文章编号: 1000_0887(2006) 02_0151_08

重建极性连续统理论的基本定律和原理(X)——主均衡定律*

戴天民

(辽宁大学 数学系和数学应用中心, 沈阳 110036)

(我刊原编委戴天民来稿)

摘要: 通过对诸主均衡定律和应用 Noether 定理得出的守恒定律进行比较, 自然地导出微极连续统力学的 1 个统一的主均衡定律和 6 个物理上可能的均衡方程• 其中, 通过扩展众所周知和惯用的能量动量张量的概念, 得到相当一般的定名为能量_动量的、能量_角动量的和能量_能量的守恒定律和均衡方程• 显然, 在这后 3 种情况下的主均衡定律中, 物理场量是难以凭借直觉假定出来的• 最后, 作为特殊情形, 直接推演出若干现有的结果•

关 键 词: 统一的主均衡定律; 物理场量; 守恒定律; 能量_动量; 能量_角动量; 能量_能量

中图分类号: O33 文献标识码: A

引 言

本文是诸前文[1] ~ [9] 的直接延续•

在连续统场论中存在数种推导局部均衡方程的方法, 在特定力学问题中应用所谓主均衡定律进行推导就是其中之一•

诸连续统场论的均衡定律, 均可用某一物理场量的时间变化率与物体中的源和通过表面的流的均衡加以表述• 于是, 如果 ϕ 是每单位体积的一个场, $\boldsymbol{g}$ 是体源, 而 τ 是每单位面积的流, 则主均衡定律, 亦即, 任一均衡定律的数学表达式可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V-\sigma}\phi\mathrm{d}v-\oint_{S-\sigma}\boldsymbol{n}\cdot\tau\mathrm{d}a-\int_{V-\sigma}\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}v=0\cdot \tag{1}$$

上列表述是可以存在以其正向单位法线 $\boldsymbol{n}$ 方向内速度 $\boldsymbol{u}$ 掠过物体的间断面 σ• 由(1) 可以写出下列主均衡定律的局部形式和局部跳变条件:

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}-\nabla\cdot\tau-\boldsymbol{g}=\mathbf{0}\qquad(在\ V-\sigma 内) \tag{2}$$

和

$$[\phi(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})-\tau]\cdot\boldsymbol{n}=\mathbf{0}\qquad(在\ \sigma 上)\cdot \tag{3}$$

* 收稿日期: 2004_04_09; 修订日期: 2005_11_12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072024; 10472041)

作者简介: 戴天民(1931—) , 男, 满族, 辽宁开原人, 教授, 博士, 已发表专著译著 12 部, 论文 60 余篇(Tel: + 86_24_86870115; Fax: + 86_24_86852421; E_mail: tianmin_dai@ yahoo. com. cn)•

这些表达式已被若干作者提出并加以应用, 例如, 对于经典连续统力学者有 Truesdell[10] 和黄[11], 对于热力连续统则有 Eringen[12], 对于多场问题则有 Mueller[13], 而对于微极和微态连续统则有 Eringen[14]•

对主均衡定律(1) 进行局部化, 则得

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} - \nabla\cdot\tau - g = \hat{g} \qquad (\text{在 } V-\sigma) \tag{4}$$

和

$$[\phi(v-u) - \tau - \hat{G}]\cdot n = 0 \qquad (\text{在 } \sigma \text{ 上}), \tag{5}$$

这里

$$\int_{V-\sigma}\hat{g}\,\mathrm{d}v + \int_{\sigma}[\hat{G}]\cdot\mathrm{d}a = 0• \tag{6}$$

场量 $\hat{g}$ 和 $\hat{G}$ 称为局部化剩余• 表达式(4)、(5)、(6) 便是非局部连续统力学的主均衡方程•

物理场量 ϕ, τ, $\hat{g}$ 和 $\hat{G}$ 的具体形式已由 Eringen[15] 给出• 在 1997 年我们已在文献[16] 中把所有上述结果推广到非局部极性热力连续统的更为一般的情形, 并推导出 3 组均衡方程和跳变条件•

