

文章编号: 1000_0887(200) 01_0047_0

刚体动力学方程的一个辛积分方法*

路英杰, 任革学

(清华大学 工程力学系, 北京 100084)

(郑泉水推荐)

摘要: 针对四元数和对应广义动量表示的刚体定点动力学方程, 利用一种位移格式的微分一代数方程积分方案, 实现了非独立广义动量表示的拉格朗日方程的辛积分算法。数值实验显示该算法具有精度高和保持系统守恒量的特点。更为重要的是, 广义动量表示的拉格朗日方程较之传统形式的拉格朗日方程在辛积分中表现出独特的优越性。

关键词: 刚体动力学; 四元数; 广义动量; 辛积分

中图分类号: O313.3 文献标识码: A

引 言

哈密顿系统的辛几何算法具有保持系统拓扑结构和精度高等特点, 在研究长时间的演化解时具有优越特性^[1]。受约束多刚体系统的建模中通常采用基点坐标和四元数描述刚体位姿^[2]。为研究系统长时间的演化, 要求相应数值算法具有保持体系守恒量的性质^[3~ 1]。将系统方程写为广义动量表示的哈密顿正则形式, 再应用辛积分算法求解是一条有效途径^[7~ 11]。四元数是非独立的广义坐标, 对应广义动量和广义速度之间的关系是奇异变换, 这是限制应用广义动量积分多刚体系统方程的主要困难。针对刚体定点动力学问题, 结合辛积分格式, 本文实现了以非独立四元数和对应广义动量为积分变量, 积分求解广义动量表示的拉格朗日方程的算法, 并给出了相应的数值实验结果。该算法的特点是直接处理约束方程, 而且在积分中避免了求解广义速度的广义动量表达式及相应导数。

1 四元数和对应广义动量表示的刚体动力学方程

针对以四元数描述的刚体定点动力学问题, 本节列出传统的带拉氏乘子的拉格朗日方程和广义动量表示的拉格朗日方程。

刚体的姿态可以用四元数描述

$$\mathbf{q} = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T, \quad (1)$$

四元数是不独立的广义坐标, 满足归一化条件

$$C(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{q} - 1 = 0 \quad (2)$$

刚体定点运动的动力学由微分_代数方程描述^[2]

* 收稿日期: 2004_05_14; 修订日期: 2005_09_10

作者简介: 路英杰(1978—), 男, 北京市人, 博士(联系人 Tel: + 8_10_ 2772 37; E_mail: lu_yj04@mails.tsinghua.edu.cn)。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{q}} \right)^T + \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{q}} \right)^T + \boldsymbol{C}_q^T \lambda = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (3)$$

其中 V 为势能函数, λ 为拉氏乘子, \boldsymbol{C}_q 为 \boldsymbol{C} 的雅可比矩阵, 刚体动能 T 为广义速度的二次型^[2]:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{M} \dot{\boldsymbol{q}}, \quad (4)$$

式中 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 为四元数广义坐标对应的广义速度, 质量矩阵 \boldsymbol{M} 可以写为^[2]:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{G}^T (4\boldsymbol{J}) \boldsymbol{G}, \quad (5)$$

其中 \boldsymbol{J} 为刚体转动惯量矩阵, 是描述刚体自身性质的常量, \boldsymbol{G} 为辅助矩阵, 定义如下^[2]:

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

将动能表达式(4)代入式(3), 就得到传统的带拉氏乘子的拉格朗日方程^[2]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{M} \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{M} \dot{\boldsymbol{q}} - \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{q}} \right)^T + \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{q}} \right)^T + \boldsymbol{C}_q^T \lambda = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (7)$$

定义广义动量为动能对广义速度的偏导数:

$$\boldsymbol{p} = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \right)^T = \boldsymbol{M} \dot{\boldsymbol{q}} \quad (8)$$

将广义动量定义式(8)代入式(3), 得到广义动量表示的拉格朗日方程:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{p}} - \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{q}} \right)^T + \left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{q}} \right)^T + \boldsymbol{C}_q^T \lambda = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (9)$$

