

文章编号: 1000-0887(2006) 02_0127_07

二维超音速边界层中三波共振和二次失稳机制的数值模拟研究*

董亚妮^{1,2}, 周 恒^{1,2}

(1. 天津大学 力学系, 天津 300072;

2. 南开大学 天津大学 刘徽应用数学研究中心, 天津 300072)

(我刊编委周恒来稿)

摘要: 通过直接数值模拟的方法, 探讨在超音速边界层的转捩问题中, 是否存在和不可压缩流情况相似的产生亚谐波的机制。结果表明, 三波共振和二次失稳这两种机制都存在。讨论了这两种机制在层流至湍流的转捩中的重要性是否的确很大的问题。

关键词: 三波共振; 二次失稳; 超音速边界层; T-S 波

中图分类号: O357.41 **文献标识码:** A

引 言

从层流到湍流的转捩问题有很重要的应用背景。大多数情况下, 转捩首先由小扰动的放大开始, 当扰动达到一定大小后, 非线性开始起作用。对不可压缩边界层或平面槽道流, 还会出现典型的三维结构。用流动显示技术可以发现所谓的 Λ 结构, 并且存在两种不同的 Λ 结构, 一种是 K 型结构, 其流向周期和 T-S 波的相同, 还有一种其流向周期为 T-S 波的两倍, 因而与某种亚谐波对应。而它又可以细分为 C (Craik) 型和 H (Herbert) 型。前者由三波共振机制产生, 后者由二次失稳机制产生^[1]。

从一些超音速流的转捩实验中, 测到了亚谐波(比如 A. Maslov 在天津大学作的报告中就提到他们在超音速边界层的转捩试验中发现了亚谐波信号), 但实验数据很少, 而且缺乏细节。赵耕夫^[2] 曾从稳定性理论角度研究了二次失稳问题。

本文将通过直接数值模拟的方法, 探讨在超音速边界层中, 是否存在产生上述亚谐波的机制。

1 控制方程和计算方法

在数值计算中, 控制方程取守恒形式的 N-S 方程及理想气体的状态方程。用以下参数进

* 收稿日期: 2005_04_13; 修订日期: 2005_10_20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(90205021); 博士学位论文特别基金资助项目(200328); 南开大学天津大学刘徽应用数学中心基金资助项目

作者简介: 董亚妮(1981—), 女, 辽宁人, 硕士(E-mail: dongyani_1@hotmail.com);

周恒(1929—), 男, 福建人, 教授, 中科院院士(联系人, Tel: + 86_22_27890533; Fax: + 86_22_27405200; E-mail: hzhou1@tju.edu.cn)。

行相应的无量纲化: 入口处的基本流排移厚度 δ , 无穷远流体速度 u_∞ 、密度 ρ_∞ 、温度 T_∞ 、粘性系数 μ_∞ 和压力 $\rho_\infty U_\infty^2/2$ 。粘性系数满足 Sutherland 公式 $\mu/\mu_\infty = (T/T_\infty)^{3/2}(1+C)/(T/T_\infty + C)$, 其中 $C = (110.4 \text{ K})/T_\infty$; Prandtl 数 $Pr = \mu C_p/\lambda$ 在计算中取为常数 0.72。 γ 为比热比, 取 1.4。

无量纲化的守恒型三维可压缩 N-S 方程为:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial z},$$

其中 \mathbf{U} 为守恒型通量, $\partial \mathbf{E}/\partial x, \partial \mathbf{F}/\partial y, \partial \mathbf{G}/\partial z$ 为非线性项, $\partial \mathbf{E}_v/\partial x, \partial \mathbf{F}_v/\partial y, \partial \mathbf{G}_v/\partial z$ 为粘性项。

