 分别对应的时滞量 τ 为 0.02, 0.3, 0.6 和 1.0, 从图2 中可以看到, 系统(1) 主共振可以表现为不同振幅(大或小) 的周期解, 同时图2 也清晰地显示了近似解析解与数值解吻合的很好, 特别是对于小振幅振动, 近似解析解与数值几乎一致。这意味着用本文的方法对主共振响应的理论分析可以达到很好的精度。因此, 我们可以进一步分析主共振解的分岔及其稳定性。

2.3 主共振周期解的分岔

由于本文关注系统(1) 的动力学行为的研究, 特别是时滞量对外激励导致的主共振周期解的影响, 故线性化系统的临界边界应位于有时滞和有时滞之间, 于是, 时滞的临界值可以被取为 $\tau_c = 0$ 。由方程(5) 可以得到其他参数的临界值分别为 $\alpha_{1c} = A_c = 0$ 以及 $l = 0, m = 2\beta_c$ 。

在方程(15) 中, 令 $r' = \dot{\gamma} = 0$ 并且消去 γ 可以得到包含参数 $\sigma, \mu_1, \mu_2, \tau$ 和 B 的分岔方程或频率响应方程

$$g_{st} = 0, \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned}
 g_{st} = & -2k^2 + 180B^2r^6\beta_c^6 + 54Br^6\alpha_3\beta_c^6 + 9r^6\alpha_3^2\beta_c^6 - 36Br^4\beta_c^4\mu_1 - \\
 & 12r^4\alpha_3\beta_c^4\mu_1 + 4r^2\beta_c^2\mu_1^2 + 72Br^4\beta_c^4\mu_2 + 12r^4\alpha_3\beta_c^4\mu_2 - \\
 & 8r^2\beta_c^2\mu_1\mu_2 + 8r^2\beta_c^2\mu_2^2 + 36Blr^4\beta_c^3\sigma + 12lr^4\alpha_3\beta_c^3\sigma - \\
 & 8lr^2\beta_c\mu_1\sigma + 8lr^2\beta_c\mu_2\sigma + 4l^2r^2\sigma^2 + 4m^2r^2\sigma^2 - \\
 & 2r^2\beta_c[135B^2r^4\beta_c^5 + 2\mu_2(3r^2\alpha_3\beta_c^3 - 2\beta_c\mu_1 + 2\beta_c\mu_2 + 2l\sigma) + \\
 & 12Br^2\beta_c^2(3r^2\alpha_3\beta_c^3 - 2\beta_c\mu_1 + 4\beta_c\mu_2 + 2l\sigma)] \cos(\beta_c\tau) + \\
 & 6Br^4\beta_c^3(18Br^2\beta_c^3 + 3r^2\alpha_3\beta_c^3 - 2\beta_c\mu_1 + 4\beta_c\mu_2 + 2l\sigma) \cos(2\beta_c\tau) - \\
 & 18B^2r^6\beta_c^6 \cos(3\beta_c\tau) + 24Bmr^4\beta_c^3\sigma \sin(\beta_c\tau) + \\
 & 8mr^2\beta_c\mu_2\sigma \sin(\beta_c\tau) - 12Bmr^2\beta_c^3\sigma \sin(2\beta_c\tau). \quad (17)
 \end{aligned}$$

当 $\tau = 0$, 方程(16)变成

$$-2k^2 + 4r^2(\mu_1^2 + 4\sigma^2)\omega_0^2 - 12r^4\alpha_3\mu_1\omega_0^4 + 9r^6\alpha_3^2\omega_0^6 = 0, \quad (18)$$

与 Nayfeh 和 Mook^[18]得到的结果完全一致。

由方程(14)~(17)可以看出,代数方程(16)的非零根是方程(15)的非零不动点,也是系统(1)主共振周期解的振幅。因此,研究系统(1)的主共振周期解的分岔等价于研究方程(15)的非零不动点分岔。当方程(16)和

