

文章编号: 1000-0887(2004) 05-0467-05

压电体中 T 应力项*

马 浩^{1,2}, 王 彪¹

(1. 哈尔滨工业大学 复合材料研究所, 哈尔滨 150001;
2. 青岛建筑工程学院数理信息系, 青岛 266033)

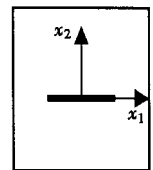
(我刊编委王彪来稿)

摘要: 探讨了横观各向同性压电体平面问题中裂尖的非奇异应力项。利用叠加原理和 Plemelj 公式, 通过求解 Riemann-Hilbert 问题得到非奇异应力项。结果表明弹性常数, 压电及介电常数影响着非奇异应力项的值。当压电材料退化为各向异性材料时, 该值与在各向异性材料时所得结果一致。

关键词: 压电材料; 裂纹; 非奇异应力项
中图分类号: O345.21 文献标识码: A

引 言

弹性非奇异应力项是指在裂尖平行于裂纹表面的应力^[1], 它在断裂分析中有重要作用。Lavsson 和 Carlsson^[2]认为在有限载荷下, 非奇异应力项的正负和大小严重影响裂尖塑性区的大小和形状。Billy^[3]等指出非奇异项扩展了小范围屈服条件有效的范围。Betegon 和 Hancock^[4]把裂尖的弹塑性场用两个参数来表征, 即 J 积分和 T 应力项。Coteerell 和 Rice^[5]以及 Fleck^[6]等认为在 I 型荷载条件下, 非奇异应力项可控制裂纹扩展的稳定性。Zhao Li_guo 和 Chen Yi_heng^[7]利用离散模型, 研究了各向同性体多裂纹情形时, 非奇异应力项对微裂纹屏蔽效应的影响。Sham^[8]给出了计算各向同性体中非奇异应力项的高阶权函数法。Ma^[9]等利用叠加原理得到了各向异性体情况下多裂纹时非奇异应力项的表达式, 同时分析了材料性能对它的影响。但是, 有关压电体的非奇异应力项方面工作并未开展。本文将利用叠加原理和 Plemelj 公式, 通过求解 Riemann-Hilbert 问题推导出横观各向同性压电体平面问题中裂尖非奇异应力项的表达式。如图 1, 极化轴为 x_2 轴, 长为 $2a$ 的裂纹埋在无限大压电介质中, 远场受机械和电荷载。该问题的非奇异项由下面两部分组成:



(1) 图 1 含裂纹的压电体

上标 ∞ 指无裂纹压电体受远场作用时的非奇异项解答, s 表示含裂纹压电体当裂纹表面受相反的远场作用时的非奇异项解答。本文的目的是第二项的表达式。

* 收稿日期: 2002_08_08; 修订日期: 2003_11_26

基金项目: 山东省自然科学基金资助项目(Q99F15); 黑龙江省博士后基金资助项目

作者简介: 马浩(1967—), 男, 湖北蒲圻人, 教授, 博士(联系人, Tel/Fax: + 86_451_86418251; E_mail: Ma670315@263.net).

1 基本方法

对于平面应变问题, 压电体的应力分量和电位移可表示为^[10]:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k^2 \Phi_k(z_k), & \sigma_{22} = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \Phi_k(z_k), & \sigma_{12} = -2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \Phi_k(z_k), \\ D_1 = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \mu_k \Phi_k(z_k), & D_2 = -2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \Phi_k(z_k), \end{cases} \quad (2a \sim e)$$

函数 $\Phi_k(z_k)$ 是复势函数; $z_k = x_1 + \mu_2 x_2$; μ_k 及其共轭复数是特征方程的根; λ_k 的表达式可参阅文献[10]。

为了计算非奇异应力项, 下面 A, B 和 C 三个问题需解决:

问题 A: 上下裂面受对称应力 - $\sigma_{22}^\infty(x_1)$ 作用时的裂纹问题。

问题 B: 上下裂面受反对称应力 - $\sigma_{22}^\infty(x_1)$ 作用时的裂纹问题。

问题 C: 上下裂面受对称电位移 - D_2^∞ 作用时的裂纹问题。

2 问题 A

沿 x_1 轴, 存在 $\sigma_{12}^\infty, D_2^\infty = 0$ 且 $z_1 = z_2 = z_3 = t$, 从而由公式(2c)和(2e)得

$$\sum_{k=1}^3 \mu_k \Phi_k(t) = 0, \quad \sum_{k=1}^3 \lambda_k \Phi_k(t) = 0 \quad (\text{所有 } t) \quad (3)$$