为了使用迎风差分格式进行计算, 首先对流项应根据 Jacobian 矩阵特征值的正负进行通量分裂。以 x 方向的 $\partial \mathbf{E}/\partial x$ 为例, Jacobian 矩阵为 $\partial \mathbf{E}/\partial \mathbf{U} = \mathbf{A}$, 设其特征值为 $\lambda_i (i = 1, \dots, 5)$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$, 则可找到矩阵 \mathbf{S} 使 $\mathbf{A} = \mathbf{S}\Lambda\mathbf{S}^{-1}$ 。则通量可作以下分裂:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{S}\Lambda^+ \mathbf{S}^{-1} \mathbf{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}\Lambda^- \mathbf{S}^{-1} \mathbf{U}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{E}^+}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{E}^-}{\partial x}.$$

对于 $\partial \mathbf{F}/\partial y, \partial \mathbf{G}/\partial z$ 采用相同的办法。

本文的计算中, 对于非线性项计算采用的是五阶精度的弱迎风紧致格式

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial \mathbf{E}_{i-1}^+}{\partial x} + 3 \frac{\partial \mathbf{E}_i^+}{\partial x} = \frac{1}{12\Delta x} (-\mathbf{E}_{i+2}^+ + 12\mathbf{E}_{i+1}^+ + 36\mathbf{E}_i^+ - 44\mathbf{E}_{i-1}^+ - 3\mathbf{E}_{i-2}^+), \\ 3 \frac{\partial \mathbf{E}_i^-}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mathbf{E}_{i+1}^-}{\partial x} = \frac{1}{12\Delta x} (\mathbf{E}_{i-2}^- - 12\mathbf{E}_{i-1}^- - 36\mathbf{E}_i^- + 44\mathbf{E}_{i+1}^- + 3\mathbf{E}_{i+2}^-). \end{cases}$$

对于粘性项采用的是六阶中心紧致格式

$$12f'_{i-1} + 36f'_i + 12f'_{i+1} = \frac{1}{\Delta x} (28(f_{i+1} - f_{i-1}) + (f_{i+2} - f_{i-2})).$$

在靠近计算域边界处, 精度要适当降低。处理边界条件时, 上边界采用 Poinot 和 Lele^[3] 建议的无反射边界条件, 出口处用外推格式, 壁面上为等温无滑移条件, 时间导数采用的是二阶精度的 R_K 法。

2 计算域的选取和基本流

文章模拟的是来流 Ma 数为 4.5, $Re = 0.9 \times 10^5$ 的平板边界层三维扰动的演化问题。气体参数取相当于 5 000 m 高空处大气的物理值, 并作为无量纲化时的参考量。

对两种不同的机制, 采用的计算域不同。对应于三波共振的情况, x 方向长为 153 个无量纲长度, 150 个网格, y 方向为 50 个无量纲长度, 420 个网格。在 y 方向采用变网格: $y = y_n \cdot (1 + b(1 - s^2))^{-1}$, 其中 y_n 是 y 方向计算长度, $s = i/(n - 1)$, ($i = 0, \dots, n - 1$), n 为 y 方向的网格点数, $b = (\sqrt{1 + 8b_k - 3})/4$, $b_k = \delta_n/\delta_1$, δ_n, δ_1 分别代表 y 方向第 n 个和第 1 个网格长度。

对于二次失稳, x 方向取 46.32 个无量纲长度, 160 个网格, y 方向取 20 个无量纲长度。 y 方向采用与上面相同的变网格计算格式。

3 计算结果

首先在无扰动情况下求得定常解, 入口处取为相应的相似性解。然后再在入口处引入相

应的T_S扰动波并研究其发展。

3.1 三波共振

作为比较,研究了在入口处只加一对斜波和加入共振三波的情况。

(a) | 对斜波情况

加入的一对斜波表达如下:

$$\begin{aligned}
 u' &= a\text{Re}[u_{i3}(y)\exp[i(-\omega_{i3}t + \beta_{i3}z + \phi_{i3})] + u_{r3}(y)\exp[i(-\omega_{r3}t - \beta_{r3}z + \phi_{r3})]], \\
 v' &= a\text{Re}[v_{i3}(y)\exp[i(-\omega_{i3}t + \beta_{i3}z + \phi_{i3})] + v_{r3}(y)\exp[i(-\omega_{r3}t - \beta_{r3}z + \phi_{r3})]], \\
 w' &= a\text{Re}[w_{i3}(y)\exp[i(-\omega_{i3}t + \beta_{i3}z + \phi_{i3})] - w_{r3}(y)\exp[i(-\omega_{r3}t - \beta_{r3}z + \phi_{r3})]], \\
 t' &= a\text{Re}[t_{i3}(y)\exp[i(-\omega_{i3}t + \beta_{i3}z + \phi_{i3})] + t_{r3}(y)\exp[i(-\omega_{r3}t - \beta_{r3}z + \phi_{r3})]], \\
 p' &= a\text{Re}[p_{i3}(y)\exp[i(-\omega_{i3}t + \beta_{i3}z + \phi_{i3})] + p_{r3}(y)\exp[i(-\omega_{r3}t - \beta_{r3}z + \phi_{r3})]],
 \end{aligned}$$

其中 a 为扰动幅值, 相位 ϕ_{i3} 为 0 , $u_r(y)$ 、 $u_i(y)$ 、 $v_r(y)$ 、 $v_i(y)$ 、 $w_r(y)$ 、 $w_i(y)$ 、 $p_r(y)$ 、 $p_i(y)$ 、 $T_r(y)$ 、 $T_i(y)$ 为对应于频率 $\omega_{i3} = 0.167$, 展向波数 $\beta_{i3} = 1.272$ 的T_S波的速度、压力与温度特征函数的实部和虚部, 并以扰动速度 u' 的最大模归一化。为了便于比较, 这里的参数取值与后面的三波共振的情况相同, 将对三维波记做 $(-1, 1)$ 和 $(1, 1)$ (括号中第 1 个数表示其展向波数与输入波展向波数之比, 第 2 个数表示其频率与输入波频率之比, 以下相同)。图 1、图 2 表示在某个 y 靠近 1 的位置, 对应幅值分别为 0.001 和 0.005 时各个谐波的增长曲线。可以看出流向涡 $(2, 0)$ 增长得最快, 随着初始扰动幅值的增加, 各次谐波都有明显增长, 但是斜波 $(1, 1)$ 却一直基本保持不变。所有谐波的增长都是两个斜波相互作用的结果。

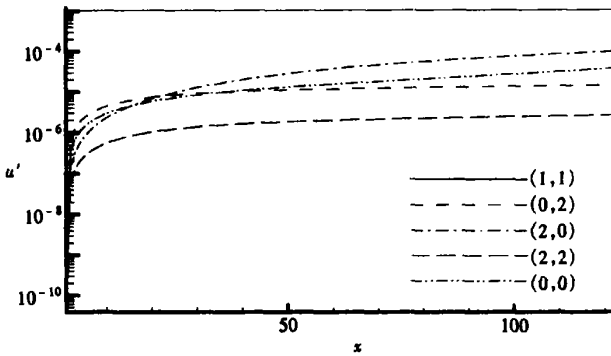


图 1 扰动幅值为 0.001 时各谐波增长曲线

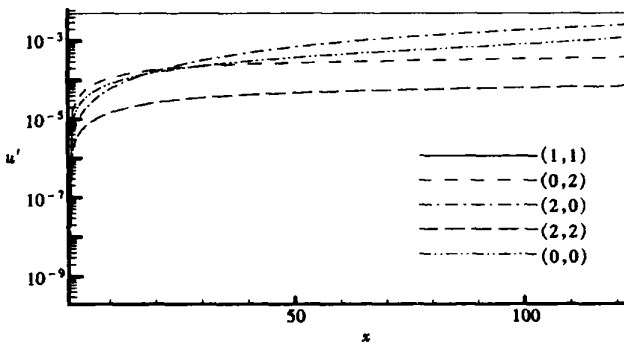


图 2 扰动幅值为 0.005 时各谐波增长曲线

(b) 共振三波

在入口处加入满足三波共振条件的一对斜波和一个二维波, 具体扰动形式如下:

$$u' = a \operatorname{Re} [u_{13}(y) \exp [i(-\omega_{13}t + \beta_{13}z + \phi_{13})] + u_{12}(y) \exp [i(-\omega_{12}t + \phi_{12})]] + u_{13}(y) \exp [i(-\omega_{13}t - \beta_{13}z + \phi_{13})] + u_{12}(y) \exp [i(-\omega_{12}t + \phi_{12})]],$$

$$v' = a \operatorname{Re} [v_{13}(y) \exp [i(-\omega_{13}t + \beta_{13}z + \phi_{13})] + v_{13}(y) \exp [i(-\omega_{13}t - \beta_{13}z + \phi_{13})] + v_{12}(y) \exp [i(-\omega_{12}t + \phi_{12})]],$$

$$w' = a \operatorname{Re} [w_{13}(y) \exp [i(-\omega_{13}t + \beta_{13}z + \phi_{13})] - w_{13}(y) \exp [i(-\omega_{13}t - \beta_{13}z + \phi_{13})] + w_{12}(y) \exp [i(-\omega_{12}t + \phi_{12})]],$$

$$t' = a \operatorname{Re} [t_{13}(y) \exp [i(-\omega_{13}t + \beta_{13}z + \phi_{13})] + t_{13}(y) \exp [i(-\omega_{13}t - \beta_{13}z + \phi_{13})] + t_{12}(y) \exp [i(-\omega_{12}t + \phi_{12})]],$$

$$p' = a \operatorname{Re} [p_{13}(y) \exp [i(-\omega_{13}t + \beta_{13}z + \phi_{13})] + p_{13}(y) \exp [i(-\omega_{13}t - \beta_{13}z + \phi_{13})] + p_{12}(y) \exp [i(-\omega_{12}t + \phi_{12})]],$$

式中各个参数的意义同上。因为对应增长率最大的第 2 模态二维 T_S 波, 没有找到满足三波共振条件的三维 T_S 波, 所以对于三波共振, 加入的是第 1 模态 T_S 波中增长率最大的二维波, 其频率 $\omega_2 = 0.335$, 相应的特征波流向波数 $\alpha_{r2} = 0.410$, 增长率为 0.12×10^{-2} 。三维波的特征波流向波数 $\alpha_{r3} = 0.167$, $\beta_{r3} = 1.272$, 对应的特征波流向波数 $\alpha_{r3} = 0.205$ 。它们满足共振条件 $\omega_2 = 2\omega_3$, $\alpha_{r2} = 2\alpha_{r3}$ 。二维波流向波数与三维波展向波数之比为 0.32, 或反过来, 二者波长之比为 3.125, 与不可压情况相差较大。

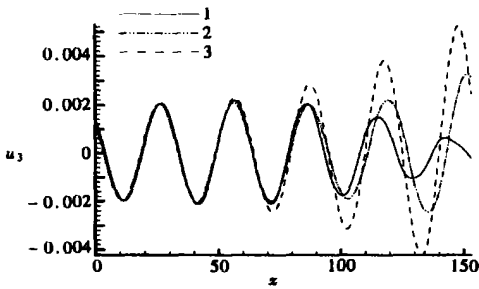


图 3 三维波速度 u_3 分量沿 x 的分布情况
(曲线 1, 2, 3 分别对应于 $\phi_2 = 0, \pi/2, \pi$)

当加入的扰动幅值 $a = 0.001$, $\phi_{r3} = 0$, ϕ_{r2} 分别取 $0, \pi/2, \pi$ 时, 三维波如图 3 所示。图中表示某一时刻, 某个 y 的位置(约为扰动幅值最大处)的三维波速度 u_3 分量沿 x 的分布情况。