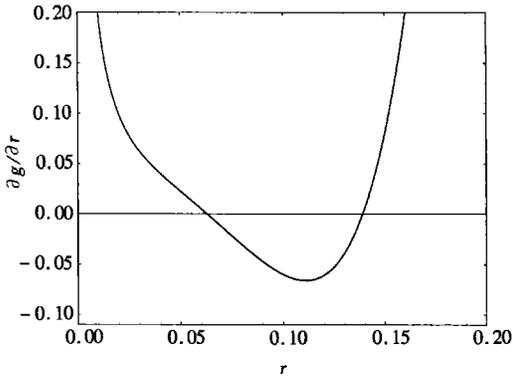
$$\partial g_{st}/\partial r = 0 \quad (19)$$

至少有一个实根,则方程(15)存在着非双曲不动点,其中 g_{st} 和 $\partial g_{st}/\partial r$ 是 σ 和 r 的函数又包含许多参数。应用方程(16)就可以从方程(19)中消除 σ 。

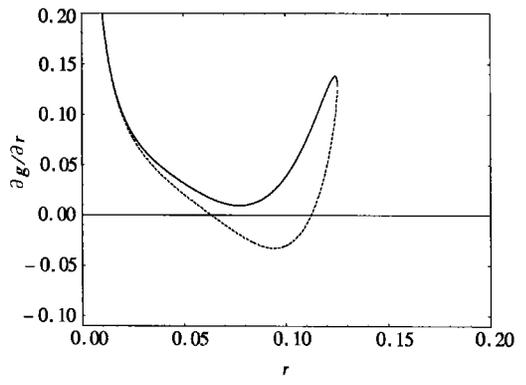
图3表明了中 $\partial g_{st}/\partial r$ 和 r 的关系,其中 $k = 1/2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = 1/3$, $\omega_0 = 10.0$, $A = 1$, $B = 0.1$, 并且 σ 由方程(16)确定。图4显示了频率响应曲线,其中的时滞量取值与图3相对应:实线、虚线和点化线在图4(a)中分别对应 $\tau = 0$ (实线), 0.079 (虚线)和 0.157 (点划线);而在图4(b)中对应 $\tau = 0.471$ (实线), 0.549 (虚线)和 0.628 (点划线)。

从图3(a)和图3(b)中可以看到对于小时滞量,即 $\tau = 0$ 和 $\tau = 0.079$, 有两个非双曲非零不动点。因此,当系统有三个稳态周期解时,其中的两个是不稳定的。可以证明(参看下节),其中的那个具有最大振幅的周期解是稳定的,这一点很容易被理解。这是因为系统存在大的振幅的激励,系统的动力学行为只能与这个大振幅的周期激励同步。于是,可以说明小的时滞量对系统的动力学行为没有影响。换句话说,对于小时滞量的反馈,外激励决定着系统的动力学行为。当 τ 进一步增加到 0.157 和 0.471 时,正如图3(c)和(d)所示,曲线 $\partial g_{st}/\partial r$ 与 r -轴的交点消失,故没有非双曲不动点,图4所对应的频率响应曲线表明只有一个稳定的非零不动点,从而揭示了这时的时滞量对系统的动力学行为有本质的影响。另外,还可以断定在 0.079 和 0.157 之间存在着一个 τ 值使得曲线 $\partial g_{st}/\partial r$ 与 r -轴相切,预示着非零不动点或周期解的树枝型分岔出现(因为系统具有对称性),即不动点的数目开始由三个变成一个。对于更大的时滞,图3(e)和(f)表明两个非双曲不动点重新出现。然而,值得注意的是这时对应的频率响应曲线拓扑曲线结构完全不同于小时滞量情形(参看图4)。

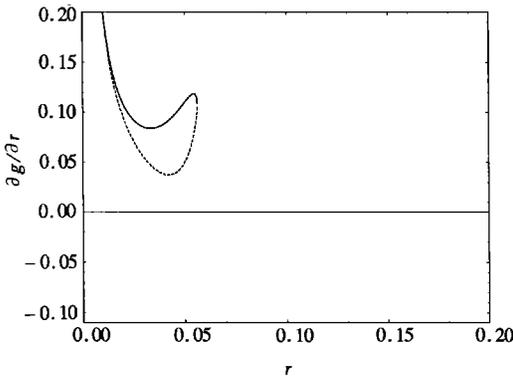
这些现象说明:理论结果可以被用来预测非平凡分岔点的数目,也决定了频率响应的拓扑结构,说明时滞量作为参数不仅对非零不动点或者周期解的个数有重大影响,而且对频率响应曲线的拓扑结构有重要的作用,同时也说明时滞对分岔的存在性有着重要作用。



