应用数学和力学,第 27 卷 第 1 期(2006 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2006) 01_0067_08

Reissner 夹层板动力学的非传统 Hamilton 型变分原理*

黄伟江[1,2], 罗 恩[2], 佘 慧[2,3]

(1. 广州市建筑科学研究院, 广州 510440;
2. 中山大学 应用力学与工程系, 广州 510275;
3. 广东省建筑科学研究院, 广州 510500)

(程昌钧推荐)

摘要: 根据古典阴阳互补和现代对偶互补的基本思想, 通过早已提出的一条简单而统一的新途径, 系统地建立了 Reissner 夹层板动力学的各类非传统 Hamilton 型变分原理• 这种新的非传统 Hamilton 型变分原理能反映这种动力学初值_边值问题的全部特征• 文中首先给出一个 Reissner 夹层板广义虚功原理的表式• 然后从该式出发, 不仅能得到 Reissner 夹层板动力学的虚功原理, 而且通过所给出的一系列广义 Legendre 变换, 还能系统地成对导出五类变量、二类变量和一类变量非传统 Hamilton 型变分原理的互补泛函• 同时, 通过这条新途径还能清楚地阐明这些原理的内在联系•

关 键 词: 非传统 Hamilton 型变分原理; Reissner 夹层板; 动力学; 对偶互补关系; 初值_边值问题

中图分类号: O347 文献标识码: A

引 言

近几十年来, 夹层板越来越广泛地应用于航空、航天、船舶、土建、汽车和军事等工程中• 有关夹层板理论, 目前已有多种, 其中有代表性的主要有: Reissner 理论[1]、Hoff 理论[2] 和 ÂÅÃ±¼À³ —杜庆华理论[2] 等• 而 Reissner 夹层板理论是最简单的夹层板理论• 这种理论, 在经典薄板理论基础上, 考虑了夹心的剪应变, 这一点正是夹层板区别于单层板的最主要因素• 该理论的数学方程同其它理论相比较为简单, 并能解决许多具体问题, 而通过大量的工程实践, 也证实了对于多数工程问题来说, 这种理论具有足够的精度• 虽然有关夹层板理论与分析已有一系列的研究工作, 有关详情可见专著文献[2] 及所列的参考文献; 但是有关夹层板动力学的一些重要基本原理, 如虚功原理和各种变分原理至今还没有系统建立•

人们熟知的传统 Hamilton 型变分原理不能反映动力学初值_边值问题的全部特性• 而本文所要建立的变分原理与传统 Hamilton 型变分原理在形式上有某些相似, 但并不完全相同(泛

* 收稿日期: 2004_10_25; 修订日期: 2005_09_20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172097); 高校博士点基金资助项目(20030558025)
作者简介: 黄伟江(1975—), 男, 广东人, 工程师, 硕士(联系人. Tel: + 86_20_86336357; Fax: + 86_20_26095221; E_mail: shilonghwj@tom.com)•

函式中含有限制变分量),而最根本的区别就是本文要建立的变分原理能反映夹层板动力学初值_边值问题的全部特征,因此将本文所建立的新变分原理称为非传统Hamilton型变分原理•

1 Reissner 夹层板动力学的基本方程及条件

考虑一块由两层平面刚度较大、厚度较小的各向同性表层和一层材料较软、厚度较大的各向同性夹心所组成的三层板• 根据文献[1]和文献[2],Reissner 夹层板动力学的基本方程、边界条件和初始条件如下:

1.1 广义速度与广义位移关系

$$v = \frac{\partial w}{\partial t} = \dot{v}, \quad \omega_x = \frac{\partial \psi_x}{\partial t} = \dot{\psi}_x, \quad \omega_y = \frac{\partial \psi_y}{\partial t} = \dot{\psi}_y, \tag{1}$$

式中 $w(x,y,t)$ 为挠度; $v(x,y,t)$ 为竖向速度; $\psi_x(x,y,t)$, $\psi_y(x,y,t)$ 分别为夹心中面法线在 xz、yz 平面内的转角, ψ_x 以从 x 轴经 90° 到 z 轴的转向为正, ψ_y 以从 y 轴经 90° 到 z 轴的转向为正; $\omega_x(x,y,t)$, $\omega_y(x,y,t)$ 分别为夹心中面法线在 xz、yz 平面内的角速度•

1.2 广义动量与广义速度关系

$$p = \rho h v, \quad L_x = \rho J \omega_x, \quad L_y = \rho J \omega_y, \tag{2}$$