可以看出, 当 $\phi_2 = 0$ (曲线 1) 时, 三维波不但没有增长, 反而会衰减。而当 $\phi_2 = \pi$ (曲线 3) 时, 三维波增长的速度最快。所以二维波和三维波之间的相位差对三维波的增长是有很影响的。但相位差对二维波的增长基本上没有影响。

图 4 和图 5 是三波共振情况下, 幅值为 0.001 和 0.005 时, 在 $y \approx 1$ 的位置上各次谐波的增长情况。可以看出三维波(1, 1)比二维波(0, 2)模增长得快, 当初始扰动幅值为 0.001 时, 三维波的增长率为 0.995×10^{-2} , 而当初始扰动幅值为 0.005 时, 三维波的增长率为 1.955×10^{-2} , 虽然比第 1 模态二维波最大增长率大很多, 比三维波的线性增长率 0.34×10^{-2} 也大不少, 但比第 2 模态的二维 T_S 波的最大放大率 3.85×10^{-2} 还是要小。

与只加入一对三维波的情况比较, 三波共振时(2, 0)模式谐波幅值的增长趋势不再像只加入一对三维斜波时最大, 而是略低于(0, 0)模式。另外当幅值较大时, 在仅有一对斜波的情况下没有增长的其他高次谐波(如(0, 4), (1, 3)模式)在这里也开始增长。

但总的来说, 三波共振虽然会促进扰动的增长, 但并不像原来设想的那样会大幅提高增长率。

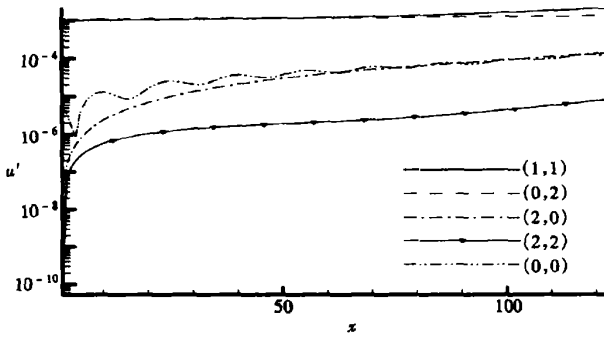


图 4 扰动幅值为 0.001 时各谐波增长曲线

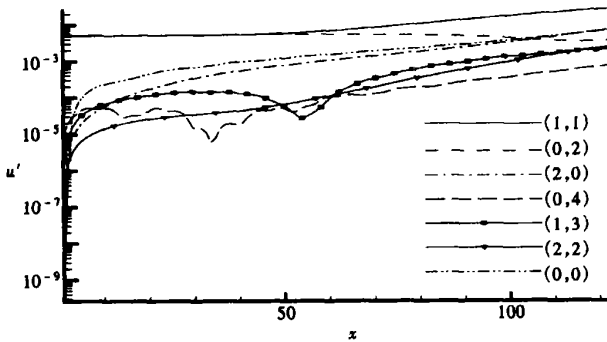


图 5 扰动幅值为 0.005 时各谐波增长曲线

3.2 二次失稳

在二次失稳的概念中,定义基本流 φ_b 由平均流及一个有限幅值的二维波组成^[4],即

$$\varphi_b = \varphi_0 + A \varphi_{r2},$$

式中 φ_0 为等温平板边界层的层流解, φ_{r2} 为二维波, A 为其幅值。

若由于二维波的存在而使得某些小幅值的三维波不稳定,就称为二次失稳。因此,为了研究二次不稳定性,需要在二维基本流 φ_b 上加一个三维小扰动 $\varepsilon \varphi_{r3}$,其幅值 ε 比 A 至少小一个量级。