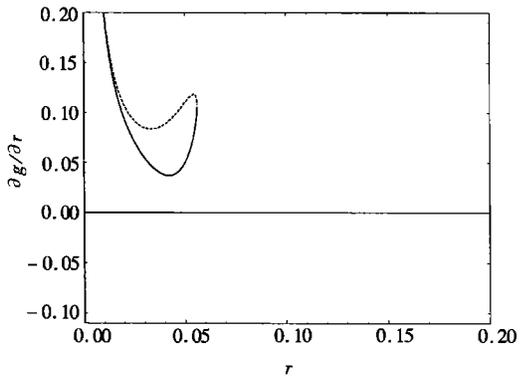
(a) $\tau = 0$



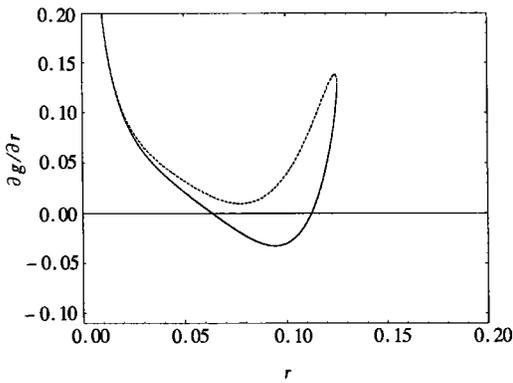
(b) $\tau = 0.079$



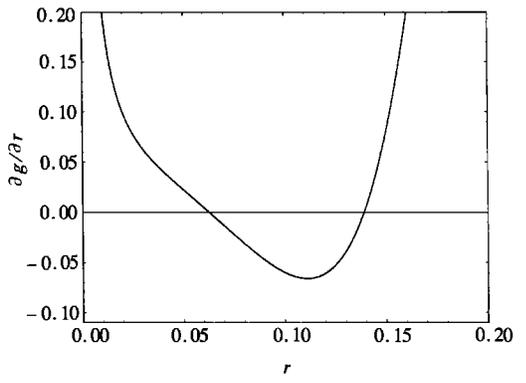
(c) $\tau = 0.157$



(d) $\tau = 0.471$



(e) $\tau = 0.549$



(f) $\tau = 0.628$

图3 随时滞变化的非双曲不动点分布

2.4 主共振解的稳定性分析

为了确定主共振周期解的稳定性, 假设在非零不动点邻域内的扰动状态可以表达为:

$$r = r_0 + (\Delta r)_0 \exp(\varepsilon \Lambda t), \quad y = y_0 + (\Delta y)_0 \exp(\varepsilon \Lambda t), \quad (20)$$

其中 r_0 和 y_0 是方程(15)的非零不动点. 将方程(20)代入方程(15)并只保留关于 $(\Delta r)_0$ 和 $(\Delta y)_0$ 的线性项, 可以得到