式中 ρ 为夹心密度; h 为夹心厚度; J 为惯性矩, $J = h^3/12$; $p(x,y,t)$ 为竖向动量; $L_x(x,y,t)$, $L_y(x,y,t)$ 分别为夹心中面法线在 xz、yz 平面内的角动量•

相应的动能密度和余动能密度分别为:

$$\begin{cases} K(v, \omega_x, \omega_y) = \dfrac{1}{2}\rho h v^2 + \dfrac{1}{2}\rho J \omega_x^2 + \dfrac{1}{2}\rho J \omega_y^2, \\ K^*(p, L_x, L_y) = \dfrac{1}{2\rho h}p^2 + \dfrac{1}{2\rho J}L_x^2 + \dfrac{1}{2\rho J}L_y^2 \bullet \end{cases} \tag{3}$$

1.3 运动方程

$$\begin{cases} \dot{L}_x + M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x = m_x, \\ \dot{L}_y + M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y = m_y, \\ \dot{p} - Q_{x,x} - Q_{y,y} = f, \end{cases} \text{或者} \begin{cases} \rho J \ddot{\psi}_x + M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x = m_x, \\ \rho J \ddot{\psi}_y + M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y = m_y, \\ \rho h \ddot{w} - Q_{x,x} - Q_{y,y} = f, \end{cases} \tag{4}$$

式中 $m_x(x,y,t)$, $m_y(x,y,t)$, $f(x,y,t)$ 分别为作用在单位中面面积内的载荷在 xz、yz 平面内的合力矩和在 z 轴向的合力; m_x、m_y 的正负规定分别与 ψ_x、ψ_y 相同•

1.4 广义应变与广义位移关系

$$\begin{cases} \kappa_x = -\psi_{x,x}, \quad \kappa_y = -\psi_{y,y}, \quad \kappa_{xy} = -(\psi_{x,y} + \psi_{y,x})/2, \\ \gamma_x = w_{,x} - \psi_x, \quad \gamma_y = w_{,y} - \psi_y, \end{cases} \tag{5}$$

式中 $\kappa_x(x,y,t)$, $\kappa_y(x,y,t)$, $\kappa_{xy}(x,y,t)$ 为相邻两剖面的相对转角; $\gamma_x(x,y,t)$, $\gamma_y(x,y,t)$ 为变形前垂直中面的法线在变形后与中面夹角的变化•

1.5 广义内力与广义应变关系

$$\begin{cases} M_x = D(\kappa_x + \mu\kappa_y), \quad M_y = D(\kappa_y + \mu\kappa_x), \quad M_{xy} = D(1-\mu)\kappa_{xy}, \\ Q_x = C\gamma_x, \quad Q_y = C\gamma_y \bullet \end{cases} \tag{6}$$

应变能密度和余应变能密度分别为:

$$\begin{aligned} &U(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_x, \gamma_y) = \\ &\qquad D[\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + 2(1-\mu)\kappa_{xy}^2 + 2\mu\kappa_x\kappa_y]/2 + C(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)/2, \end{aligned} \tag{7}$$

$$V(M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y) =$$

$$\frac{1}{2D(1-\mu^2)}[M_x^2 + M_y^2 + 2(1+\mu)M_{xy}^2 - 2\mu M_x M_y] + \frac{1}{2C}(Q_x^2 + Q_y^2), \tag{8}$$

对于各向同性匀质夹心, 抗弯刚度 $D = [E(h+t)^2 t]/[2(1-\mu^2)]$, 剪切刚度 $C = G_c(h+t)$; 式中 E 为表层弹性模量, μ 为表层泊松比, t 为表层厚度, G_c 为夹心在平面 xz 和 yz 平面内的剪切模量•

1.6 边界条件

$$\begin{cases} \text{在广义固支边}(\partial\Omega_1)\text{ 上}: w = w,\quad \psi_n = \psi_n,\quad \psi_s = \psi_s, \\ \text{在广义简支边}(\partial\Omega_2)\text{ 上}: w = w,\quad \psi_s = \psi_s,\quad M_n = M_n, \\ \text{在广义自由边}(\partial\Omega_3)\text{ 上}: M_n = M_n,\quad M_{ns} = M_{ns},\ Q_n = Q_n, \end{cases} \tag{9}$$