这里要强调的是在文献[10] ~ [16] 中取得的成果均属于传统(非耦合) 的连续统场论理论范畴•

我们认为, 明确物理场量 ϕ、τ 和 g 应具有什么形式, 主均衡定律(1) 方真实可用, 这才是最有意义和重要的• 它是否只能应用到上述已知的基本均衡方程的情形? 在式(1) 中, 除前已提及的物量场量外是否还可能有其它的?

本文的目的就是试图回答这些问题• 解决问题的关键在于对式(1) 中的诸物理场量要明确它们的力学意义, 并给出它们的具体表达形式•

1 非传统(耦合) 的守恒定律和均衡方程

Jaric[17] 应用 Noether 定理推导出线性微极弹性静力学中的 J 积分型的守恒定律• 他的工作是对 Knowles 和 Sternberg[18] 工作的推广•

Fletzer[19] 的经典连续统力学的结果, 已被戴推广到微极弹性动力学的情形• 金[20] 根据微分变分原理给出一类非保守场的守恒定律• 戴[21] 曾提出了微极连续统的若干路径无关微分• 后来, 在 1989 年, Vukobrat[22] 也独立地推导出我们的部分结果•

蒋[23] 曾指出了 Knowles 和 Sternberg 的守恒定律与 Fletzer 的属于不同的范畴; 前者是一种单一的面积分, 而后者则由两项组成, 一项是面积分, 另一项是体积分•

本文提出的微极连续统守恒定律是属于 Fletzer 型的•

非传统的微极连续统 Noether 定理可以表述如下:

如果位移矢量 u_i 和微转角矢量 φ_i 对 R 中所有 ξ_α ($\alpha = i, 4$, $\xi_i = x_i$, $\xi_4 = t$) 满足 Euler_Lagrange 方程组

$$L_{,u_i} - \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}L_{,u_{i,\alpha}} - \rho f_i = 0, \tag{7}$$

$$L_{,\varphi_i} - \frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}L_{,\varphi_{i,\alpha}} - \rho(l_i + \varepsilon_{ijk}x_jf_k) = 0, \tag{8}$$

则由下式定义的泛函 F

$$F = \int_R L \mathrm{d}\xi \tag{9}$$

是在 (u_i, φ_i) 的无限小不变的,当且仅当

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(La_4 + L_{,\dot{u}_i} p_i + L_{,\dot{\varphi}_i} q_i) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}(La_j + L_{,u_{i,j}} p_i + L_{,\varphi_{i,j}} q_i) + \rho[f_i p_i + (l_i + \varepsilon_{ijk} x_j f_k) q_i] = 0 \tag{10}$$

与之相应的积分形式则为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V (La_4 + L_{,\dot{u}_i} p_i + L_{,\dot{\varphi}_i} q_i) \mathrm{d}v + \oint_S (La_j + L_{,u_{i,j}} p_i + L_{,\varphi_{i,j}} q_i) \mathrm{d}a + \int_V \rho[f_i p_i + (l_i + \varepsilon_{ijk} x_j f_k) q_i] \mathrm{d}v = 0, \tag{11}$$

这里 $L = W - K$、W、K、f_i 和 l_i 分别为 Lagrange 密度、内能、动量、体力密度和体矩密度. 另外,变换族 $(\xi_\alpha, u_i, \varphi_i) \to (\bar{\xi}_\alpha, \bar{u}_i, \bar{\varphi}_i)$ 和 p_i、q_i 定义如下:

$$\bar{\xi}_\alpha = \xi_\alpha + a_\alpha \eta + O(\eta^2), \tag{12}$$

$$\bar{u}_i = u_i + b_i \eta + O(\eta^2), \tag{13}$$

$$\bar{\varphi}_i = \varphi_i + c_i \eta + O(\eta^2) \tag{14}$$

和

$$p_i = b_i - u_{i,\alpha} a_\alpha, \tag{15}$$

$$q_i = c_i - \varphi_{i,\alpha} \varphi_\alpha; \tag{16}$$

其中

$$a_\alpha = \left.\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}, \quad b_i = \left.\frac{\partial u_i}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}, \quad c_i = \left.\frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}. \tag{17}$$