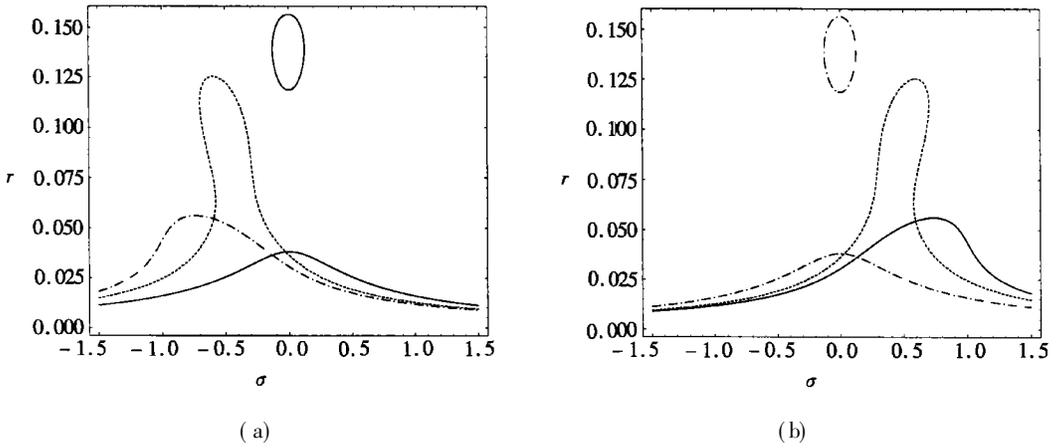


图 4 对应于图 3 的频率响应曲线

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{2} \mu_1 - \frac{1}{2} \mu_2 (1 - \cos \beta_c \tau) - \frac{9}{4} \alpha_3 \beta_c^2 r_0^2 - \right. \\ \left. 18 B r_0^2 \beta_c^2 \sin \left(\frac{\beta_c \tau}{2} \right)^4 - \Lambda \right] (\Delta r)_0 + \frac{k}{2\sqrt{2} \beta_c} \cos(\gamma_0) (\Delta \gamma)_0 = 0, \\ \left[3 B \beta_c^2 r_0 \sin(\beta_c \tau) (1 - \cos(\beta_c \tau)) - \frac{k}{2\sqrt{2} \beta_c r_0^2} \cos(\gamma_0) \right] (\Delta r)_0 - \\ \left[\frac{k}{2\sqrt{2} \beta_c r_0} \sin(\gamma_0) + \Lambda \right] (\Delta \gamma)_0 = 0 \end{cases} \quad (21)$$

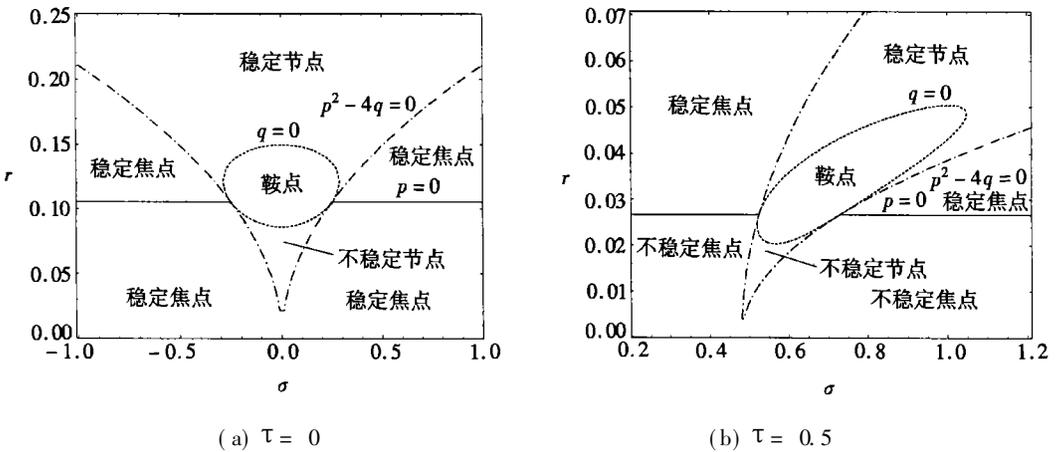


图 5 主共振周期解的稳定性区域分布

在方程(15)中令 $r'_0 = \dot{\gamma}_0 = 0$ 可以消除方程(21)中 $\cos \gamma_0$ 和 $\sin \gamma_0$, 则方程(21)有非零解的充要条件是它的系数行列式为零, 即

$$\Lambda^2 + p \Lambda + q = 0, \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} p = & \mu_1 - \mu_2 + \mu_2 \cos(\beta_c \tau) - 3 \beta_c r^2 [3B + \alpha_3 - 4B \cos(\beta_c \tau) + B \cos(2\beta_c \tau)], \\ q = & 0.25(\mu_1^2 - 2\mu_1 \mu_2 + 2\mu_2^2) + \sigma^2 + 0.5(\mu_1 - \mu_2) \mu_2 \cos(\beta_c \tau) + \\ & 1.5 \beta_c^2 r^2 [-3B \mu_1 - \alpha_3 \mu_1 + 6B \mu_2 + \alpha_3 \mu_2 + 4B \mu_1 \cos(\beta_c \tau) - \\ & 8B \mu_2 \cos(\beta_c \tau) - \alpha_3 \mu_2 \cos(\beta_c \tau) - B \mu_1 \cos(2\beta_c \tau) + 2B \mu_2 \cos(2\beta_c \tau)] + \end{aligned}$$