式中 w、ψ_n、ψ_s、M_n、M_{ns}、Q_n 为已知函数•

1.7 初始条件

$$\begin{cases} w_0(x,y) = w(x,y,0) = w_0(x,y),\quad \psi_{x0}(x,y) = \psi_x(x,y,0) = \psi_{x0}(x,y), \\ \psi_{y0}(x,y) = \psi_y(x,y,0) = \psi_{y0}(x,y),\quad p_0(x,y) = p(x,y,0) = p_0(x,y), \\ L_{x0}(x,y) = L_x(x,y,0) = L_{x0}(x,y),\quad L_{y0}(x,y) = L_y(x,y,0) = L_{y0}(x,y), \end{cases} \tag{10}$$

式中 w_0、ψ_{x0}、ψ_{y0}、p_0、L_{x0}、L_{y0} 为已知初始值•

2 广义虚功原理和虚功原理

可以证明, 对于互不相关的任意函数 p、L_x、L_y、M_x、M_y、M_{xy}、Q_x、Q_y、w、ψ_x、ψ_y, 下式恒成立•

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_1}\iint_\Omega [p\dot{w} + L_x\dot{\psi}_x + L_y\dot{\psi}_y + M_x\psi_{x,x} + M_y\psi_{y,y} + M_{xy}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) - \\ &\quad Q_x(w_{,x} - \psi_x) - Q_y(w_{,y} - \psi_y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t + \\ &\quad \int_0^{t_1}\iint_\Omega [w(\dot{p} - Q_{x,x} - Q_{y,y}) + \psi_x(\dot{L}_x + M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x) + \\ &\quad \psi_y(\dot{L}_y + M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t + \\ &\quad \int_0^{t_1}\int_{\partial\Omega}(Q_n w - M_n\psi_n - M_{ns}\psi_s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t - \\ &\quad \iint_\Omega (w_1 p_1 + \psi_{x1}L_{x1} + \psi_{y1}L_{y1} - w_0 p_0 - \psi_{x0}L_{x0} - \psi_{y0}L_{y0})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &\quad \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 - \Pi_4 = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

式中 Π_1、Π_2、Π_3、Π_4 分别表示第 1、2、3、4 项积分•

(11) 式是本文给出的一个重要关系式, 在力学上可以认为是 Reissner 夹层板动力学的广义虚功原理的表式• 从该式出发, 不仅能系统地建立 Reissner 夹层板动力学的虚功原理和各类非传统 Hamilton 型变分原理, 而且能清晰地阐明这些原理之间的内在联系•

当 M_x、M_y、M_{xy}、Q_x、Q_y、p、L_x、L_y 满足方程(4) 式和条件(9) 式、(10) 式; w、ψ_x、ψ_y 满足方程(1) 式、(5) 式和条件(9) 式、(10) 式时, 则由(11) 式可得

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_1}\iint_\Omega (fw + m_x\psi_x + m_y\psi_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t + \int_0^{t_1}\int_{\partial\Omega}(Q_n w - M_n\psi_n - M_{ns}\psi_s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t - \\ &\quad \iint_\Omega (w_1 p_1 + \psi_{x1}L_{x1} + \psi_{y1}L_{y1} - w_0 p_0 - \psi_{x0}L_{x0} - \psi_{y0}L_{y0})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \end{aligned}$$

$$\int_0^{t_1}\iint_\Omega (M_x\kappa_x + M_y\kappa_y + 2M_{xy}\kappa_{xy} + Q_x\gamma_x + Q_y\gamma_y -$$
$$pv - L_x\omega_x - L_y\omega_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t。 \tag{12}$$

(12) 式可以看成是 Reissner 夹层板动力学的虚功原理的表式，它反映广义动力可能状态与广义运动可能状态之间的最一般关系，或者说，它反映 (f, m_x, m_y)，(p, L_x, L_y)，$(M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y)$ 与 (w, ψ_x, ψ_y)，(v, ω_x, ω_y)，$(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_x, \gamma_y)$ 这两组对偶变量之间的最一般关系。

3 Reissner 夹层板动力学的各类非传统 Hamilton 型变分原理

根据古典阴阳互补和现代对偶互补的基本思想，以 Reissner 夹层板理论为基础，通过作者早已提出的一条简单而统一的新途径[4,5]，系统地建立 Reissner 夹层板动力学的各类非传统 Hamilton 型变分原理。