其中动能对广义坐标的偏导数仍然依据表达式(4)进行计算, 这一点与方程式(7)相同。刚体动力学方程式(8)、式(9)是关于广义坐标和广义动量的一阶方程, 其非线性程度由于广义动量的引入而弱于传统形式(7)。

2 刚体动力学方程的一个辛积分算法

基于高斯求积公式的隐式 Runge_Kutta 积分格式是辛积分格式^[1]:

$$\boldsymbol{x}^{(n+1)} = \boldsymbol{x}^{(n)} + h \sum_{i=1}^s b_i \boldsymbol{x}^{(i)}, \quad (10)$$

$$\boldsymbol{x}^{(i)} = \boldsymbol{x}^{(n)} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \boldsymbol{x}^{(j)}, \quad i = 1, \dots, s, \quad (11)$$

其中积分变量为标量 $x(t)$ (为表达方便设为标量), \boldsymbol{x} 为其导数值, 上标表示变量在相应节点上的值, h 为积分步长, s 为高斯节点数目, b_i 和 a_{ij} 为积分系数。将(11)写为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}^{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(n)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}^{(n)} \end{bmatrix} + h \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}^{(s)} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

其中 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ 可逆。令 $\boldsymbol{D} = [d_{ij}] = \boldsymbol{A}^{-1}$, 则有

$$\begin{bmatrix} x^{>(1)} \\ \vdots \\ x^{>(s)} \end{bmatrix} = h^{-1} \mathbf{D} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(s)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^{(n)} \\ \vdots \\ x^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

即

$$x^{>(i)} = h^{-1} \sum_{j=1}^s d_{ij} (x^{(j)} - x^{(n)}), \quad i = 1, \dots, s. \quad (14)$$

以式(10)、式(14)为基本积分格式,对微分—代数方程(9)进行积分,图1显示了一个积分步的计算中涉及的所有变量。图中变量的上标 (n) 、 $(n+1)$ 分别表示当前和下一时刻点,而上标(1)、(2)、(3)表示本积分步内的高斯节点。

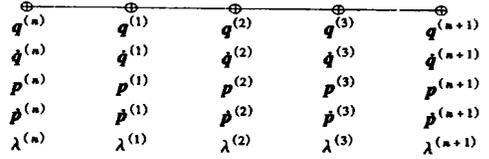


图1 积分节点上的变量

积分变量为广义坐标 q 和广义动量 p 。根据格式(14), $q^{>}$ 是广义坐标的线性函数, $p^{>}$ 是广义动量的线性函数,即

$$q^{>(i)} = h^{-1} \sum_{j=1}^s d_{ij} (q^{(j)} - q^{(n)}), \quad i = 1, \dots, s, \quad (15)$$

$$p^{>(i)} = h^{-1} \sum_{j=1}^s d_{ij} (p^{(j)} - p^{(n)}), \quad i = 1, \dots, s, \quad (1)$$

由关系式(8)式、(15)式、(1)式, s 个高斯积分节点上的广义速度, 广义动量, 和广义动量的时间导数都可以由相应广义坐标确定, 过程如下: 已知 $q^{(1)} \dots q^{(s)}$, 先由式(15) 计算广义速度 $q^{>(1)} \dots q^{>(s)}$, 再由式(8) 计算广义动量 $p^{(1)} \dots p^{(s)}$, 最后由式(1) 计算 $p^{>(1)} \dots p^{>(s)}$ 。

系统方程(9)在 s 个高斯节点上成立, 联立得到一个以广义坐标 $q^{(1)} \dots q^{(s)}$ 和拉氏乘子 $\lambda^{(1)} \dots \lambda^{(s)}$ 为未知量的非线性方程组

$$\Phi = \Phi(z) = \begin{bmatrix} \left[p^{>} \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right)^T + \left(\frac{\partial V}{\partial q} \right)^T + C_q^T \lambda \right]^{(1)} \\ \vdots \\ \left[p^{>} \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right)^T + \left(\frac{\partial V}{\partial q} \right)^T + C_q^T \lambda \right]^{(s)} \\ [C(q)]^{(1)} \\ \vdots \\ [C(q)]^{(s)} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (17)$$