$$1.6875\beta_c^4 r^4 [20B^2 + 6B\alpha_3 + \alpha_3^2 - 30B^2 \cos(\beta_c \tau) - 8B\alpha_3 \cos(\beta_c \tau) + 12B^2 \cos(2\beta_c \tau) + 2B\alpha_3 \cos(2\beta_c \tau) - 2B^2 \cos(3\beta_c \tau)] + \alpha \left\{ \mu_2 \sin(\beta_c \tau) + 3B\beta_c^2 r^2 [2\sin(\beta_c \tau) - \sin(2\beta_c \tau)] \right\}.$$

通过分析方程(22)可以得到非零不动点的稳定性,分析结果如图5(a)和图5(b)所示:临界稳定边界将平面分成稳定区域和不稳定区域,其它参数的取值与图3和图4一致.比较图5(a)和图5(b)可以看出时滞量对主共振周期解的临界稳定边界有着重要的影响,它可以改变主共振周期解的稳定性.作为一个例子,图6详细的给出了时滞对非零不动点稳定性的作用,其中 $\sigma = 0$, 其它参数与图5相同.

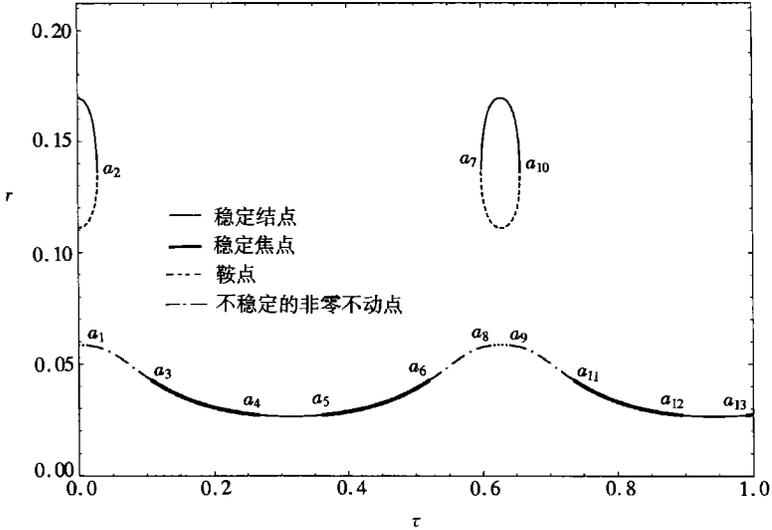


图6 方程(15)的非零不动点及其稳定性随 τ 的变化

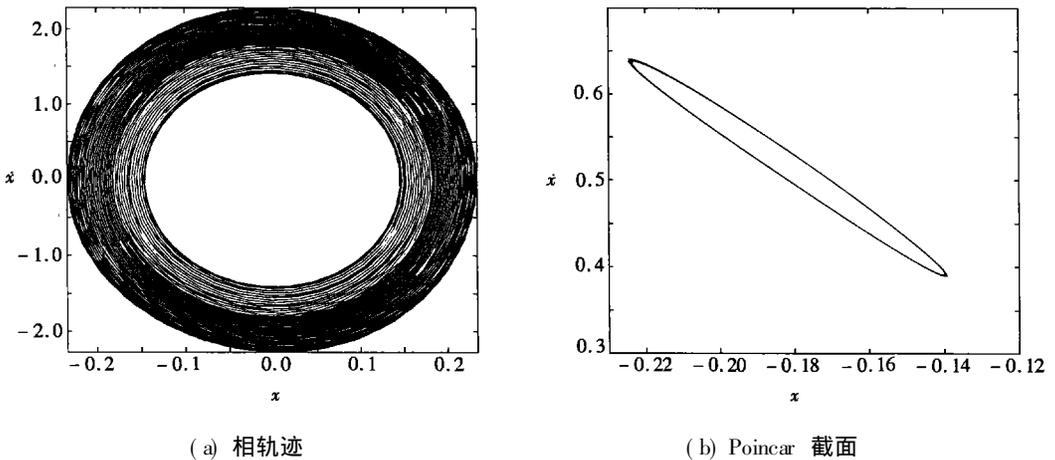


图7 系统(1)在 $\tau = 0.029$ 处的概周期运动

从(17)可以看出 g_{st} 是 τ 周期函数,并且周期为 $2\pi/\beta_c$. 这一点被图6所证实. 随着时滞量的变化,点 a_2 处的动力学行为与点 a_{10} 处相同. 类似的情况也可以出现在 a_1 和 a_9 , a_3 和 a_{11} 等等. 稳定和不稳定的主共振解都是以时滞量 τ 周期地出现.

3 时滞导致概周期运动

正如图6所示,理论研究表明:当 $\tau \in (a_2, a_3)$ 时,没有稳定的周期解,但存在不稳定的周期解。不稳定的周期解与稳定的周期解在点 a_3 处相连,这意味着在点 a_3 处出现分岔。对于原系统(1)这样的分岔是一个主共振周期解分岔。当由右至左通过 a_3 点时,主共振解失去稳定性。于是产生一个问题:主共振解失去稳定性后,系统的运动处于何种状态? 存在两种可能性:其一,系统的振动振幅趋于无穷,使系统遭受破坏;其二,系统出现更复杂的动力学行为。为简单起见,我们在本节采用6阶的 Runge_Kutta 数值积分来模拟系统此时的动力学行为。