3.1 五类变量广义变分原理

当 $(M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y)$ 和 $(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_x, \gamma_y)$ 是互不相关的任意函数时，可以得到下列关系式：

$$M_x\kappa_x + M_y\kappa_y + 2M_{xy}\kappa_{xy} + Q_x\gamma_x + Q_y\gamma_y = U(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_x, \gamma_y) +$$
$$V(M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y) + A(M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_x, \gamma_y), \tag{13}$$

只有当 $(M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y)$ 和 $(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_x, \gamma_y)$ 满足(6) 式时，$A = 0$，(13) 式就变成为

$$M_x\kappa_x + M_y\kappa_y + 2M_{xy}\kappa_{xy} + Q_x\gamma_x + Q_y\gamma_y = U + V, \tag{14}$$

根据(13) 式，(11) 式第 1 项积分 Π_1 中的被积函数

$$M_x\psi_{x,x} + M_y\psi_{y,y} + M_{xy}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) - Q_x(w_{,x} - \psi_x) - Q_y(w_{,y} - \psi_y)$$

可变换为：

$$M_x\psi_{x,x} + M_y\psi_{y,y} + M_{xy}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) - Q_x(w_{,x} - \psi_x) - Q_y(w_{,y} - \psi_y) =$$
$$-U + M_x(\kappa_x + \psi_{x,x}) + M_y(\kappa_y + \psi_{y,y}) + M_{xy}[2\kappa_{xy} + (\psi_{x,y} + \psi_{y,x})] +$$
$$Q_x[\gamma_x - (w_{,x} - \psi_x)] + Q_y[\gamma_y - (w_{,y} - \psi_y)] - V - A。 \tag{15}$$

当 (p, L_x, L_y) 和 (v, ω_x, ω_y) 是互不相关的任意函数时，可以得到下列关系式：

$$pv + L_x\omega_x + L_y\omega_y = K(v, \omega_x, \omega_y) + K^*(p, L_x, L_y) - B(p, L_x, L_y, v, \omega_x, \omega_y), \tag{16}$$

只有当 (p, L_x, L_y) 和 (v, ω_x, ω_y) 满足(2) 式时，$B = 0$，(16) 式就变成为：

$$pv + L_x\omega_x + L_y\omega_y = K(v, \omega_x, \omega_y) + K^*(p, L_x, L_y), \tag{17}$$

根据(16) 式，(11) 式第 1 项积分 Π_1 中的被积函数 $p\dot{w} + L_x\dot{\psi}_x + L_y\dot{\psi}_y$ 可变换为：

$$p\dot{w} + L_x\dot{\psi}_x + L_y\dot{\psi}_y =$$
$$K - p(v - \dot{w}) - L_x(\omega_x - \dot{\psi}_x) - L_y(\omega_y - \dot{\psi}_y) + K^* - B。 \tag{18}$$

上述的(13) 式、(16) 式是本文给出的广义 Legendre 变换式。

而(11) 式的 $\Pi_2 + \Pi_3 - \Pi_4$ 可变换为：

$$\Pi_2 + \Pi_3 - \Pi_4 = \int_0^{t_1}\iint_\Omega [(\dot{p} - Q_{x,x} - Q_{y,y} - f)w + (\dot{L}_x + M_{x,x} + M_{xy,y} -$$
$$Q_x - m_x)\psi_x + (\dot{L}_y + M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y - m_y)\psi_y]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t + \Gamma_{IB} + \mathring{\Gamma} +$$
$$\int_0^{t_1}\iint_\Omega (fw + m_x\psi_x + m_y\psi_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t + \Pi_{IB} + \mathring{\Pi}, \tag{19}$$

式中，Π_{IB}、Γ_{IB}、$\mathring{\Pi}$、$\mathring{\Gamma}$ 的表达式见附录，而 $\mathring{\Pi}$ 和 $\mathring{\Gamma}$ 表达式中带上标“°”的量为限制变分量[7]。

将(15)式、(18)式和(19)式代入(11)式中,经整理后可得:

$$\Pi_5(p, L_x, L_y; v, \omega_x, \omega_y; w, \psi_x, \psi_y; \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_x, \gamma_y; M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y) + \Gamma_5(p, L_x, L_y; v, \omega_x, \omega_y; w, \psi_x, \psi_y; \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_x, \gamma_y; M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y) = 0, \tag{20}$$

