

文章编号: 1000-0887(2006) 02_0144_07

常数激励对局部分岔的影响^{*}

吴志强, 陈予恕

(天津大学 机械学院力学系, 天津 300072)

(本刊编委陈予恕来稿)

摘要: 用奇异性理论讨论了常数激励对 $1/2$ 内共振系统周期解局部分岔的影响。研究表明, 常数激励项能否产生影响关键取决于低频振子中是否存在某些非线性项。常数激励, 一方面起主分岔参数的作用, 另一方面, 与系统中某些非线性项的系数一起确定分岔解基本类型、影响开折参数。在非退化条件下, 可不考虑三次非线性项的影响。

关键词: 内共振; 常数激励; 分岔

中图分类号: O322 **文献标识码:** A

引 言

常数激励是指系统因所受外部作用(力或力矩)本身或其部分恒定不变导致系统运动方程中出现的常数项。在许多工程结构中, 由于结构系统的线性模态间频率满足内共振条件, 导致参与共振的模态之间相互作用, 使得的系统的动力学行为与单模态运动时有相当大的区别^[1]。

到目前为止, 已经有许多有关非线性内共振系统动力学问题的研究报道。这些报道主要结合具体的研究对象, 如两自由度模型或杆、梁、直尺离散化模型, 讨论此类系统的自由振动、受强迫激励和/或参数激励作用下的响应。然而, 对系统平衡点位置发生改变所引起的系统非线性动力学行为(如分岔)的变化, 还研究得很少。

引起系统平衡位置变化的因素有很多, 比如: 系统所受的静态载荷(力或力矩)的变化; 安装误差导致实际平衡位置与设计位置不重合(如大型旋转机械轴承标高的安装误差); 重力场中的系统本身质量的变化等等。对线性系统来说, 这种改变不会影响平衡位置的稳定性, 但对非线性系统来说, 只要将系统新的平衡点移动到坐标原点, 就会发现由于非线性的作用, 系统平衡点的改变将影响平衡位置的稳定性, 从而有可能引起系统的分岔。故有必要研究这种有一定普遍性的现象对共振动力学行为可能产生的影响。

在研究金属切削过程^[2]的两自由度简化模型时, Verros 和 Natsiavas^[3]通过数值计算简单讨论了常数激励对 $1/2$ 内共振系统的自激振动的影响(见文献[2]图 8)。对于常数激励影响的一

* 收稿日期: 2004_07_31; 修订日期: 2005_10_31

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472078; 10102014); 天津市自然科学基金资助项目(043103611; 013604711)

作者简介: 吴志强(1968—), 男, 山西文水人, 教授, 博士(联系人, Tel: + 86_22_27402036; E_mail: zhiqw@tju.edu.cn)。

般规律,没有作出明确的回答。

Leblanc 和 Langford^[4]用奇异性理论方法系统研究了 1/2 内共振系统局部分岔的 Normal Form 及其普适开折。需要指出的是,该文并没有告诉我们主分岔参数的物理意义。我们从 Normal Form 的形式和两自由度系统的平均方程中得到启发,发现在弱耦合的非线性系统中,只有常数激励才能作为系统的主分岔参数。

本文通过奇异性理论分析,深入讨论了常数激励对 1/2 内共振系统局部非线性动力学的影响。

1 问题的提出

考虑如下平方非线性系统模型:

$$\ddot{x} + x + f_{01} + \mathfrak{G}_1(x, x^2, y, y^2) = 0, \quad \ddot{y} + 4y + f_{02} + \mathfrak{G}_2(x, x^2, y, y^2) = 0, \quad (1)$$

其中 $(\dot{}) = d()/dt$, f_{0j} ($j = 1, 2$) 为常数,非线性项为:

$$\begin{aligned} h_j = & h_{j,1}y^2 + h_{j,2}y + h_{j,3}xy + h_{j,4}x + h_{j,5}y^2 + h_{j,6}y^3 + \\ & h_{j,7}y^2 + h_{j,8}xy + h_{j,9}xy + h_{j,10}x^2 + \\ & h_{j,11}xy + h_{j,12}xy + h_{j,13}xy + h_{j,14}x^2 \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \quad (2)$$