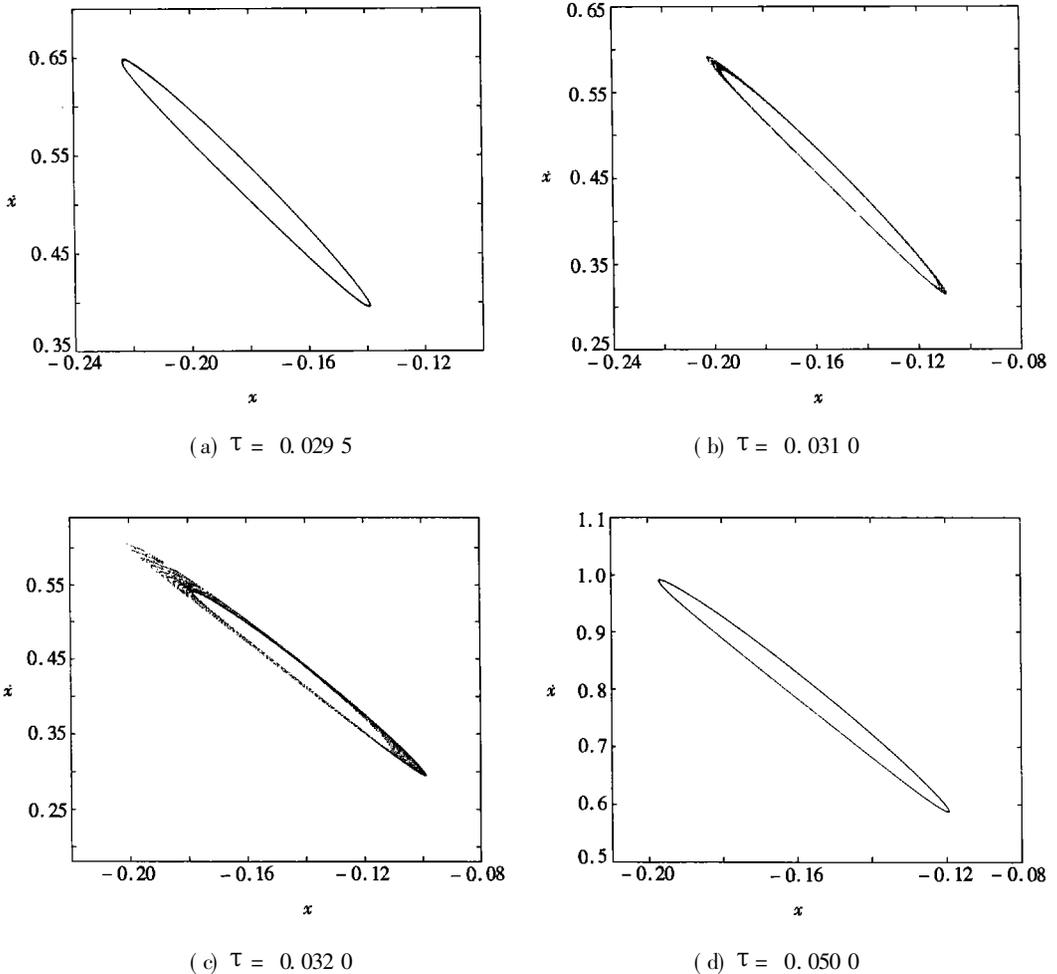


图8 系统(1)的 Poincaré 截面表明概周期运动

在数值模拟过程中,取时滞量 τ 是分岔参数或控制参数,其取值范围设定在使主共振解失去稳定性的那些值上,系统其它参数取值同图6一致。系统初始条件取为 $x(t) = x^*(t) = 0 (-\tau \leq t \leq 0)$ 。取定 Poincaré 截面是五维空间 $(t, x(t), x^*(t), x(t-\tau), x^*(t-\tau))$ 满足 $x(t-\tau) = 0, x^*(t-\tau) > 0$ 的投影平面 $(x(t), x^*(t))$ 。数值模拟的所有结果显示在图7和图8中。

正如理论分析所预测的那样,当时滞量增加到0.029时(略大于图6所示的 a_2 点),图7(b)所表示的 Poincaré 截面是一条封闭曲线。结合图7(a)和图6可以看出系统的主共振周期解失去稳定性,使系统由周期运动变成概周期运动。图8(a)~图8(d)表明:当 $\tau \in$

$[a_2, a_3]$ 时, 系统一直处于概周期运动状态, 而当 τ 穿过 a_3 , 出现一个小振幅的周期解, 系统运动状态又回到主人振周期振动状态。这说明系统在 a_2 和 a_3 处都存在着主共振周期解分岔。

这种从周期运动到概周期运动或相反的现象也可以出现在大时滞量的取值范围, 如 $\tau \in (a_6, a_7)$ 和 $\tau \in (a_{10}, a_{11})$ 。因此, 时滞有“开关”的作用, 可以控制分岔, 也可以产生分岔。同时这种作用还具有一定的周期性, 这就为实际应用中时滞量的取值提供了更多的可操作性。