显然,在连续统场论中所取用的 Legrange 密度 L 的形式,对构造守恒定律和跳变条件起着决定性作用.

根据我们以前的工作[3, 24],现把微极连续统的非传统 Lagrange 密度取成下列形式:

$$L = W - K = [\boldsymbol{t} : \Delta \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}) : \Delta \varphi] - \frac{\rho}{2}[(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\varphi} \times \boldsymbol{x}) \cdot (\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\varphi} \times \boldsymbol{x}) + \sigma \cdot \dot{\varphi}] =$$

$$t_{ij} u_{j,i} + (m_{ij} + \varepsilon_{ilm} x_l t_{mj}) \varphi_{j,i} - \frac{\rho}{2}[(\dot{u}_i + \varepsilon_{ijk} \dot{\varphi}_j x_k)(\dot{u}_i + \varepsilon_{ijk} \varphi_j x_k) + \sigma_i \dot{\varphi}_i], \tag{18}$$

其中,σ、$\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 分别是微自旋密度、Cauchy 应力张量和偶应力张量.

2 微极连续统的非传统主均衡定律和均衡方程

请注意,从现在起就要用我们统一的记号和表达式详细阐述问题.

把下列主均衡定律(1)* 和守恒定律(11) 进行比较, 即可给出物理场量 ϕ、τ 和 g 的表达式. 它们应具有下列形式:

$$\phi = La_4 + L_{,\dot{u}_i} p_i + L_{,\dot{\varphi}_i} q_i, \tag{19a}$$

$$\tau = -(La_j + L_{,u_{j,i}} p_i + L_{,\varphi_{j,i}} q_i) \boldsymbol{e}_j, \tag{19b}$$

$$g = -\rho[f_i p_i + (l_i + \varepsilon_{ijk} x_j f_k) q_i]. \tag{19c}$$

于是统一的非传统的主均衡定律可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \phi \mathrm{d}v - \oint_S \boldsymbol{n} \cdot \tau \mathrm{d}a - \int_V g \mathrm{d}v = 0. \tag{1*}$$

一旦给出 Lagrange 密度 L 的具体形式,则上列诸表达式即可自然推导出来• 下面我们就来书写微极连续统的非传统(耦合)主均衡定律的物理场量 ψ, τ 和 g 以及均衡方程•

2.1 动量矩

现引进下列变换族

$$\bar{x}_i = x_i,\quad \bar{t} = t,\quad \bar{u}_i = u_i + A_i\eta,\quad \bar{\varphi}_i = \varphi_i, \tag{20}$$

它表示刚体平移 $(A_i \neq 0)$• 于是 $a_\alpha = 0,\ b_i = A_i,\ C_i = 0,\ p_i = A_i,\ q_i = 0$• 故得

$$\psi = -\boldsymbol{A}\cdot[\rho(\boldsymbol{u} + \dot{\varphi}\times\boldsymbol{x})], \tag{21a}$$

$$\tau = -\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}, \tag{21b}$$

$$g = -\boldsymbol{A}\cdot(\rho\boldsymbol{f})\cdot \tag{21c}$$

把式(21)代入式(1)*,则得非传统的动量均衡方程(参阅文献[1]):

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\rho(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\varphi}\times\boldsymbol{x})] + \Delta\cdot\boldsymbol{t} + \rho\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}\cdot \tag{22}$$