而泛函 Π_5 和 Γ_5 分别为:

$$\begin{aligned}\Pi_5 = \int_0^{t_1}\iint_\Omega \Big\{ & K - p(v - \dot w) - L_x(\omega_x - \dot\psi_x) - L_y(\omega_y - \dot\psi_y) - U + M_x(\kappa_x + \psi_{x,x}) + \\ & M_y(\kappa_y + \psi_{y,y}) + M_{xy}[2\kappa_{xy} + (\psi_{x,y} + \psi_{y,x})] + Q_x[\gamma_x - (w_{,x} - \psi_x)] + \\ & Q_y[\gamma_y - (w_{,y} - \psi_y)] + fw + m_x\psi_x + m_y\psi_y \Big\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t + \Pi_{\mathrm{IB}} + \mathring{\Pi},\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_5 = \int_0^{t_1}\iint_\Omega \Big[& K^* - B - V - A - (Q_{x,x} + Q_{y,y} + f - \dot p) w - \\ & (-M_{x,x} - M_{xy,y} + Q_x + m_x - \dot L_x)\psi_x - \\ & (-M_{xy,x} - M_{y,y} + Q_y + m_y - \dot L_y)\psi_y \Big] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t + \Gamma_{\mathrm{IB}} + \mathring{\Gamma} .\end{aligned} \tag{22}$$

定理 1 当且仅当 p、L_x、L_y、v、ω_x、ω_y、w、ψ_x、ψ_y、κ_x、κ_y、κ_{xy}、γ_x、γ_y、M_x、M_y、M_{xy}、Q_x、Q_y 是混合问题(1)式、(2)式、(4)式~(6)式、(9)式和(10)式的解,则必定满足下列变分式:

$$\delta\Pi_5 = 0 \text{ 或 } \delta\Gamma_5 = 0, \tag{23}$$

为节省篇幅,定理 1 的证明见附录.

Π_5 和 Γ_5 分别是五类变量非传统 Hamilton 型变分原理的势能形式和余能形式的泛函,对于任意无关的 p、L_x、L_y、v、ω_x、ω_y、w、ψ_x、ψ_y、κ_x、κ_y、κ_{xy}、γ_x、γ_y、M_x、M_y、M_{xy}、Q_x、Q_y,它们之间存在互补关系(20)式.

3.2 二类变量广义变分原理

当 (p, L_x, L_y), (v, ω_x, ω_y), (w, ψ_x, ψ_y) 满足(1)式和(2)式,$(M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y)$ 与 $(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_x, \gamma_y)$ 满足(6)式时,(20)式就成为:

$$\Pi_2(M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y; w, \psi_x, \psi_y) + \Gamma_2(M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y; w, \psi_x, \psi_y) = 0 . \tag{24}$$

而泛函 Π_2 和 Γ_2 分别为:

$$\begin{aligned}\Pi_2 = \int_0^{t_1}\iint_\Omega \Big\{ & \bar K + V + M_x\psi_{x,x} + M_y\psi_{y,y} + M_{xy}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) - \\ & Q_x(w_{,x} - \psi_x) - Q_y(w_{,y} - \psi_y) + fw + m_x\psi_x + m_y\psi_y \Big\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t + \Pi_{\mathrm{IB}} + \mathring{\Pi},\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_2 = \int_0^{t_1}\iint_\Omega \Big\{ & \bar K - V - (Q_{x,x} + Q_{y,y} + f - \rho h \ddot w) w - \\ & (-M_{x,x} - M_{xy,y} + Q_x + m_x - \rho J \ddot\psi_x)\psi_x - \\ & (-M_{xy,x} - M_{y,y} + Q_y + m_y - \rho J \ddot\psi_y)\psi_y \Big\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t + \Gamma_{\mathrm{IB}} + \mathring{\Gamma},\end{aligned} \tag{26}$$

式中 $\bar K = \rho(h\dot w^2 + J\dot\psi_x^2 + J\dot\psi_y^2)/2$.

定理 2 当且仅当 M_x、M_y、M_{xy}、Q_x、Q_y、w、ψ_x、ψ_y 是混合问题(4)式、(9)式、(10)式及下式

$$\begin{cases} -\psi_{x,x} = \dfrac{1}{D(1-\mu^2)}(M_x - \mu M_y), \quad -\psi_{y,y} = \dfrac{1}{D(1-\mu^2)}(M_y - \mu M_x), \\ -(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) = \dfrac{2}{D(1-\mu)}M_{xy}, \quad w_{,x} - \psi_x = \dfrac{Q_x}{C}, \quad w_{,y} - \psi_y = \dfrac{Q_y}{C} \end{cases} \tag{27}$$

的解,则必定满足变分式 $\delta\Pi_2 = 0$ 或 $\delta\Gamma_2 = 0$.