4 讨论和结论

本文主要研究目标是考虑时滞量对系统动力学行为的作用和影响。由于许多学者都已研究过时滞反馈增益对系统动力学行为的影响(参看文[10]及其参考文献)。因此, 本这方面没有给予特别的关注。值得注意的是本文的结果都是建立在反馈系统 A 和 B 的正数的基础上, 亦即我们仅仅考虑了正反馈时滞控制系统。事实上, 对于我们所研究的系统, 负反馈对频率曲线的拓扑结构没有影响, 不存在非零不动点分岔和周期性分岔。正反馈是时滞导致系统出现复杂动力学行为的必要条件。

本文可以得出如下结论:

1) 用本文给出的理论方法可以得到时滞反馈非自治系统的主共振近似解析解。无论取大的时滞量还是取小的时滞量, 数值模拟解与近似解析解都有很好的吻合, 这说明本文方法的有效性和精确性, 为进一步研究共振解的稳定性分岔奠定了基础。

2) 时滞量象一个“开关”, 一方面可以用来控制分岔使系统从复杂的运动变成简单的或是更加有序的运动; 另一方面也可以用来产生分岔使系统具有更加复杂的动力学行为, 以便在某些领域内加以应用。

3) 较之其它控制方法, 时滞控制方法在实际应用中更易于实现。就混沌控制而言, 本文提供的方法可以作为 OGY^[19] 和 Pyragas 方法^[16] 的补充。

4) 时滞量对强迫自持(self_sustained)时滞反馈系统的作用具有一定的周期性, 这就为实际应用中时滞量的取值提供了更多的可操作性。

[参 考 文 献]