由多尺度法计算可知,系统的一次近似解

$$\begin{cases} x = A_1(t_2)\sin(t_1 + B_1(t_2)) + f_{01} \\ y = A_2(t_2)\sin(2t_1 + B_2(t_2)) + \frac{1}{4}f_{02} \end{cases} \quad (t_1 = t, t_2 = \mathfrak{G}) \quad (3)$$

须满足的周期解存在条件^[5]

$$\frac{\partial A_1}{\partial t_2} = a_1 A_1 + [b_1 \cos(2B_1 - B_2) + b_2 \sin(2B_1 - B_2)] A_1 A_2, \quad (4a)$$

$$A_1 \frac{\partial B_1}{\partial t_2} = (a_2 - \mathfrak{T}) A_1 + [b_2 \cos(2B_1 - B_2) - b_1 \sin(2B_1 - B_2)] A_1 A_2, \quad (4b)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial t_2} = c_1 A_2 + [d_1 \cos(2B_1 - B_2) - d_2 \sin(2B_1 - B_2)] A_1^2, \quad (4c)$$

$$A_2 \frac{\partial B_2}{\partial t_2} = (c_2 - 2\mathfrak{T}) A_2 + [d_2 \cos(2B_1 - B_2) + d_1 \sin(2B_1 - B_2)] A_1^2; \quad (4d)$$

该方程组中的系数为:

$$a_1 = - \left[\frac{1}{2} h_{1,3} + \frac{1}{8} h_{1,9} f_{02} + \frac{1}{2} h_{1,13} f_{01} \right], \quad (4e)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} h_{1,4} + \frac{1}{8} h_{1,12} f_{02} + h_{1,14} f_{01}, \quad (4f)$$

$$b_1 = - \left[\frac{1}{2} h_{1,8} + \frac{1}{4} h_{1,12} \right], \quad b_2 = \left[\frac{1}{4} h_{1,9} - \frac{1}{2} h_{1,11} \right], \quad (4g)$$

$$c_1 = - \left[\frac{1}{2} h_{2,1} + \frac{1}{8} h_{2,6} f_{02} + \frac{1}{2} h_{2,11} f_{01} \right], \quad (4h)$$

$$c_2 = \frac{1}{4} h_{2,2} + \frac{1}{4} h_{2,12} f_{01} + \frac{1}{8} h_{2,7} f_{02}, \quad (4i)$$

$$d_1 = \left[\frac{1}{8} h_{2,14} - \frac{1}{8} h_{2,10} \right], \quad d_2 = - \frac{1}{8} h_{2,13}. \quad (4j)$$

由于原系统(1)只含有平方非线性项,系统中仅有的非平凡定常解为双模态解 ($A_1 \neq 0 \neq A_2$)。因此本文重点讨论系统的双模态解的分岔。

为分析方便起见,引入变换

$$r = A_1, \quad x = A_2 \cos(B_2 - 2B_1), \quad y = A_2 \sin(B_2 - 2B_1) \quad (5)$$

利用平均方程(4a)~(4d),可得到新变量的微分方程:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(a_1 + b_1x - b_2y), \\ \dot{x} = c_1x + (2a_2 - c_2)y + 2b_2xy + 2b_1y^2 + d_1r^2, \\ \dot{y} = -(2a_2 - c_2)x + c_1y - 2b_2x^2 - 2b_1xy + d_2r^2. \end{cases} \quad (6)$$

由 $\dot{r} = \dot{x} = \dot{y} = 0$ 可得双模态解 (r, x, y) 满足的方程组:

$$\begin{cases} a_1 + b_1x - b_2y = 0, \\ c_1x + (2a_2 - c_2)y + 2b_2xy + 2b_1y^2 + d_1r^2 = 0, \\ -(2a_2 - c_2)x + c_1y - 2b_2x^2 - 2b_1xy + d_2r^2 = 0. \end{cases} \quad (7a)$$