2.2 角动量

现引进下列变换族

$$\bar{x}_i = x_i,\quad \bar{t} = t,\quad \bar{u}_i = u_i,\quad \bar{\varphi}_i = \varphi_i + B_i\eta, \tag{23}$$

它表示刚体转动 $(B_i \neq 0)$• 于是 $a_\alpha = 0,\ b_i = \varepsilon_{ijk}B_jx_k,\ C_i = B_i,\ p_i = 0,\ q_i = B_i$• 故得

$$\psi = -\boldsymbol{B}\cdot[\rho(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{x}\times(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\varphi}\times\boldsymbol{x}))], \tag{24a}$$

$$\tau = -\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}), \tag{24b}$$

$$g = -\boldsymbol{B}\cdot[\rho(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f})]\cdot \tag{24c}$$

把式(24)代入式(1)*,则得非传统的角动量均衡方程(参阅文献[1]):

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\rho[\boldsymbol{s} + \boldsymbol{x}\times(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\varphi}\times\boldsymbol{x})]\right\} + \Delta\cdot(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}) + \rho(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{0}\cdot \tag{25}$$

2.3 能量

现引进下列变换族

$$\bar{x}_i = x_i,\quad \bar{t} = t + C_4\eta,\quad \bar{u}_i = u_i,\quad \bar{\varphi}_i = \varphi_i, \tag{26}$$

它表示时间推移 $(C_4 \neq 0)$• 于是 $a_i = 0,\ a_4 = C_4,\ b_i = 0,\ C_i = 0,\ p_i = -\dot{u}_iC_4,\ q_i = -\dot{\varphi}_iC_4$• 故得

$$\psi = \left\{W + \frac{\rho}{2}[(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\varphi}\times\boldsymbol{x})\cdot(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\varphi}\times\boldsymbol{x}) + \sigma\cdot\varphi]\right\}C_4, \tag{27a}$$

$$\tau = [\boldsymbol{t}\cdot\dot{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t})\cdot\dot{\varphi}]C_4, \tag{27b}$$

$$g = \rho[\boldsymbol{f}\cdot\dot{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{l} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{F})\cdot\dot{\varphi}]C_4\cdot \tag{27c}$$

故得非传统的能量均衡方程(参阅文献[1]):

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{W + \frac{\rho}{2}[(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\varphi}\times\boldsymbol{x})\cdot(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\varphi}\times\boldsymbol{x}) + \sigma\cdot\varphi]\right\} - \Delta\cdot[(\boldsymbol{t}\cdot\dot{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t})\cdot\dot{\varphi}] - \rho[\boldsymbol{f}\cdot\dot{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{l} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f})\cdot\dot{\varphi}] = \boldsymbol{0}\cdot \tag{28}$$

2.4 能量_动量

现引进下列变换族

$$\bar{x}_i = x_i + C_i\eta,\quad \bar{t} = t,\quad \bar{u}_i = u_i,\quad \bar{\varphi}_i = \varphi_i, \tag{29}$$

它表示坐标平移 $(C_i \neq 0)$• 于是 $a_i = C_i,\ a_4 = 0,\ b_i = 0,\ c_i = 0,\ p_i = -u_{i,j}C_j,\ q_i = -\varphi_{i,j}C_j$• 故得

$$\psi = -\rho[(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\varphi}\times\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{u}\Delta) + (\sigma + \boldsymbol{x}\times(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\varphi}\times\boldsymbol{x}))\cdot(\varphi\Delta)]\cdot\boldsymbol{C}, \tag{30a}$$

$$\tau = [L\boldsymbol{I} - \boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{u}\nabla) - (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t})\cdot(\varphi\nabla)]\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{C}, \tag{30b}$$

$$g = -\rho[\boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{u}\nabla) + (\boldsymbol{l} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f})\cdot(\varphi\nabla)]\cdot\boldsymbol{C}. \tag{30c}$$