其中 $z = [(q^{(1)})^T \dots (q^{(s)})^T \lambda^{(1)} \dots \lambda^{(s)}]^T$ 为未知量列阵, 方程的上标表示在相应节点上计算其值。对此方程采用标准 Newton 迭代法求解。

最后根据积分格式(10) 计算积分节点 $(n+1)$ 上的状态

$$q^{(n+1)} = q^{(n)} + h \sum_{i=1}^s b_i q^{>(i)}, \quad (18)$$

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} + h \sum_{i=1}^s b_i p^{>(i)}. \quad (19)$$

利用 Newton 迭代法求解非线性方程时, 需要计算雅可比矩阵 $\partial \Phi / \partial z$ 。可以利用复合函数求导规则, 结合关系式(8)、式(15)、式(1), 计算 $\partial \Phi / \partial z$ 的各个元素。

以上积分微分—代数方程的思路是: 以高斯节点上广义位移(和拉氏乘子)为基本未知量,

利用 Runge_Kutta 积分格式, 将节点上广义速度等变量都表示为广义位移的函数, 从而将系统方程化为节点位移的复合化数; 令系统方程在节点上成立, 联立得到非线性方程组; 最后采用标准 Newton 迭代法求解。正是由于采用广义位移为基本未知量, 积分中只要求广义动量的表示式(8), 而不需要将广义速度表达为广义动量的函数。由方程式(17) 下半部分可见, 本方法得到的广义位移直接满足相应约束方程。

取积分变量为广义坐标 q 和广义速度 \dot{q} ; 同样可以得到传统的拉格朗日方程式(7) 的辛积分算法。

3 数值实验

对刚体定点运动进行数值实验。刚体质量为 $m = 1$, 在固定点处的主轴坐标系中转动惯量为 $J_1 = 2, J_2 = 1.5, J_3 = 1$ 。质心位于第3惯量主轴上, 与固定点相距 $L = 0.1$ 。取固定点为原点, 质心的初始位置为 $x = L \cdot \sin(30^\circ), y = 0, z = L \cdot \cos(30^\circ)$ 。

数值实验中采用基于高斯求积公式的3级阶隐式 Runge_Kutta 公式, 取固定步长, 以相同的初始条件, 同时对广义动量表示的拉格朗日方程式(9) 和传统的拉格朗日方程式(7) 进行积分, 对比计算结果。

算例1 刚体不受外力矩作用的欧拉情况, 机械能和角动量守恒。取初始角速度为随体坐标系下 $\omega_1 = 0, \omega_2 = 1.5, \omega_3 = 2$ 。取步长为0.001, 积分100万步。广义动量表示的拉格朗日方程的积分结果守恒量变化如表1, 其相对误差都在 10^{-8} 量级。

表1 系统始末机械能和角动量

	机械能	角动量(x)	角动量(y)	角动量(z)
初始	3.87500000000000	1.00000000000000	2.25000000000000	1.73205080758888
末步	3.875001580592	1.000000113218	2.2500004252	1.7320508572988

角速度的矢端在刚体随体坐标系中运动, 在惯量椭球面上划出三维的闭合曲线, 称为本体极迹。将本体极迹分别投影到3个坐标平面上, 如图2。可见数值解较好的保持了系统固有结构。

对传统的拉格朗日方程积分得到了几乎相同的结果, 守恒量相对误差也在 10^{-8} 量级。以上结果说明: 1) 积分算法有效的处理了微分一代数方程中的约束, 具有精度高和保持系统守恒量的特点; 2) 在小步长高精度的情况下, 两种形式的动力学方程有着相同的计算精度。

