

文章编号: 1000-0887(2006) 02-0159-11

# 考虑径向内间隙的滚动轴承平衡转子系统的非线性动力稳定性\*

白长青<sup>1</sup>, 许庆余<sup>1</sup>, 张小龙<sup>1,2</sup>

(1. 西安交通大学 航天航空学院, 西安 710049;  
2. 西安建筑科技大学 机电工程学院, 西安 710055)

(何友声推荐)

**摘要:** 研究滚动轴承平衡转子系统在不同轴承内间隙量, 不同转速下系统的稳定性及其分岔特性和混沌。考虑 Hertz 接触力、滚动体通过振动和轴承径向内间隙等非线性因素建立数学模型, 根据 Floquet 理论分析不同间隙量下滚动轴承转子系统的周期解稳定性, 找到了 3 种导致周期解失稳的方式: 倍周期分岔失稳、拟周期分岔失稳和边界激变导致混沌失稳。通过对各间隙量下转子系统拓扑特性变化和失稳区域的研究, 表明滚动轴承间隙量是影响转子系统动力稳定性的一个重要因素。

**关键词:** 滚动轴承; 间隙; 转子; 稳定性; 分岔; 混沌

**中图分类号:** O347.6      **文献标识码:** A

## 引 言

滚动轴承是转动机械中的常用部件, 也是火箭发动机、航空燃气涡轮机等尖端设备上的重要组件。为了确保这些设备的安全运转, 有必要研究有关非线性因素对系统拓扑特性和稳定性的影响。

滚动轴承支撑的转子运转时, 由于轴承运转时受力滚动体的个数和位置随时间变化而引起振动, 即滚动体通过振动(ball passage vibrations, BPV)。BPV 重要性的了解始于 Gustafsson 等人的研究<sup>[1]</sup>, 并在试验中发现滚动轴承内间隙是影响 BPV 的一个重要参数。文献[2]也用试验证实了间隙对 BPV 的重要影响。滚动轴承中的内间隙的作用是补偿热膨胀和防止滚动体卡死, 保证载荷分布最优<sup>[3]</sup>。在滚动轴承支撑的平衡转子系统振动分析中, 除了 Hertz 接触力和滚动体通过振动, 轴承径向内间隙是一个重要的非线性因素。M. Tiwari 和 K. Gupta 等人分析了间隙对滚动轴承转子系统的影响<sup>[4]</sup>, 发现了一些参数对系统动力特性影响的规律。S. P. Harsha 等人研究了考虑多种非线性因素时, 转速对滚动轴承平衡转子系统的影响<sup>[5]</sup>。文献[6]考虑了间隙的存在, 通过分析滚动轴承阻尼的变化和有超大滚动体存在时系统的混沌行为, 找

\* 收稿日期: 2004\_06\_28; 修订日期: 2005\_10\_11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50275113); 高等学校博士学科点专项科研基金(20030698017)

作者简介: 白长青(1976—), 男, 回族, 甘肃兰州人, 博士研究生(联系人, Tel: + 86\_29\_82663093; E\_mail: bai\_chq@sohu.com)。

到了通往混沌的 3 种基本方式。

本文考虑滚动轴承中多种非线性因素, 建立滚动轴承转子系统的动力学方程。根据 Floquet 理论判断滚动轴承转子系统的周期解稳定性, 用打靶法、直接数值积分、Liapunov 指数、Poincaré 映射、功率谱等方法, 分析了不同径向内间隙量下滚动轴承转子系统的周期解稳定性及分岔、混沌。

## 1 数学模型

假设滚动体与滚道间接触力为弹性力, 根据 Hertz 弹性接触理论, 第  $j$  个滚动体与滚道间的局部接触力  $Q_j$  和总接触刚度  $K_j$  与弹性变形  $\delta_j$  之间的关系可以表示为

$$Q_j = K_j \delta_j^{3/2}. \quad (1)$$

以下分别用下标  $i$  和  $o$  表示滚动体相对于内滚道和外滚道的量。  $k_i$  和  $k_o$  分别表示滚动体与内滚道和外滚道间的接触刚度, 则有

$$K_j = \left[ \frac{1}{(1/k_i)^{2/3} + (1/k_o)^{2/3}} \right]^{3/2}. \quad (2)$$