Π_2 和 Γ_2 是二类变量非传统 Hamilton 型广义变分原理的一对互补泛函,其互补关系(24)式对于任意无关的 M_x、M_y、M_{xy}、Q_x、Q_y、w、ψ_x、ψ_y 成立.

3.3 一类变量广义变分原理

当(p, L_x, L_y), (v, ω_x, ω_y), (w, ψ_x, ψ_y)满足(1)式和(2)式,$(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_x, \gamma_y)$和$(w, \psi_x, \psi_y)$满足(5)式时,泛函 Π_5 就变成为:

$$
\begin{aligned}
\Pi_1(w, \psi_x, \psi_y) = {} & \int_0^{t_1}\iint_\Omega \left(\bar{K} - \bar{U} + f w + m_x \psi_x + m_y \psi_y\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t + \Pi_{1B} - \\
& \iint_\Omega \left(\rho h \mathring{\dot{w}}_1 w_1 + \rho J \mathring{\dot{\psi}}_{x1} \psi_{x1} + \rho J \mathring{\dot{\psi}}_{y1} \psi_{y1} - \mathring{w}_0 \rho h \dot{w}_0 - \mathring{\psi}_{x0} \rho J \dot{\psi}_{x0} - \mathring{\psi}_{y0} \rho J \dot{\psi}_{y0}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}
\tag{28}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
\bar{U} = {} & \frac{D}{2}\left[\psi_{x,x}^2 + \psi_{y,y}^2 + \frac{1-\mu}{2}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x})^2 + 2\mu\psi_{x,x}\psi_{y,y}\right] + \\
& \frac{C}{2}\left[(w_{,x} - \psi_x)^2 + (w_{,y} - \psi_y)^2\right].
\end{aligned}
$$

定理3 当且仅当 w, ψ_x、ψ_y 是混合问题(9)式、(10)式及下式:

$$
\begin{cases}
D(\psi_{x,x} + \mu\psi_{y,y})_{,x} + \dfrac{D(1-\mu)}{2}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x})_{,y} + C(w_{,x} - \psi_x) + m_x = \rho J \ddot{\psi}_x, \\
\dfrac{D(1-\mu)}{2}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x})_{,x} + D(\psi_{y,y} + \mu\psi_{x,x})_{,y} + C(w_{,y} - \psi_y) + m_y = \rho J \ddot{\psi}_y, \\
C(w_{,x} - \psi_x)_{,x} + C(w_{,y} - \psi_y)_{,y} + f = \rho h \ddot{w}, \\
-D(\psi_{x,x} + \mu\psi_{y,y})\cos^2\theta - D(1-\mu)(\psi_{x,y} + \psi_{y,x})\cos\theta\sin\theta - \\
\qquad D(\psi_{y,y} + \mu\psi_{x,x})\sin^2\theta = M_{\mathrm{n}}, \qquad \text{在 } \partial\Omega_2 + \partial\Omega_3 \text{ 上}, \\
[D(\psi_{x,x} + \mu\psi_{y,y}) - D(\psi_{y,y} + \mu\psi_{x,x})]\cos\theta\sin\theta - \\
\qquad \dfrac{D(1-\mu)}{2}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x})(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = M_{\mathrm{ns}}, \qquad \text{在 } \partial\Omega_3 \text{ 上}, \\
C(w_{,x} - \psi_x)\cos\theta + C(w_{,y} - \psi_y)\sin\theta = Q_{\mathrm{n}}, \qquad \text{在 } \partial\Omega_3 \text{ 上}
\end{cases}
\tag{29}
$$

的解,则必定满足变分式 $\delta\Pi_1 = 0$.

Π_1 是一类变量非传统Hamilton型广义变分原理的势能形式的泛函.

4 结　　语

本文所建立的各类非传统Hamilton型变分原理是Reissner夹层板动力学的重要组成部分,而非传统Hamilton型变分原理能精确反映这种动力学初值_边值问题的全部特征. 因此,这些新的变分原理,无论在理论研究方面,还是在建立各种近似解法和工程实用理论方面都有重要价值. 此外,从文中还可以看到,应变能密度、动能密度和各类变量非传统Hamilton型变分原理的势能形式泛函与余应变能密度、余动能密度和各类变量非传统Hamilton型变分原理的余能形式泛函之间都相应存在对偶互补关系. 这种对称性绝不是偶然的,而是能量守恒原理的必然结果.