+ 和- 分别表示裂纹上下面的边界值, 由公式(2b)得

$$\begin{cases} \sigma_{22}^+ = \frac{S}{P_k} \Phi_k^+(t) + \frac{S}{P_k} \Phi_k^-(t), \\ \sigma_{22}^- = \frac{S}{P_k} \Phi_k^-(t) + \frac{S}{P_k} \Phi_k^+(t), \end{cases} \quad (|t| < a; k = 1, 2, 3), \quad (4)$$

这里重复下标并不表示求和约定, 且

$$\begin{cases} S = \mu_1(\lambda_2 - \lambda_3) + \mu_2(\lambda_3 - \lambda_1) + \mu_3(\lambda_1 - \lambda_2), \\ P_1 = \mu_2 \lambda_3 - \mu_3 \lambda_2, \quad P_2 = \mu_3 \lambda_1 - \mu_1 \lambda_3, \quad P_3 = \mu_1 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_1. \end{cases} \quad (5)$$

公式(4)产生如下 Riemann-Hilbert 问题

$$\begin{cases} \left[\frac{S}{P_k} \Phi_k(t) + \frac{S}{P_k} \Phi_k(t) \right]^+ + \left[\frac{S}{P_k} \Phi_k(t) + \frac{S}{P_k} \Phi_k(t) \right]^- = -2\sigma_{22}^\infty(t) \quad (|t| < a), \\ \left[\frac{S}{P_k} \Phi_k(t) - \frac{S}{P_k} \Phi_k(t) \right]^+ + \left[\frac{S}{P_k} \Phi_k(t) - \frac{S}{P_k} \Phi_k(t) \right]^- = 0 \quad (|t| < a). \end{cases} \quad (6)$$

上式的解答可表示为

$$\Phi_k(z_k) = \frac{P_k}{S} \frac{-1}{2\pi i X(z_k)} \int_{-a}^a \frac{X^+(t) \sigma_{22}^\infty(t)}{t - z_k} dt \quad (k = 1, 2, 3), \quad (7)$$

这里, $X(z_j) = (z_j^2 - a^2)^{1/2}$, ($j = 1, 2, 3$)。

利用 Plemelj 公式并让 $z_k \rightarrow t^+$, 由公式(7)得

$$\Phi_k^+(t) = \frac{P_k}{S} \left[\frac{G(t)}{2} - \frac{\sigma_{22}^\infty(t)}{2} \right] \quad (|t| < a), \quad (8)$$

其中, $G(t) = \frac{-1}{\pi i X(t)} \int_{-a}^a \frac{X(s) \sigma_{22}^\infty(s)}{s - t} ds$ 。

另一方面, 从公式(2a)可得

$$\sigma_{11}^+(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{\mu_k^2 P_k}{S} G(t) - \sigma_{22}^\infty(t) \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{\mu_k^2 P_k}{S} \quad (|t| < a) \cdot \quad (9)$$

当 $t \rightarrow a$ 时, 问题 A 的非奇异应力项的表达式如下

$$T = - \sigma_{22}^\infty(a) \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{\mu_k^2 P_k}{S}. \quad (10)$$

3 问题 B

沿 x_1 轴, 存在有 $\sigma_{22}^\infty = 0$ 和 $D_2^\infty = 0$, 并且 $z_1 = z_2 = z_3 = t$. 由公式(2c)和(2e)知

$$\sum_{k=1}^3 \Phi_k(k) = 0, \quad \sum_{k=1}^3 \lambda_k \Phi_k(t) = 0 \quad (\text{所有 } t) \cdot \quad (11)$$

公式(2c)中 σ_{12} 的边界值为

$$\begin{cases} \sigma_{12}^+ = \frac{S}{Q_k} \Phi_k^+(t) + \frac{S}{Q_k} \Phi_k^-(t), \\ \sigma_{12}^- = \frac{S}{Q_k} \Phi_k^-(t) + \frac{S}{Q_k} \Phi_k^+(t), \end{cases} \quad (|t| < a; k = 1, 2, 3), \quad (12)$$

其中, $Q_1 = \lambda_2 - \lambda_3$; $Q_2 = \lambda_3 - \lambda_1$; $Q_3 = \lambda_1 - \lambda_2$.