通过在平均流入口处引入 1 个二维波和 1 个三维波可实现这一过程。其中二维波可以写成:

$$\varphi_{r2} = \varphi_{r2}(y) \exp[i(-\omega_{r2}t + \phi_{r2})] + c. c.,$$

所选的二维波是一个第二模态下增长率不大的 T_S 波,式中 c. c. 表示前面一项的共轭, ω_{r2} 表示频率,因为采用的是空间模式,所以 ω_{r2} 是实数, $\varphi_{r2}(y)$ 代表以入口处平均流剖面为基础解 O_S 方程所得速度、压力与温度等的特征函数。

加入的三维波可写成:

$$\varphi_{r3} = \varphi_{r3}(y) \exp[i(-\omega_{r3}t + \beta_{r3}z + \phi_{r3})] + c. c.,$$

其频率 ω_{r3} 为二维波频率 ω_{r2} 的一半,在计算中二维波和三维波的相位 ϕ_{r2} 、 ϕ_{r3} 都为零。

对 A 选取了 0.02, 0.03 和 0.04 这 3 种情况, ε 取 0.0001, $\omega_{r2} = 2.34$, $\omega_{r3} = 1.17$ 。对 β_{r3} 在 2.1 ~ 3.6 之间取了若干不同的值。 $\varphi_{r3}(y)$ 可以是 y 的任意函数,但应满足边界条件。

图 6 表示在入口处加入的三维波的波形,在向下游演化过程中,其形状将逐渐变成如图 7

所示的样子。当其形状不再变化后,即可以研究其幅值沿流向的放大率。图中所示的是在 β_{13} 为 2.3 时,在某一个 $x(x = 38.45)$ 位置处(该处三维波波形已基本保持不变),3 个不同二维初始扰动幅值下的三维波波形。这种波就是由于二次失稳激发出的不稳定波。可以看出,二维扰动幅值越大,三维波的幅值也越大。

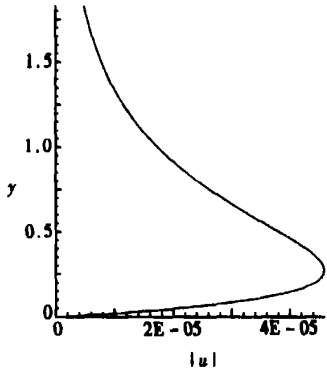


图 6 $x = 0$ 处三维波波形

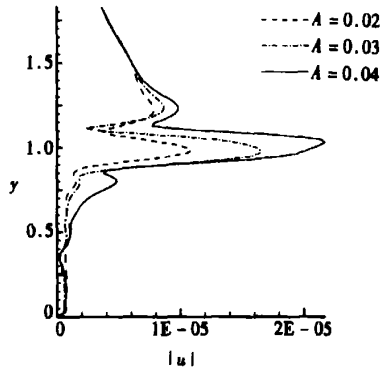


图 7 $x = 38.45$ 处三维波波形

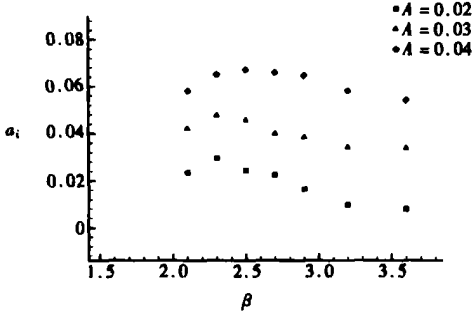


图 8 亚谐波增长率和展向波数的函数关系

在不可压缩流体的二次失稳理论中,对每一个给定的 A 值,都有一个可能使三维扰动不稳定的展向波数范围,且此范围随 A 的增大而增大,并有一个极大值。对我们所研究的超音速边界层,情况也如此,见图 8。其中横坐标表示的是三维波的展向波数,纵坐标表示的是三维波的流向增长率。从图上可以看出,随着二维波的初始幅值的增加,三维波的增长率整体变大。对应于 $A = 0.02$ 的情况,其最大放大率约为 2.8×10^{-2} ,比二维第 1 模态的二维 T_S 波的最大放大率 0.12×10^{-2} 大了 20 多倍,但是比第 2 模态的二维 T_S 波的最大放大率 3.85×10^{-2} 还要小。