算例2 欧拉情况, 取初始角速度同上, 增大步长为1, 积分1000步。图3(a) 是由广义动量表示的拉格朗日方程积分得到的结果, 对比图2(a) 的高精度解, 可见数值解基本保持了系统固有结构。图3(b) 中由传统的拉格朗日方程积分得到的结果发生了明显错误(对比图2(a) 的高精度解)。在此, 广义动量形式系统方程表现出了明显的优越性。

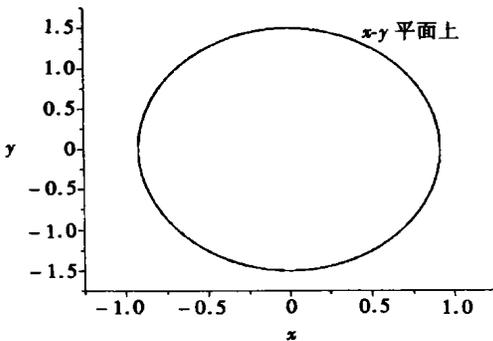


图2(a) 本体极迹在 x,y 平面上的投影

算例3 刚体仅受重力矩作用的拉格朗日情况, 机械能守恒, 对竖直轴的角动量守恒。取初始角速度为随体坐标系下 $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \omega_3 = 1$, 重力加速度为 $g = 9.8$, 步长为1, 积分1000步。

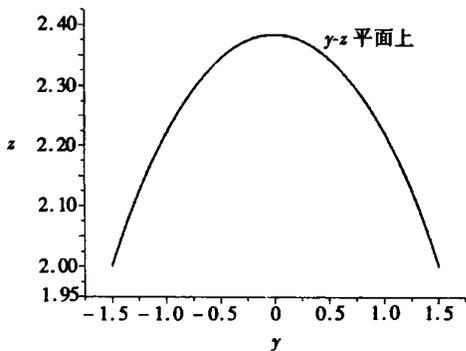
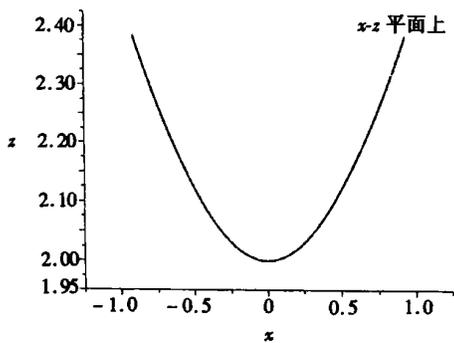


图 2(b) 本体极迹在 xz 平面上的投影

图 2(c) 本体极迹在 yz 平面上的投影

图 2 本体极迹在 3 个坐标平面上的投影

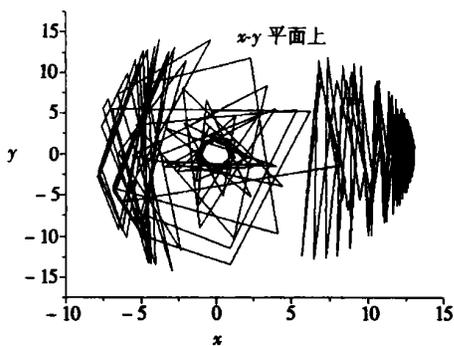
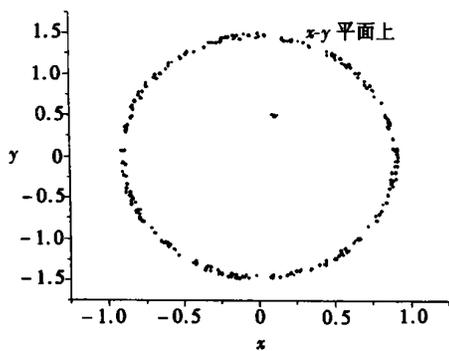