对于材料特性相同的两接触体间的接触刚度可以统一由下式获得<sup>[7]</sup>

$$k_i = k_o = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{E/(1-\nu^2)}{(\sum \rho)^{1/2}} \left( \frac{1}{\delta^*} \right)^{3/2}, \quad (3)$$

其中  $\nu$  是泊松比,  $\sum \rho$  是接触点的曲率和,  $\delta^*$  为无量纲接触变形系数, 其值可查阅文献[8]。

建立图 1 所示  $Oxy$  坐标系, 第  $j$  个滚动体的接触变形  $\delta_j$  为

$$\delta_j = (x \cos \phi_j + y \sin \phi_j) \cos \alpha - c, \quad (4)$$

式中  $c$  是轴承径向间隙量;  $\phi_j$  是第  $j$  个滚动体的转角, 它与轴承中滚动体的个数  $n_b$ 、滚动架转速  $\omega_c$  和初始转角  $\phi_0$  有关

$$\phi_j = \frac{2\pi(j-1)}{n_b} + \omega_c t + \phi_0, \quad (5)$$

式(4)中的  $\alpha$  为滚动轴承的实际接触角, 与轴承间隙量  $c$  有关

$$\alpha = \arccos \left[ 1 - \frac{c}{r_i + r_o - D_b} \right]. \quad (6)$$

对各个滚动体所受恢复力求和, 可知总恢复力沿  $x$  和  $y$  方向的分量  $f_x$  和  $f_y$  为

$$\begin{cases} f_x \\ f_y \end{cases} = \sum_{j=1}^{n_b} y_j K_j \delta_j^{3/2} \begin{cases} \cos \phi_j \\ \sin \phi_j \end{cases} \cos \alpha, \quad (7)$$

其中

$$y_j = \begin{cases} 1, & \delta_j > 0, \\ 0, & \delta_j \leq 0. \end{cases}$$

假设轴承外圈固定, 内圈和转子以相同的转速转动; 由于摩擦和润滑造成的阻尼假设为等效粘滞阻尼  $D$ 。根据式(4)与(7), 质量为  $M$  的滚动轴承平衡转子系统的动力学方程为

$$\begin{cases} M\ddot{x} + D\dot{x} + \sum_{j=1}^{n_b} y_j K_j \delta_j^{3/2} \cos \phi_j \cos \alpha = 0, \\ M\ddot{y} + D\dot{y} + \sum_{j=1}^{n_b} y_j K_j \delta_j^{3/2} \sin \phi_j \cos \alpha = W, \end{cases} \quad (8)$$

这是一组非线性二阶耦合常微分方程, 其中  $W$  是定常力,  $n_b$  是滚动体的个数。滚动体通过振

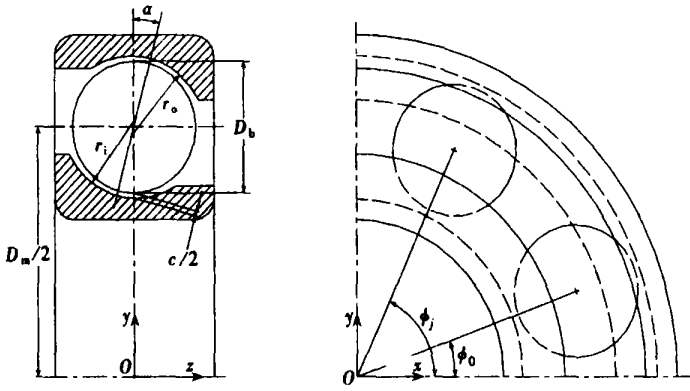


图1 滚动轴承几何参数及坐标系

动的频率  $\omega_{vc}$  可表示为

$$\omega_{vc} = \omega_c \cdot n_b \cdot \quad (9)$$

## 2 系统周期解稳定性分析

Floquet 理论是分析周期变系数线性常微分方程的稳定性理论, 利用它可以确定非线性动力系统周期解的稳定性<sup>[9,10]</sup>. 将方程(8)写成一阶状态方程

$$\dot{U} = F(t, U(t), \sigma), \quad (10)$$

其中  $\sigma$  是分岔参数,

$$U = [x \quad y \quad x' \quad y']^T, \quad (11)$$

$$F = \left\{ \begin{array}{l} x' \\ y' \\ -\frac{1}{M} \left[ Dx + \sum_{j=1}^{n_b} Y_j K_j \delta_j^{3/2} \cos \phi \cos \alpha \right] \\ -\frac{1}{M} \left[ Dy + \sum_{j=1}^{n_b} Y_j K_j \delta_j^{3/2} \sin \phi \cos \alpha - W \right] \end{array} \right\}. \quad (12)$$