文献[4]研究此类问题的双模态运动的奇异性理论时,选用的芽的形式为:

$$\begin{cases} \gamma_1 \lambda + b_1x - b_2y, \\ \gamma_2 \lambda x + 2\gamma_3 \lambda y + 2b_2xy + 2b_1y^2 + d_1r^2, \\ -2\gamma_3 \lambda x + \gamma_2 \lambda y - 2b_2x^2 - 2b_1xy + d_2r^2. \end{cases} \quad (7b)$$

显然,这种形式隐含着如下的假设:(7b)中各式的阶数最低的项系数的变化,是相互关联的,不是独立的。

从系数表达式(4e, f)及(4h, i)可看出,只有在常数激励项 f_{01}, f_{02} , 才能将(7a)式中的系数 $a_1, c_1, 2a_2 - c_2$ 的变化关联起来,才能作为主分岔参数 λ 。有关芽(7b)的奇异性理论指出,与不存在主分岔参数 λ 的情况比,芽(7b)及其普适开折中包含的分岔行为要丰富得多,且 λ 对分岔解枝上分岔点的分布有重要的影响。因此,不准想象常数激励的存在将对系统(1)中的局部分岔有重要的影响。下面借助于奇异性理论讨论常数激励的对 $1/2$ 内共振系统的局部分岔影响。

2 双模态运动分岔

2.1 双模态解的分岔方程及普适开折

为考察常数激励的变化时系统双模态解的分岔问题,今假设 f_{01}, f_{02} 的线性变化可表示为:

$$f_{01} = f_{01} \lambda + f_{01}, \quad f_{02} = f_{02} \lambda + f_{02} \quad (f_{01}, f_{02} \text{ 不同时为 } 0), \quad (8)$$

这样就能包括常数激励的3种变化情况: f_{01}, f_{02} 中只有一个不变($f_{01} = 0, f_{02} = 1$ 或 $f_{01} = 1, f_{02} = 0$), 或同时改变($f_{01}, f_{02} \neq 0, f_{01} = 1$)。将式(8)代入式(7a)之系数 $a_1, c_1, a_2 - c_2/2$ 的表达式并整理可得:

$$a_1 = \gamma_1 \lambda + \varepsilon_1, \quad c_1 = \gamma_2 \lambda + \varepsilon_2, \quad a_2 - \frac{1}{2}c_2 = \gamma_3 \lambda + \varepsilon_3, \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= - \left[\frac{1}{8} h_{1,9} f_{02} + \frac{1}{2} h_{1,13} f_{01} \right], & \varepsilon_1 &= - \left[\frac{1}{2} h_{1,3} + \frac{1}{8} h_{1,9} f_{02} + \frac{1}{2} h_{1,13} f_{01} \right], \\ \gamma_2 &= - \left[\frac{1}{8} h_{2,6} f_{02} + \frac{1}{2} h_{1,11} f_{01} \right], & \varepsilon_2 &= - \left[\frac{1}{2} h_{2,1} + \frac{1}{8} h_{2,6} f_{02} + \frac{1}{2} h_{1,11} f_{01} \right], \\ \gamma_3 &= \left[h_{1,14} - \frac{1}{8} h_{2,12} \right] f_{01} + \frac{1}{8} \left[h_{1,12} - \frac{1}{2} h_{2,7} \right] f_{02}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2}h_{1,4} - \frac{1}{8}h_{2,2} + \left[h_{1,14} - \frac{1}{8}h_{2,12} \right] f_{01} + \frac{1}{8} \left[h_{1,12} - \frac{1}{2}h_{2,7} \right] f_{02},$$