附　　录

$$
\Pi_{1B} = \int_0^{t_1}\left\{-\int_{\partial\Omega_2+\partial\Omega_3} M_{\mathrm{n}}\psi_{\mathrm{n}}\mathrm{d}s + \int_{\partial\Omega_3}(-M_{\mathrm{ns}}\psi_{\mathrm{s}} + Q_{\mathrm{n}} w)\,\mathrm{d}s - \right.
$$

$$\int_{\partial\Omega_1}(\phi_n - \phi_n)M_n\mathrm{d}s + \int_{\partial\Omega_1+\partial\Omega_2}[(w - w)Q_n - (\phi_s - \phi_s)M_{ns}]\mathrm{d}s\Big\}\mathrm{d}t +$$

$$\iint_\Omega(p_0w_0 + L_{x0}\phi_{x0} + L_{y0}\phi_{y0} - w_0p_0 - \phi_{x0}L_{x0} - \phi_{y0}L_{y0})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$\Gamma_{\mathrm{IB}} = \int_0^{t_1}\Big\{-\int_{\partial\Omega_1}\phi_nM_n\mathrm{d}s + \int_{\partial\Omega_1+\partial\Omega_2}(wQ_n - \phi_sM_{ns})\,\mathrm{d}s -$$

$$\int_{\partial\Omega_2+\partial\Omega_3}[(M_n - M_n)\phi_n]\,\mathrm{d}s + \int_{\partial\Omega_3}[(Q_n - Q_n)w - (M_{ns} - M_{ns})\phi_s]\mathrm{d}s\Big\}\mathrm{d}t +$$

$$\iint_\Omega(w_0p_0 + \phi_{x0}L_{x0} + \phi_{y0}L_{y0} - p_0w_0 - L_{x0}\phi_{x0} - L_{y0}\phi_{y0})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$\mathring{\Pi} = -\iint_\Omega(p_1w_1 + \mathring{L}_{x1}\phi_{x1} + \mathring{L}_{y1}\phi_{y1} - \mathring{w}_0p_0 - \mathring{\phi}_{x0}L_{x0} - \mathring{\phi}_{y0}L_{y0})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$\mathring{\Gamma} = -\iint_\Omega(\mathring{w}_1p_1 + \mathring{\phi}_{x1}L_{x1} + \mathring{\phi}_{y1}L_{y1} - \mathring{p}_0w_0 - \mathring{L}_{x0}\phi_{x0} - \mathring{L}_{y0}\phi_{y0})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

定理 1 的证明

将 Π_5 对自变函数 p、L_x、L_y、v、ω_x、ω_y、w、ϕ_x、ϕ_y、κ_x、κ_y、κ_{xy}、γ_x、γ_y、M_x、M_y、M_{xy}、Q_x、Q_y 变分并整理,可得

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_5 = &\int_0^{t_1}\iint_\Omega\Big\{(\rho hv - p)\delta v + (\rho J\omega_x - L_x)\delta\omega_x + (\rho J\omega_y - L_y)\delta\omega_y - (v - \dot{w})\delta p - (\omega_x - \dot{\phi}_x)\delta L_x - \\
&(\omega_y - \dot{\phi}_y)\delta L_y - (\dot{L}_x + M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x - m_x)\delta\phi_x - (\dot{L}_y + M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y - m_y)\delta\phi_y + \\
&[M_x - D(\kappa_x + \mu\kappa_y)]\delta\kappa_x + [M_y - D(\kappa_y + \mu\kappa_x)]\delta\kappa_y + 2[M_{xy} - D(1-\mu)\kappa_{xy}]\delta\kappa_{xy} - \\
&(Q_x - C\gamma_x)\delta\gamma_x - (Q_y - C\gamma_y)\delta\gamma_y + (\kappa_x + \phi_{x,x})\delta M_x + (\kappa_y + \phi_{y,y})\delta M_y + \\
&[2\kappa_{xy} + (\phi_{x,y} + \phi_{y,x})]\delta M_{xy} + [\gamma_x - (w_{,x} - \phi_x)]\delta Q_x + [\gamma_y - (w_{,y} - \phi_y)]\delta Q_y\Big\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t + \\
&\int_0^{t_1}\Big\{\int_{\partial\Omega_2+\partial\Omega_3}(M_n - M_n)\delta\phi_n\mathrm{d}s + \int_{\partial\Omega_3}[(M_{ns} - M_{ns})\delta\phi_s - (Q_n - Q_n)\delta w]\mathrm{d}s - \\
&\int_{\partial\Omega_1}(\phi_n - \phi_n)\delta M_n\mathrm{d}s + \int_{\partial\Omega_1+\partial\Omega_2}[(w - w)\delta Q_n - (\phi_s - \phi_s)\delta M_{ns}]\,\mathrm{d}s\Big\}\mathrm{d}t - \\
&\iint_\Omega[(p_0 - p_0)\delta w_0 + (L_{x0} - L_{x0})\delta\phi_{x0} + (L_{y0} - L_{y0})\delta\phi_{y0} - \\
&(w_0 - w_0)\delta p_0 - (\phi_{x0} - \phi_{x0})\delta L_{x0} - (\phi_{y0} - \phi_{y0})\delta L_{y0}]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}\tag{A1}$$