方程有周期为滚动体通过周期  $T = 2\pi/\omega_{vc}$  的周期解  $U^*$ , 满足

$$U^*(t) = U^*(t+T). \quad (13)$$

设周期解  $U^*$  受到扰动  $u$ , 被扰运动方程为

$$\dot{U}^* + \dot{u} = F(t, U^* + u, \lambda). \quad (14)$$

将  $F$  对  $U^*$  展开为泰勒级数并带入被扰运动方程中, 保留线性项得到一阶近似扰动方程

$$\dot{u} = \frac{\partial F}{\partial U^*} u = A(t)u. \quad (15)$$

上式为具有周期系数的线性常微分方程,  $A(t) = A(t+T)$  是周期为  $T$  的矩阵函数,

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{xx} & A_{xy} & -D/M & 0 \\ A_{yx} & A_{yy} & 0 & -D/M \end{bmatrix}, \quad (16)$$

式中各项分别为

$$A_{xx} = -\frac{1}{M} \frac{\partial f_x}{\partial x} = -\frac{3}{2M} \sum_{j=1}^{n_b} \gamma_j K_j \delta_j^{1/2} \cos^2 \phi \cos^2 \alpha, \quad (17)$$

$$A_{xy} = A_{yx} = -\frac{1}{M} \frac{\partial f_x}{\partial y} = -\frac{1}{M} \frac{\partial f_y}{\partial x} = -\frac{3}{2M} \sum_{j=1}^{n_b} \gamma_j K_j \delta_j^{1/2} \cos \phi \sin \phi \cos^2 \alpha, \quad (18)$$

$$A_{yy} = -\frac{1}{M} \frac{\partial f_y}{\partial y} = -\frac{3}{2M} \sum_{j=1}^{n_b} \gamma_j K_j \delta_j^{1/2} \sin^2 \phi \cos^2 \alpha. \quad (19)$$

根据 Floquet 理论,若  $V(t)$  是方程(15)的一个基解矩阵,则存在一个非奇异的周期  $T$  矩阵  $\Phi(t) = \Phi(t+T)$  和一个常矩阵  $B$ , 满足

$$V(t) = \Phi(t)e^{tB}. \quad (20)$$

易知  $V(t+T)$  也是方程(15)的基解矩阵,有

$$V(t+T) = \Phi(t+T)e^{(t+T)B} = V(t)e^{TB} = V(t)H, \quad (21)$$

$H$  矩阵的特征值  $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$  称为 Floquet 乘子. 当所有  $\lambda_i$  模的值小于 1 时,  $U^*$  稳定; 当  $\lambda_i$  模的最大值大于 1 时,  $U^*$  不稳定; 等于 1 时,  $U^*$  处于临界状态, 此时作为判断失稳的准则<sup>[9]</sup>.

非线性系统周期解可以用打靶法<sup>[10]</sup>来确定. 打靶法的实质是把边值问题化为初值问题求解, 即在边值条件  $r(s) = U(0, s) - U(T, s) = \mathbf{0}$  下, 求方程(10)的周期解, 其中  $s$  为待求参数. 对于本文的固定边界条件问题, 首先给定初值  $s_0 = [x_0 \ y_0 \ \dot{x}_0 \ \dot{y}_0]^T$ , 然后用 Newton\_Raphson 迭代求  $s_{i+1}$

$$s_{i+1} = s_i - Dr(s_i)^{-1}r(s_i), \quad (22)$$

$$\text{其中 } Dr(s) = \frac{\partial r(s)}{\partial s} = I - \frac{\partial U(T, s)}{\partial s}, \quad (23)$$

上式中的  $I$  为单位矩阵,  $\partial U(T, s)/\partial s$  是下述矩阵微分方程初值问题的解在  $t = T$  时的值

$$\left[ \frac{\partial U}{\partial s} \right]' = A(t) \frac{\partial U}{\partial s}, \quad \left[ \frac{\partial U}{\partial s} \right] \Big|_{t=0} = I. \quad (24)$$

需要注意的是求解上式时要用到原方程(10)的解.