从而分岔方程(7)可写为如下的形式:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 + \gamma_1 \lambda + b_1 x - b_2 y = 0, \\ (\varepsilon_2 + \gamma_2 \lambda)x + 2(\varepsilon_3 + \gamma_3 \lambda)y + 2b_2 xy + 2b_1 y^2 + d_1 r^2 = 0, \\ -2(\varepsilon_3 + \gamma_3 \lambda)x + (\varepsilon_2 + \gamma_2 \lambda)y - 2b_2 x^2 - 2b_1 xy + d_2 r^2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Leblanc 和 Langford^[4]讨论了如下两种情况: 无分岔参数——即 $\lambda \equiv 0$ (本文中对应无常数激励的情况: $f_{01} = f_{02} = 0$)、单分岔参数——即 λ 不恒等于 0 且 $\varepsilon_1 = 0$ 而对于 $\varepsilon_1 \neq 0$ 的情况, 未加讨论。

引入如下等价变换到方程组(10)中^[4]

$$x = \frac{1}{\gamma_1}(b_1 x - b_2 y), \quad y = \frac{1}{\gamma_1}(b_2 x + b_1 y), \quad r^2 = \frac{1}{2\gamma_1^2} |b_1 d_2 + b_2 d_1| r^2, \quad (11)$$

然后左乘矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_1 \gamma_2}{2\gamma_1^2} & -\frac{b_2 \gamma_2}{2\gamma_1^2} \\ 0 & \frac{b_2 \gamma_2}{2\gamma_1^2} & \frac{b_1 \gamma_2}{2\gamma_1^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma_3} \end{bmatrix},$$

则方程组(10)可简化为:

$$\begin{cases} \varepsilon + \lambda + x = 0, \\ (\sigma_1 \lambda + \mu)x + (\sigma_2 \lambda - \eta)y + y^2 + c(x^3 + xy^2) + ar^2 = 0, \\ (-\sigma_2 \lambda + \eta)x + (\sigma_1 \lambda + \mu)y - xy + c(x^2 y + y^3) + \delta r^2 = 0, \end{cases} \quad (12a)$$

其中

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}, \quad \sigma_1 = \frac{\gamma_2}{2\gamma_1}, \quad \sigma_2 = \frac{\gamma_3}{\gamma_1}, \quad \mu = \frac{\varepsilon_2}{2\gamma_1}, \quad \eta = -\frac{\varepsilon_3}{\gamma_1}, \quad (12b)$$

$$c = \frac{c}{2} \frac{\gamma_1}{b_1^2 + b_2^2}, \quad a = \frac{b_1 d_1 - b_2 d_2}{|b_1 d_2 + b_2 d_1|}, \quad \delta = \text{sgn}(b_1 d_2 + b_2 d_1). \quad (12c)$$

取 $\lambda' = \lambda + \varepsilon$, $\mu' = \mu - \sigma_1 \varepsilon$, $\eta' = \eta + \sigma_2 \varepsilon$, 可将式(12)化成:

$$\begin{cases} \lambda' + x = 0, \\ (\sigma_1 \lambda' + \mu')x + (\sigma_2 \lambda' - \eta')y + y^2 + ar^2 = 0, \\ (\eta' - \sigma_2 \lambda')x + (\sigma_1 \lambda' + \mu')y - xy + \delta r^2 = 0, \end{cases} \quad (13)$$

μ' 、 η' 为开折参数, λ' 为分岔参数。文献[4]指出, 在非退化条件

$$b_1 d_2 + b_2 d_1 \neq 0, \quad \gamma_1 \neq 0, \quad \gamma_2 \neq 0, \quad (\sigma_1 + 1)^2 + \sigma_2^2 \neq 0,$$

$$\sum (a, \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_2^2 - 2a\delta\sigma_1\sigma_2 + 2a\delta\sigma_2 + 2a^2\sigma_1 + a^2 + 4\sigma_1 \neq 0$$

满足的情况下, 式(13)的左端: 当 $\mu' = 0$, $\eta' = 0$ 时是 Normal Form; 当 $\mu' \neq 0$, $\eta' \neq 0$ 时是一个普适开折。这样, 式(12)的左端同样也是一个普适开折。即, 在非退化条件满足的情况下, 讨论原系统的双模态解的局部分岔, 不需考虑 3 次以上的非线性项。

2.2 奇异性理论分析

由式(13)的前两式可解得

$$x = -\lambda', \quad r^2 = -\frac{1}{\delta}[\sigma_2 \lambda^2 + (\sigma_1 + 1)\lambda y - \eta\lambda + \mu y],$$