把式(30)代入式(1)*，则得非传统的坐标平移均衡方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big\{\rho[(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\varphi}\times\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{u}\nabla) + (\dot{\sigma} + \boldsymbol{x}\times(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\varphi}\times\boldsymbol{x}))\cdot(\varphi\nabla)]\Big\} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[L\boldsymbol{I} - \boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{u}\nabla) - (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t})\cdot(\varphi\nabla)] + \rho[\boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{u}\nabla) + (\boldsymbol{l} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f})\cdot(\varphi\nabla)] = \boldsymbol{0}. \tag{31}$$

把 Eshelby[25,26]对经典弹性静力学和 Jaric[17]对微极弹性静力学提出的能量_动量张量的概念加以推广,则表达式(31)可以称为微极连续统力学的能量_动量均衡方程. (30b)中的 $\boldsymbol{P}$ 就是广义的能量_动量张量.

2.5 能量_角动量

现引进下列变换族

$$\bar{x}_i = x_i + \varepsilon_{ijk}D_j x_k\eta,\quad \bar{t} = t,\quad \bar{u}_i = u_i + \varepsilon_{ijk}D_j u_k\eta,\quad \bar{\varphi}_i = \varphi_i + \varepsilon_{ijk}D_j\varphi_k\eta, \tag{32}$$

它表示坐标转动 $(D_j \neq 0)$. 于是

$$a_i = \varepsilon_{ijk}D_j x_k,\quad a_4 = 0,\quad b_i = \varepsilon_{ijk}D_j u_k,\quad C_i = \varepsilon_{ijk}D_j\varphi_k,$$

$$p_i = (\varepsilon_{ijk}u_k - u_{i,l}\varepsilon_{ljk}x_k)D_j,\quad q_i = (\varepsilon_{ijk}\varphi_k - \varphi_{i,l}\varepsilon_{ljk}x_k)D_j.$$

故得

$$\phi = \rho\Big\{(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\varphi}\times\boldsymbol{x})\cdot\bar{\boldsymbol{p}} + [\boldsymbol{s} + \boldsymbol{x}\times(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\varphi}\times\boldsymbol{x})]\cdot\bar{\boldsymbol{q}}\Big\}\cdot\boldsymbol{D}, \tag{33a}$$

$$\tau = \Big\{L\boldsymbol{I}\cdot\varepsilon\cdot\boldsymbol{x} - [\boldsymbol{t}\cdot\bar{\boldsymbol{p}} + (\boldsymbol{l} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t})\cdot\bar{\boldsymbol{q}}]\Big\}\cdot\boldsymbol{D}, \tag{33b}$$

$$g = -\Big\{\rho\boldsymbol{f}\cdot\bar{\boldsymbol{p}} + (\boldsymbol{l} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f})\cdot\bar{\boldsymbol{q}}\Big\}\cdot\boldsymbol{D}, \tag{33c}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{p}} = \varepsilon\cdot\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\nabla)\cdot\varepsilon\cdot\boldsymbol{x}, \tag{34a}$$

$$\bar{\boldsymbol{q}} = \varepsilon\cdot\varphi - (\varphi\nabla)\cdot\varepsilon\cdot\boldsymbol{x}. \tag{34b}$$

把式(33)代入式(1)*，则得非传统的坐标转动均衡方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\rho\Big\{(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\varphi}\times\boldsymbol{x})\cdot\bar{\boldsymbol{p}} + [\boldsymbol{s} + \boldsymbol{x}\times(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\varphi}\times\boldsymbol{x})]\cdot\bar{\boldsymbol{q}}\Big\}\Big] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}[\boldsymbol{t}\cdot\bar{\boldsymbol{p}} + (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t})\cdot\bar{\boldsymbol{q}}] - \rho[\boldsymbol{f}\cdot\bar{\boldsymbol{p}} + (\boldsymbol{l} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f})\cdot\bar{\boldsymbol{q}}] = \boldsymbol{0}. \tag{35}$$

与表达式(31)对应,我们愿把表达式(35)称为微极连续统力学能量_角动量均衡方程.