公式(12)导致如下 Riemann-Hilbert 方程

$$\begin{cases} \left[\frac{S}{Q_k} \Phi_k(t) + \frac{S}{Q_k} \Phi_k(t) \right]^+ + \left[\frac{S}{Q_k} \Phi_k(t) + \frac{S}{Q_k} \Phi_k(t) \right]^- = -2\sigma_{12}^\infty \quad (\text{所有 } |t| < a), \\ \left[\frac{S}{Q_k} \Phi_k(t) - \frac{S}{Q_k} \Phi_k(t) \right]^+ + \left[\frac{S}{Q_k} \Phi_k(t) - \frac{S}{Q_k} \Phi_k(t) \right]^- = 0 \quad (\text{所有 } |t| < a). \end{cases} \quad (13)$$

上述方程的解为

$$\Phi_k(z_k) = \frac{Q_k}{S} \frac{-1}{2\pi i X(z_k)} \int_{-a}^a \frac{X^+(t) \sigma_{12}^\infty(t)}{t - z_k} dt \quad (k = 1, 2, 3) \cdot \quad (14)$$

利用 Plemelj 公式并让 $z_k \rightarrow t^+$, 由公式(14)得

$$\Phi_k^+(t) = \frac{Q_k}{S} \left[\frac{H(t)}{2} - \frac{\sigma_{12}^\infty(t)}{2} \right] \quad (|t| < a), \quad (15)$$

其中, $H(t) = \frac{-1}{\pi i X(t)} \int_{-a}^a \frac{X(s) \sigma_{12}^\infty(s)}{s - t} ds$.

另一方面, 从公式(2a)可得

$$\sigma_{11}^+(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{\mu_k^2 Q_k}{S} H(t) - \sigma_{12}^\infty(t) \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{\mu_k^2 Q_k}{S} \quad (|t| < a) \cdot \quad (16)$$

当 $t \rightarrow a$ 时, 问题 B 的非奇异应力项的表达式如下

$$T = - \sigma_{12}^\infty(a) \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{\mu_k^2 Q_k}{S}. \quad (17)$$

4 问题 C

沿 x_1 轴, 存在有 $\sigma_{22}^\infty = 0$ 和 $\sigma_{12}^\infty = 0$, 并且 $z_1 = z_2 = z_3 = t$. 由公式(2c)和(2b)得

$$\sum_{k=1}^3 \Phi_k(k) = 0, \quad \sum_{k=1}^3 \mu_k \Phi_k(t) = 0 \quad (\text{所有 } t) \cdot \quad (18)$$

公式(2e)中 D_2 在裂纹上下表面的边界值为

$$\begin{cases} D_2^+ = \frac{S}{S_k} \Phi_k^+(t) + \frac{S}{S_k} \Phi_k^-(t), \\ D_2^- = \frac{S}{S_k} \Phi_k^-(t) + \frac{S}{S_k} \Phi_k^+(t), \end{cases} \quad (|t| < a; k = 1, 2, 3), \quad (19)$$

其中, $S_1 = \mu_3 - \mu_2$; $S_2 = \mu_1 - \mu_3$; $S_3 = \mu_2 - \mu_1$.

此时 Riemann-Hilbert 方程为

$$\begin{cases} \left[\frac{S}{S_k} \Phi_k(t) + \frac{S}{S_k} \Phi_k(t) \right]^+ + \left[\frac{S}{S_k} \Phi_k(t) + \frac{S}{S_k} \Phi_k(t) \right]^- = 2D_2^\infty \quad (|t| < a), \\ \left[\frac{S}{S_k} \Phi_k(t) - \frac{S}{S_k} \Phi_k(t) \right]^+ + \left[\frac{S}{S_k} \Phi_k(t) - \frac{S}{S_k} \Phi_k(t) \right]^- = 0 \quad (|t| < a). \end{cases} \quad (20)$$

公式(20)的解为

$$\Phi_k(z_k) = \frac{S_k}{S} \frac{-1}{2\pi i X(z_k)} \int_{-a}^a \frac{X^+(t) D_2^\infty(t)}{t - z_k} dt \quad (k = 1, 2, 3). \quad (21)$$

利用 Plemelj 公式并让 $z_k \rightarrow t^+$, 由公式(21)得

$$\Phi_k^+(t) = \frac{S_k}{S} \left[\frac{K(t)}{2} + \frac{D_2^\infty}{2} \right] \quad (|t| < a), \quad (22)$$

其中, $K(t) = \frac{1}{\pi i X(t)} \int_{-a}^a \frac{Q(s) D_2^\infty(s)}{s - t} ds$.