- [1] CHEN Yu_shu, XU Jian. Bifurcation in nonlinear systems with parametric excitation[J]. Doklady Mathematics, 1997, **56**(3): 880—883.
- [2] Van der Pol B, Van der Mark J. Frequency demultiplication[J]. Nature, 1927, **120**(1): 363—364.
- [3] Wischert W, Wunderlin W, Pelster A, et al. Delay_induced instabilities in nonlinear feedback systems [J]. Phys Rev E, 1994, **49**(1): 203—219.
- [4] Tass P, Kurths J, Rosenblum M G, et al. Delay_induced transitions in visually guided movements[J]. Phys Rev E, 1996, **54**(3): R2224—R2227.
- [5] Nayfeh A H, Chin C M, Pratt J. Perturbation methods in nonlinear dynamics_applications to machining dynamics[J]. J Manuf Sci Eng, 1997, **119**(2): 485—493.
- [6] LIAO Xiao_feng, YU Jie_bang. Robust stability for interval Hopfield neural networks with time delay [J]. IEEE Trans N N, 1998, **9**(5): 1042—1046.
- [7] CAO Jin_de. Periodic oscillation and exponential stability of delayed CNNs[J]. Phys Lett A, 2000, **270**(3/4): 157—163.
- [8] Wulf V, Ford N J. Numerical Hopf bifurcation for a class delay differential equations[J]. J Comput Appl Math, 2000, **115**(2): 601—616.

- [9] YAO Wei_guang, YU Pei, Essex C. Delayed stochastic differential model for quiet standing[J]. *Phys Rev E*, 2001, **63**(2): 021902—021904.
- [10] Reddy D V R, Sen A, Johnston G L. Dynamics of a limit cycle oscillator under time delayed linear and nonlinear feedbacks[J]. *Physica D*, 2000, **144**(2): 335—357.
- [11] Campbell S A, Blair J, Ohira T, et al. Complex dynamics and multistability in a damped harmonic oscillator with delayed negative feedback[J]. *Chaos*, 1995, **5**(4): 640—645.
- [12] Campbell S A, Blair J, Ohira T, et al. Limit cycles, tori, and complex dynamics in a second_order differential equations with delayed negative feedback[J]. *J Dynamic Differential Equations*, **7**(2): 213—236.
- [13] Blair J, Campbell S. A stability and bifurcations of equilibria in multiple_delayed differential equation [J]. *SIAM J Appl Math*, 1994, **54**(7): 1402—1424.
- [14] XU Jian, LU Qi_shao. Hopf bifurcation of time_delay linear equations[J]. *Int J Bif Chaos*, 1999, **9**(5): 939—951.
- [15] Cuomo K M, Oppenheim A V. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications[J]. *Phys Rev Lett*, 1993, **71**(1): 65—68.
- [16] Pyragas K. Continuous control of chaos by self_controlling feedback[J]. *Phys Lett A*, 1992, **170**(3): 421—428.
- [17] Gregory D V, Rajarshi R. Chaotic communication using time_delayed optical systems[J]. *Int J Bif Chaos*, 1999, **9**(10): 2129—2156.
- [18] Nayfeh A H, Mook D T. *Nonlinear Oscillations* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1979.
- [19] Ott E, Grebogi C, Yorke A. Controlling chaos[J]. *Phys Rev Lett*, 1990, **64**(5): 1196—1199.

Effects of Time Delayed Velocity Feedbacks on Self_Sustained Oscillator With Excitation

XU Jian¹, CHEN Yu_shu²

(1. Key Laboratory of Solid Mechanics of MEC, Department of Engineering Mechanics and Technology, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China;

2. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: Both the primary resonant solutions and their bifurcations due to time delayed velocity feedbacks used in a self_sustained oscillator with excitation were further investigated. A model was proposed by adding linear and nonlinear time delayed feedbacks to a representative non_autonomous system(with external forcing). The stability condition of the linearized system at trivial equilibrium was discussed, which leads to a critical stability boundary where periodic solutions may occur. The main attention was focused on bifurcations from the primary resonant solutions. It is found that the stable primary resonant solution may appear periodically in the time delay. Meanwhile, the unstable regions for such solutions are also obtained, predicting the occurrence of quasi_periodic motions.

Key words: nonlinear dynamics; delayed differential equation; bifurcation