2.6 能量_能量

现引进变换族

$$\bar{x}_i = x_i + Ex_i\eta,\quad \bar{t} = t + Et\eta,\quad \bar{u}_i = u_i + Eu_i\eta,\quad \bar{\varphi}_i = \varphi_i + E\varphi_i\eta, \tag{36}$$

它表示标量变化 $(E \neq 0)$. 于是

$$a_i = Ex_i,\quad a_4 = Et,\quad b_i = Eu_i,\quad C_i = E\varphi_i,$$

$$p_i = E(u_i - u_{i,j}x_j - \dot{u}_i t),\quad q_i = E(\varphi_i - \varphi_{i,j}x_j - \dot{\varphi}_i t).$$

故得

$$\phi = E\Big\{Lt - \rho\Big\{(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\varphi}\times\boldsymbol{x})\cdot\bar{\boldsymbol{p}} + [\boldsymbol{s} + \boldsymbol{x}\times(\dot{\varphi}\times\boldsymbol{x})]\cdot\bar{\boldsymbol{q}}\Big\}\Big\}, \tag{37a}$$

$$\tau = E[L\boldsymbol{x} + \boldsymbol{t}\cdot\bar{\boldsymbol{p}} + (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t})\cdot\bar{\boldsymbol{q}}], \tag{37b}$$

$$g = E\rho[\boldsymbol{f}\cdot\bar{\boldsymbol{p}} + (\boldsymbol{l} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f})\cdot\bar{\boldsymbol{q}}], \tag{37c}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\Delta)\cdot\boldsymbol{x} - \dot{\boldsymbol{u}}\,t, \tag{38a}$$

$$\bar{\boldsymbol{q}} = \varphi - (\varphi\Delta)\cdot\boldsymbol{x} - \dot{\varphi}\,t\cdot \tag{38b}$$

把式(37)代入式(1)*则得非传统的标量变化均衡方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[L\,t - \rho\Big\{(\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\varphi}\times\boldsymbol{x})\cdot\bar{\boldsymbol{p}} + [\boldsymbol{s} + \boldsymbol{x}\times(\dot{\varphi}\times\boldsymbol{x})]\cdot\bar{\boldsymbol{q}}\Big\}\Big] -$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}[L\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{t}\cdot\bar{\boldsymbol{p}} + (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t})\cdot\bar{\boldsymbol{q}}] - \rho[\boldsymbol{f}\cdot\bar{\boldsymbol{p}} + (\boldsymbol{l} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f})\cdot\bar{\boldsymbol{q}}] = 0\cdot \tag{39}$$

与表达式(31)和(35)对应, 我们愿把表达式(39)称为能量_能量均衡方程•

3　特殊情况

显然, 上述微极连续物理场量 ψ、τ、g 和相应的非传统均衡方程, 已把几乎所有相关文献中的结果都作为特殊情形包括在内• 为比较和清楚起见, 我们现来推导出某些作者得到的结果• 为简单起见, 我们在下面只列出相应情形下不带变换常量的物理场量 ψ、τ、g 的表达式•

3.1　偶应力理论

把微转动角 φ 用由 $\omega = (1/2)\,\Delta\times\boldsymbol{u}$ 定义的宏转动角代替, 即可得我们在文献[3]中得到的非传统的偶应力理论的结果•

3.2　半耦合的微极连续统理论

略去由于微转角速度引起的附加速度, 亦即, 假定 $\dot{\varphi}\times\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 则 Lagrange 密度具有下列形式:

$$L = W - K = [\boldsymbol{t}:\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}):\Delta\varphi] - \frac{\rho}{2}(\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}} + \sigma\cdot\dot{\varphi})\cdot \tag{40}$$