另一方面, 从公式(2a)可得

$$\sigma_{11}^+(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{\mu_k^2 S_k}{S} K(t) + D_2^\infty(t) \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{\mu_k^2 S_k}{S} \quad (|t| < a). \quad (23)$$

当 $t \rightarrow a$ 时, 问题C的非奇异应力项的表达式写为

$$T = D_2^\infty(a) \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{\mu_k^2 S_k}{S}. \quad (24)$$

5 解答及讨论

无限大压电介质中存在一个长为 $2a$ 的裂纹(如图1), 远场受均匀的机械和电荷载, 即 σ_{12}^∞ , σ_{22}^∞ 和 D_2^∞ . 根据叠加原理, 该问题中非奇异应力项就是由上述三个问题解的叠加. 它可表示为

$$T = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{\mu_k^2}{S} (D_2^\infty S_k - \sigma_{22}^\infty P_k - \sigma_{12}^\infty Q_k). \quad (25)$$

由上式可知, 非奇异应力项的值依赖于

- 远场所受的机械荷载
- 远场所受的电荷载
- 压电材料材料常数

若在公式(2)中忽略包含电变量项, 压电问题就变为各向异性弹性体问题, 此情形下有关材料参数变为

$$\mu_3 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 1, \quad (26)$$

且

$$\begin{aligned} S &= -\mu_1 + \mu_2, \quad P_1 = \mu_2, \quad P_2 = -\mu_1, \quad P_3 = 0, \\ Q_1 &= -Q_2 = 1, \quad Q_3 = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

此时公式(19)可退化写为

$$T = \sigma_{22}^{\infty} \operatorname{Re}[\mu_1 \mu_2] + \sigma_{12}^{\infty} \operatorname{Re}[\mu_1 + \mu_2] \quad (28)$$

该结果与文献[9]所得各向异性弹性体问题的结果一致。

[参 考 文 献]

- [1] Rice J R. Limitation to the small scale yielding approximate for crack tip plasticity[J]. J Mech Phys Solid, 1974, 24(1): 17—26.
- [2] Larsson S G, Carlson A J. Influence of non_singular stress terms and specimen geometry on small scale yielding at crack tips in elastic_plastic materials[J]. J Mech Phys Solids, 1973, 21(2): 263—277.
- [3] Bilby B A, Cardew G E, Goldthorpe M R, et al. A finite element investigation of the effect of specimen geometry on the fields of stress and strain at the tips of stationary cracks[A]. In: Size Effects in Fracture[C]. London: Mechanical Engineering Publications, Ltd, 1986, 37—46.
- [4] Betegon C, Hancock J W. Two_parameter characterization of elastic_plastic crack tip fields[J]. ASME J A M, 1991, 58(1): 104—110.
- [5] Cotterell B, Rice J R. Slightly curved or kinked cracks[J]. Int J Fract, 1980, 16(2): 155—169.
- [6] Fleck N A, Hutchinson J W, Suo Z. Crack path selection in a brittle adhesive layer[J]. Int J Solids Struct, 1991, 37(5): 1683—1703.
- [7] ZHAO Li_guo, CHEN Yi_heng. Effect of the T_stress in microcrack shielding problems[J]. ASME J A M, 1998, 65(1): 71—75.
- [8] Sham T L. The determination of the elastic T_term using higher order weigh functions[J]. Int J Fract, 1991, 48(1): 81—102.
- [9] MA Hao, ZHAO Li_gao, CHEN Yi_heng. Non_singular terms for multiple cracks in anisotropic elastic solids[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 1997, 27(1): 129—134.
- [10] Horacio Sosa. Plane problems in piezoelectric media with defects[J]. Int J Solid Structures, 1991, 28(3): 491—505.

T Stress in Piezoelectric Solid

MA Hao^{1, 2}, WANG Biao¹

(1. Center for Composite Materials, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P. R. China;

2. Department of Mathematics and Physics, Qingdao Institute of Architecture Engineering, Qingdao 266033, P. R. China)

Abstract: The non_singular and bounded terms for stresses near the crack tip were investigated. The crack problem in a transversely isotropic piezoelectric solid for the plane problem was dealt with. The principle of superposition and the Plemelj formulation were introduced. The non_singular terms are given by solving Riemann-Hilbert problem. It is shown that the non_singular terms are influenced by the elastic and electric constants.

Key words: piezoelectric solid; crack; non_singular term