代入式(13)的第3式得关于 y 的方程:

$$G = y^2 + [\sigma_2 - b(\sigma_1 + 1)]\lambda' y - (\sigma_1 + b\sigma_2)\lambda'^2 + (\eta b - \mu')\lambda' - (\eta' + \mu' b)y = 0 \tag{14}$$

Langford 的奇异性理论^[6]结果指出,可根据两个判别式(其中 $a = b\delta$):

$$\Delta_1 = \sum(a, \sigma_1, \sigma_2), \quad \Delta_2 = \frac{b(\sigma_1 + 1)^2 + \sigma_2(1 - \sigma_1)}{\delta}$$

以及 σ_1 的符号,将式(13)蕴涵的分岔分为两类4种(见表1)•

表1 分岔的分类及 Normal Form 分岔解特征

情况	Normal Form 分岔解的特征	σ_1	Δ_2	Δ_1
I	无解	\times	\times	< 0
II a	无解	< 0	> 0	> 0
II b	一个双边解枝	> 0	\times	> 0
II c	两个双边解枝	< 0	< 0	> 0

而在开折参数平面 (μ', η') 可能存在如下的转迁集:

1. Z_2 迟滞集($G = \partial G/\partial y = 0$):

$$\left. \begin{aligned} \eta' &= -b\mu' \\ \eta' &= -\frac{(\sigma_2 + b)}{\sigma_1}\mu' \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{(原点处),} \\ & \left[\text{倍周期点处 } y = \frac{\sigma_2\mu' + \sigma_1\eta'}{\sigma_1}, \lambda' = \frac{\mu'}{\sigma_1} \text{ 处} \right]; \end{aligned}$$

2. 双重极限点集($G = \partial G/\partial y = 0$):

$$\mu' = 0, \eta' \neq 0;$$

3. 非对称分岔集($G = \partial G/\partial y = \partial G/\partial \lambda' = 0$):

$$\eta' = \varphi_{1,2}\mu', \quad \varphi_{1,2} = -[b(\sigma_1 + 1) + \sigma_2 \pm \sqrt{\Delta_1}]/(2\sigma_1)$$

表2 不同情形下的转迁集组合

转迁集	类型			
	I	II a	II b	II c
迟滞集				
双重极限点集		✓		
非对称分岔集	\times	\times	$\varphi_1(\delta = 1)$ $\varphi_2(\delta = -1)$	$\varphi_{1,2}$

这些转迁集有的情况下可能不出现(见表2×标注的情形)•但在上述任何情况下,所对应的转迁集都将开折参数平面分成不同的区域•在不同的区域,不仅分岔图的拓扑结构不相同,而且倍周期分岔点、双模态的主解枝分岔点、双模态解的非对称分岔点在 λ 轴上的分布也不同•

方程(13)的各种分岔图可参考文献[4]的工作•现在讨论本文所研究的系统的双模态解的分岔与文献[4]给出的分岔图的不同之处•

今以情形II c 为例来说明 $\varepsilon \neq 0$ 对分岔图的影响(见图1)•由图可以看出,与 $\varepsilon = 0$ 时的情况相比, $\varepsilon \neq 0$ 对分岔图的影响包括两方面:在开折参数的空间 (μ, η) 内使得分岔的组织中心发生平移,从 $(0, 0)$ 移到 $(\sigma_1\varepsilon, \sigma_2\varepsilon)$;在摄动保持分岔图上,使分岔图平行于分岔参数 λ 轴平

移。

2.3 常数激励的影响

综合式(12a)、(8)、(9)、(4e, f)及(4h, i), 可得普适开折中系数 ε 、 μ 、 η 、 σ_1 、 σ_2 的表达式。从这些系数的表达式, 可看出常数激励对双模态解的分岔产生影响的前提条件是: 对平方非线性系统, 低频振子中至少存在非线性项 x_2^2 、 x_2^3 之一; 对高次非线性系统, 该条件一般化为低频振子方程中存在形如 $x_2^k(x, y)$ 这样的非线性函数。一般而言, 后者的分岔图更复杂些, 有可能出现前者分岔图的折叠等现象。