由式(40)即可得出半耦合的微极连续统理论的物理场量 ψ, τ 和 g•

3.3　传统(非耦合)的微极连续统理论

取 Lagrange 密度的形式为

$$L = W - K = [\boldsymbol{t}:\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{m}:\Delta\varphi)] - \frac{\rho}{2}(\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}} + \sigma\cdot\dot{\varphi})\cdot \tag{41}$$

并略去由体力引起的附加体矩的影响, 即可得到传统的微极连续统的物理场量 ψ、τ 和 g• 这些便是戴[27]和金[20]给出的结果•

3.4　静力情形

在静力情况下, 位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 和微转动矢量 φ 与时间无关, 故 $K = 0$, 而且

$$L = W = \boldsymbol{t}:\Delta\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}):\Delta\varphi\cdot \tag{42}$$

于是微极连续统静力学的物理场量 ψ、τ 和 g 更易求得•

另外, 如果我们假定 $g = 0$, 则微极弹性静力学的三维 J_k、L_k 和 M 积分可分别由(30b)、(33b)和(37b)自然地推演出来, 即:

$$J_k = \int_S\Big\{W\delta_{lk} - t_{lj}\,u_{j,k} - (m_{lj} + \varepsilon_{lmn}x_m t_{nj})\,\varphi_{j,k}\Big\}n_l\,\mathrm{d}s = \int_S J_{lk}\,n_l\,\mathrm{d}s = 0, \tag{43}$$

$$L_k = \int_S\Big\{\varepsilon_{kij}(P_{li}x_j + t_{li}u_j) + (m_{li} + \varepsilon_{lmn}x_n t_{ni})\,\varphi_j\Big\}n_l\,\mathrm{d}s = \int_S L_{lk}\,n_l\,\mathrm{d}s = 0, \tag{44}$$

$$M = \int_S\Big\{P_{lk}x_k - t_{lk}u_k - (m_{lk} + \varepsilon_{lmn}x_m t_{nk})\,\varphi_k\Big\}n_l\,\mathrm{d}s = \int_S M_l n_l\,\mathrm{d}s = 0, \tag{45}$$

这里我们愿把 J_{lk}、L_{lk} 和 M_l 分别称为广义的能量_动量张量、能量_角动量张量和能量_能量矢

量•

再进一步, 如果我们略去由于面力引起的附加面矩, 则 J_k 积分(43)即归结为下列形式:

$$J_k^* = \int_S (W\delta_{lk} - t_{lj} u_{j,k} - m_{lj} \varphi_{j,k}) n_l \mathrm{d}s = \int_S J_{lk}^* n_l \mathrm{d}s = 0 \tag{46}$$

这便是由 Jaric[17]得到的结果•

4 结 束 语

通过比较主均衡定律和用 Noether 定理推导出的守恒定律, 我们已给出建立微极连续统的统一的主均衡定律和所有 6 个物理上可能的均衡方程的物理场量 ψ、τ和g 的具体表达式• 因此, 在引言中提到的两个问题应该说是已经得到阐明•

统一的主均衡定律也可按前述处理方法应用到非局部连续统力学• 鉴于非局部场论的现有文献中尚存在着某些理论上的矛盾, 故在此文中不拟加以论述• 但是我们要在另文中专门对非局部微极连续统力学问题进行研讨•

[参 考 文 献]

[1] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅰ)——微极连续统[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(10): 991—997.

[2] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅱ)——微态连续统理论和偶应力理论[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(10): 998—1004.

[3] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅲ)——Noether 定理[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(10): 1005—1011.

[4] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅳ)——表面守恒积分[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(11): 1101—1107.

[5] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅴ)——极性热力连续统[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(11): 1108—1113.

[6] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅵ)——质量和惯性守恒定律[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(12): 1211—1216.

[7] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅶ)——增率型[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(12): 1217—1221.

[8] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅷ)——全功能原理[J]. 应用数学和力学, 2005, **26**(3): 287—292.