图 3(a) 广义动量表示的拉格朗日方程的解

图 3(b) 传统的拉格朗日方程的解

图 3 本体极迹在 xy 平面上的投影

表 2

系统始末机械能和角动量

	广义动量表示的拉格朗日方程		传统的拉格朗日方程	
	机械能	角动量 (z)	机械能	角动量 (z)
初始	1 348 704 895 708 75	0 8 025 403 784 439	1 348 704 895 708 75	0 8 025 403 784 439
末步	1 352 299 93 189 25	0 878 232 801 901 3 7	93 01 597 954 183 1	14 3 0 359 430 395 8
误差	0.27%	1.41%	79%	1.558%

对比表 2 所列计算结果, 可见应用广义动量对刚体动力学方程进行辛积分计算, 较之传统方式, 能够更好的保持系统守恒量。

4 结 论

针对以四元数描述的刚体定点动力学方程, 本文给出了非独立广义动量表示的拉格朗日方程的一个辛积分算法。该算法具有精度高和保持系统守恒量的特点。从表达式上看, 广义动量的引入减少了动力学方程中广义速度的二次项数目, 从而降低了方程的非线性程度。数值实验表明, 用广义动量表示的拉格朗日方程较之传统形式, 在积分步长较大时能够更好的保持系统守恒量, 具有显著的数值计算优势。本文所述辛积分格式可以直接应用于广义动量表示的多刚体动力学系统中, 其特性正在研究中。

[参 考 文 献]

- [1] 冯康, 秦孟兆. 哈密尔顿系统的辛几何算法[M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 2003, 271—344.
- [2] Edward J Haug. Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems [M]. Needham Heights, Massachusetts, U S: Allyn and Bacon, 1989, 305—335.
- [3] CHEN Shan_shin, Daniel A Tortorelli. An energy_conserving and filtering method for stiff nonlinear multibody dynamics[J]. Multibody System Dynamics, 2003, **10**(4): 341—3 2.
- [4] Elisabet V Lens, Alberto Cardona, Michel Geradin. Energy preserving time integration for constrained multibody systems[J]. Multibody System Dynamics, 2004, **11**(1): 41— 1.
- [5] Chen S, Tortorelli D A, Hansen J M. Unconditionally energy stable implicit time integration: Application to multibody system analysis and design[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, **48**(): 791—822.
- [] Simo J C, Tarnow N, Wong K. Exact energy_momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1992, **100**(1): 3—11 .
- [7] Channell P, Scovel C. Symplectic integration of Hamiltonian systems[J]. Nonlinearity, 1990, **3**(2): 231—259.
- [8] Leimkuhler B, S Reich. Symplectic integration of constrained Hamiltonian systems[J]. Math Comp, 1994, **63**(208): 589— 05.
- [9] Barth E, Leimkuhler B. Symplectic methods for conservative multibody systems[A]. In: Marsden J E, Patrick G W, Shadwick W F. Integration Algorithms for Classical Mechanics, Fields Institute Communications [C]. U S: American Mathematical Society, 199 , 25—43.
- [10] Leimkuhler B, Skeel R D. Symplectic numerical integrators in constrained Hamiltonian systems[J]. J Com p Phys, 1994, **112**(1): 117—125.
- [11] Baumgarte J W. A new method of stabilization for holonomic constraints[J]. ASME Journal of Applied Mechanics , 1983, **50**(4): 8 9—870.

A Symplectic Algorithm for the Dynamics of a Rigid Body

LU Ying_jie, REN Ge_xue

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University,
Beijing 100084, P R China)

Abstract: For the dynamics of a rigid body with a fixed point based on quaternion and the corresponding generalized momenta, a displacement_based symplectic integration scheme for differential algebraic equations is proposed and applied to the Lagrange' s equations based on dependent generalized momenta. Numerical experiments show that the algorithm possesses such characters as high precision and preserving system invariants. More importantly, the generalized momenta based Lagrange' s equations show unique advantages over the traditional Lagrange' s equations in symplectic integrations.

Key words: rigid_body dynamics; quaternion; generalized momenta; symplectic integration