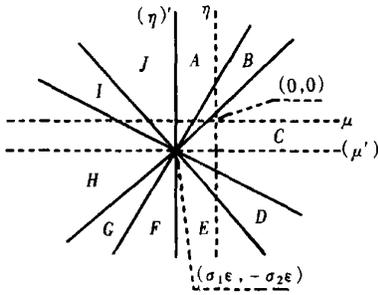


图 1(a) 变迁集(图中实线)

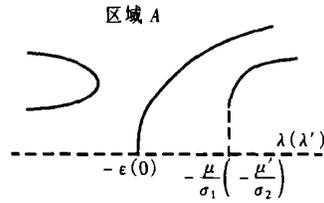


图 1(b) 分岔图

(括号中的值为 λ 轴的坐标值)

另外, 在原系统的向量场满足非退化条件的情况下, 研究系统双模态解分岔时勿须考虑三次以上的非线性项, 并且分岔解的基本类型及变迁集的确定取决于如下形式的项:

对低频振子: $x_2^2(x, y), x_2^3(x, y)$;

对高频振子: $y_2^3(x, y), y_2^4(x, y)$ 。

若 $f_{01} = f_{02} = 0$, 即单常数激励或双常数激励正比于 λ 变化时, 低频振子的线性阻尼项将使 $\varepsilon \neq 0$, 从而使分岔的组织中心发生平移、主参数 λ 的分岔值也发生变化。若 f_{01}, f_{02} 不同时为 0, $x_2^k(x, y)$ 也会产生同样的影响。

3 结果与讨论

本文的讨论表明, 对于 1/2 内共振系统的分岔来说, 常数激励对双模态周期解的分岔可能有很大的影响。其前提条件是, 低频振子中存在 $x_2^k(x, y)$ 的非线性项。若系统中存在三次以上非线性项, 常数激励对可能存在的单模态周期解的分岔同样有影响。由于篇幅的限制且讨论相对简单, 本文未给出有关内容。

在非退化情况下, 一方面, 常数激励项依赖于系统非线性项的系数, 决定了分岔的类型(情形 I、IIa、IIb、IIc); 另一方面它能同时控制单、双模态分岔。系统中的线性非耦合项系数可能影响开折参数的值, 从而能改变常数激励变化时不同分岔发生的先后顺序。

[参 考 文 献]

- [1] Chen Y S, Leung Y T. Bifurcation and Chaos in Engineering[M]. London: Springer-Verlag, 1998.
- [2] Rivin E I, Kang H. Improvement of machining conditions for slender parts by tuned dynamic stiffness of tool[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacturing, 1989, 29(3): 361—376.
- [3] Verros G, Natsiavas S. Self-excited oscillators with asymmetric nonlinearities and one to two internal resonance[J]. Nonlinear Dynamics, 1998, 17(4): 325—346.

- [4] Leblanc V G, Langford W F. Classification and unfoldings of 1: 2 resonant Hopf bifurcation [J]. Arch Rational Mech Anal, 1996, **136**(4): 305—357.
- [5] Nayfeh A H. Nonlinear Oscillations [M]. New York: Wiley-Interscience, 1979.
- [6] Golubitsky M, Schaeffer D G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1985.

Effects of Constant Excitation on Local Bifurcation

WU Zhi_qiang, CHEN Yu_shu

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: The effects of the constant excitation on the local bifurcation of the periodic solutions in the 1: 2 internal resonant systems were analyzed based on the singularity theory. It is shown that the constant excitation make influence only when there exist nonlinear terms, in the oscillator with lower frequency. Besides acting as main bifurcation parameter, the constant excitation, together with coefficients of some nonlinear terms, may change the values of unfolding parameters and the type of the bifurcation. Under the non_degenerate cases, the effect of the third order terms can be neglected.

Key words: internal resonance; constant excitation; bifurcation