[9] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅸ)——热力学[J]. 应用数学和力学, 2005, **26**(6): 653—658.

[10] Truesdell C. A First Course in Rational Continuum Mechanics[M]. Vol Ⅰ. New York: San Francisco, London: Academic Press, 1977.

[11] 黄筑平. 连续介质力学基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[12] Eringen A C. Continuum Physics[M]. Vol Ⅱ. New York: Springer_Verlag, 1976.

[13] Mueller I. Thermodynamics[M]. Boston, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1985.

[14] Eringen A C. Continuum Physics[M]. Vol Ⅳ. New York: Springer_Verlag, 1976.

[15] Eringen A C. Nonlocal elasticity and waves[A]. In: Thoft-Christensen P Ed. Continuum Mechanics Aspect of Geodynamics and Rock Fracture Mechanics[C]. Dordrecht: D Reidel Publ Co, 1974, 81—105.

[16] 戴天民. 三组非局部热性热力连续统的均衡方程和跳变条件[J]. 中国科学, A 辑, 1997, **27**(12): 1106—1110.

[17] Jaric J. Conservation laws of the J-integral type in micropolar elastostatics[J]. Internat J Engng Sci, 1978, **16**: 967—984.

[18] Knowles J K, Sternberg E. On a class of conservation laws in linearized and finite elasticity[J]. Arch Rat Mech Anal, 1972, **44**: 187—211.

[19] Fletzer D C. Conservation laws in linear elastodynamics[J]. Arch Rat Mech Anal, 1976, **60**: 329—353.

[20] 金伏生. 非保守场守恒定律及某类连续介质力学的守恒定律[J]. 力学学报, 1983, **15**(2): 184—189.

[21] DAI Tian_min. Some path-independent integrals for micropolar media[J]. Internat J Solids Struct, 1986, **22**(7): 729—735.

[22] Vukobrat M. Conservation laws in micropolar elastodynamics and path-independent integrals[J]. Internat J Engng Sci, 1989, **27**(9): 1093—1106.

[23] JIANG Qing. Conservation laws in linear viscoelastodynamics[J]. Journal of Elasticity, 1986, **16**: 213—219.

[24] DAI Tian-min. On basic laws and principles for continuum field theories[A]. In: CHIEN Wei-zang Ed. Proceedings of the 4th International Conference on Nonlinear Mechanics[C]. Shanghai: Shanghai University Press, 2002: 29—41.

[25] Eshelby J D. The continuum theory of lattice defects[A]. In: Seitz F, Turnbull D Eds. Solid State Physics[C]. Vol 3. New York: Academic Press, 1956: 79—144.

[26] Eshelby J D. Energy relations and the energy-momentum tensor in continuum mechanics[A]. In: Kanninen M F, Adler W F, Rosenfeld A, Jaffee R Eds. Inelastic Behavior of Solids[C]. New York: Mc Graw-Hill, 1970: 77—114.

[27] 戴天民. 微极线性弹性动力学的守恒定律和跳变条件[J]. 力学学报, 1981, **13**(3): 271—279.

Renewal of Basic Laws and Principles for Polar Continuum Theories (Ⅹ)—Master Balance Law

DAI Tian-min

(Department of Mathematics & Center for the Application of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110036, P.R. China)

Abstract: Through a comparison between the expressions of master balance laws and the conservation laws derived by the use of Noether's thorem a unified master balance law and six physically possible balance equations for micropolar continuum mechanics are naturally deduced. Among them, by extending the well-known conventional concept of energy-momentum tensor, the rather general conservation laws and balance equations named after energy-momentum, energy-angular momentum and energy-energy are obtained. It is clear that the forms of the physical field quantities in the master balance law for the last three cases could not be assumed directly perceived through the intuition. Finally, some existing results are reduced immediately as special cases.

Key words: unified master balance law; physical field quantity; conservation law; energy-momentum; energy-angular momentum; energy-energy