充分性　若 p、L_x、L_y、v、ω_x、ω_y、w、ϕ_x、ϕ_y、κ_x、κ_y、κ_{xy}、γ_x、γ_y、M_x、M_y、M_{xy}、Q_x、Q_y 是混合问题(1)式、(2)式、(4)式~(6)式、(9)式、(10)式的解,则(A1)式就变成为 $\delta\Pi_5 = 0$, 即(23)式成立.

必要性　若(23)式成立,即 $\delta\Pi_5 = 0$, 注意到(A1)式,由于 δp、δL_x、δL_y、δv、$\delta\omega_x$、$\delta\omega_y$、δw、$\delta\phi_x$、$\delta\phi_y$、$\delta\kappa_x$、$\delta\kappa_y$、$\delta\kappa_{xy}$、$\delta\gamma_x$、$\delta\gamma_y$、δM_x、δM_y、δM_{xy}、δQ_x、δQ_y 的任意性,并根据变分法的有关引理,故由此可得(1)式、(2)式、(4)式~(6)式、(9)式、(10)式,即 p、L_x、L_y、v、ω_x、ω_y、w、ϕ_x、ϕ_y、κ_x、κ_y、κ_{xy}、γ_x、γ_y、M_x、M_y、M_{xy}、Q_x、Q_y 是混合问题(1)式、(2)式、(4)式~(6)式、(9)式、(10)式的解.

[参 考 文 献]

[1] Reissner E. On bending of elastic plates[J]. Quar of Appl Math, 1947, **5**(1): 55—68.

[2] 柳春图,李国琛,吴永礼. 夹层板的弯曲、稳定和振动[M]. 北京: 科学出版社, 1977, 1—6.

[3] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1981, 465—488.

[4] 罗恩. 关于线弹性动力学中各种 Gurtin 型变分原理[J]. 中国科学(A 辑), 1987, (9): 936—948.

[5] Luo En, Cheung Y K. On the variational principles in linear elastodynamics[J]. Acta Mechanica Sinica, 1988, **4**(4): 337—349.

[6] 罗恩. 几何非线性弹性动力学中的广义 Hamilton 型拟变分原理[J]. 中山大学学报(自然科学版), 1990, **29**(2): 15—19.

[7] Finlayson B A. The Method of Weighted Residuals and Variational Principles[M]. New York: Acad

Press, 1972, 336—337.

Unconventional Hamilton_Type Variational Principles For Dynamics of Reissner Sandwich Plate

HUANG Wei_jiang[1,2], LUO En[2], SHE Hui[2,3]

(1. Guangzhou Institute of Building Science, Guangzhou 510440, P.R.China;
2. Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat_sen University, Guangzhou 510275, P.R.China;
3. Guangdong Province Academy of Building Science, Guangzhou 510500, P.R.China)

Abstract: According to the basic idea of classical yin_yang complementarity and modern dual_complementarity, in a simple and unified way proposed by Luo(1987), some unconventional Hamilton_type variational principles for dynamics of Reissner sandwich plate can be established systematically. The unconventional Hamilton_type variation principle can fully characterize the initial_boundary_value problem of this dynamics. An important integral relation is given, which can be considered as the generalized principle of virtual work in mechanics. Based on this relation, it is possible not only to obtain the principle of virtual work, in dynamics of Reissner sandwich plate, but also to derive systematically the complementary functionals for five_field, two_field and one_field unconventional Hamilton_type variational principles by the generalized Legendre transformations. Furthermore, with this approach, the intrinsic relationship among the various principles can be explained clearly.

Key words: unconventional Hamilton_type variational principle; Reissner sandwich plate; dynamics; dual_complementary relation; initial_boundary_value problem