我们引入的二维波流向波数 $\alpha_{r2} = 2.63$,图 8 中对应于 $A = 0.02$ 情况使三维波流向放大率最大的展向波数为 $\beta = 2.3$,二者之比为 1.13,或反过来,二者波长之比为 0.88,与不可压情况也不相同。

4 结论和讨论

通过直接数值模拟发现,对 $Ma_\infty = 4.5, Re = 0.9 \times 10^5$ 的超音速边界层而言,三波共振和二次失稳机制都存在,且都对某种展向波数的三维波的增长起作用。但二者对促进三维波增长的作用从下述意义上来说,并不是很大,当二维波的幅值小于 0.01 时,被激发起来的三维波的增长率比线性理论给出的最大增长率小。这一论断的一个间接的证明是最近 T. Cebeci 等人^[5] 总结几十年来转捩预测的工作时指出,对于从小扰动开始的正规转捩,只有半经验的 e^N 法才可以给出较满意的结果,而该方法并没有考虑各种非线性的作用。这实际隐含了下述事实,即转捩过程的大部分时间主要取决于增长最快的 T_S 波的线性增长,只有在扰动幅值比较大后,非线性因素才起作用。而非线性作用有多种多样,并不能肯定只有某一两种起主要或决定性作用。一旦非线性因素起作用,不管是哪种作用,转捩都很快发生。即使对最终的转捩位

置有点影响,与线性增长阶段在整个转捩过程中所占比重来说,其差别也并不大。实际上,如果坚持要研究最重要的非线性作用,那么最近王新军等人^[6]的研究表明由非线性作用引起的平均流变形可能是最重要的。因为一旦在平均流剖面中出现拐点,那么几乎所有的谐波都会同时出现,并且它们的增长率比在本文三波共振和二次失稳情况下找到的增长率大得多,所以会很快转捩。而当扰动幅值达到0.01的量级,这个拐点就会出现,这与使三波共振和二次失稳机制起重要作用的最小扰动幅值为同一量级。

[参 考 文 献]

- [1] 是勋刚. 湍流[M]. 天津: 天津大学出版社, 1994.
- [2] 赵耕夫. 可压缩平板边界层的二次亚谐不稳定性[J]. 天津大学学报, 2003, 36(3): 276—280.
- [3] Poinso T J, Lele S K. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows[J]. Journal of Computational Physics, 1992, 101: 104—129.
- [4] 周恒, 赵耕夫. 流动稳定性[M]. 北京: 国防工业出版社, 2004.
- [5] Cebeci T, Shao J P, Chen H H, et al. The preferred approach for calculating transition by stability theory[A]. In: Proceeding of International Conference on Boundary and Interior Layers [C/CD]. ONERA, Toulouse France, 2004.
- [6] 王新军, 罗纪生, 周恒. 平面槽道流中层流_湍流转捩的“breakdown”过程的内在机理[J]. 中国科学, G辑: 物理学, 力学, 天文学, 2005, 35(1): 71—78.

Numerical Study for the Resonant Triad Interaction and Secondary Instability in a Two Dimensional Supersonic Boundary Layer

DONG Ya_ni^{1, 2}, ZHOU Heng^{1, 2}

(1. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China;

2. Liu Hui Center of Applied Mathematics, Nankai and Tianjin University;
Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: Direct numerical simulation was done for a supersonic boundary layer, to see if the mechanism for the generation of sub_harmonic waves, similar to those for the incompressible flows, existed in the process of laminar_turbulent transition. The results show that mechanisms of both resonant triad and secondary instability do exist. Discussions were made on whether these two mechanisms are really important in laminar_turbulent transition.

Key words: resonant triad; secondary instability; supersonic boundary layer; T_S wave