易证满足初始条件  $V(0) = I$  的  $V(t)$  是方程(15)的一个基解矩阵, 把  $V(0)$  代入式(21)得到  $V(T) = H$ , 再对比方程(15)和(24), 可知  $\partial U(T, s)/\partial s = V(T) = H$ , 即  $\partial U(T, s)/\partial s$  的特征值就是判断周期解稳定性所需的 Floquet 乘子.

### 3 径向间隙对滚动轴承转子系统稳定性的影响

表 1 列出了 209 单列深沟球轴承基本参数. 轴承转子系统的质量  $M = 2 \text{ kg}$ , 阻尼  $D = 300 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ . 考虑水平放置的转子径向受到沿  $y$  负方向的重力.

表 1 209 滚动轴承参数

轴承节径	滚动体直径	内滚道半径	外滚道半径	滚动体个数
$D_m/\text{mm}$	$D_f/\text{mm}$	$r_i/\text{mm}$	$r_o/\text{mm}$	$n_b$
65.0	12.7	6.6	6.6	9

研究滚动轴承间隙量  $c$  分别取  $3.8 \mu\text{m}$ 、 $7.6 \mu\text{m}$ 、 $11.4 \mu\text{m}$ 、 $15.2 \mu\text{m}$ 、 $19.0 \mu\text{m}$  时, 轴承转子系统的稳定性和非线性行为.

#### 3.1 间隙量 $c = 3.8 \mu\text{m}$ 时系统稳定性分析

滚动轴承的间隙量  $c$  为  $3.8 \mu\text{m}$  时转子中心的运动分岔情况如图 2 所示. 在  $\omega = 93.2 \text{ Hz}$

转速时, Floquet 乘子模的最大值大于 1, 系统的周期解失稳, 表 2 列出了失稳前后的 Floquet 乘子  $\lambda_i$  及其模的最大值  $\max(|\lambda_i|)$ 。图 3 显示了转速从 88.3 Hz~ 95.0 Hz 时模最大的 Floquet 乘子的变化。可以看出随着转速的增加, 模最大的 Floquet 乘子交于横轴并从 (-1, 0) 穿出单位圆, 说明周期解是通过倍周期分岔而失稳。图 4 是  $\omega = 93.3$  Hz 时轴承转子系统的轴心轨迹和 Poincaré 映射图, 图中有两个 Poincaré 点, 表明系统是 2 倍周期运动; 增加到  $\omega = 113.0$  Hz, 模最大的 Floquet 乘子沿 (-1, 0) 回到单位圆, 系统又开始稳定的周期运动。从图 3 也可以看出系统在 93.2~ 113.0 Hz 的失稳区域内做 2 倍周期运动, 也就是 1/2 亚谐波振动。

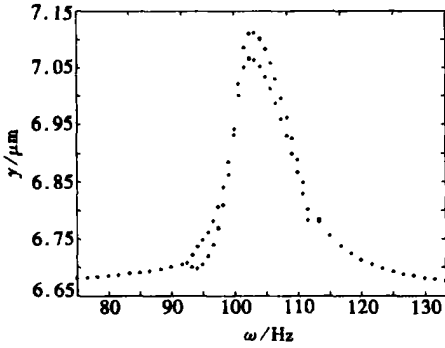


图 2 转子中心运动分岔图 ( $c = 3.8 \mu\text{m}$ )

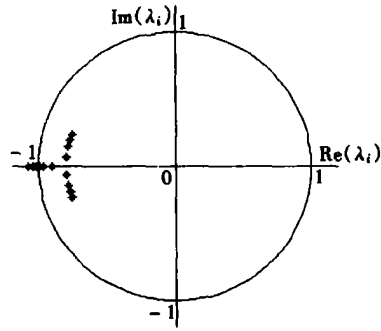
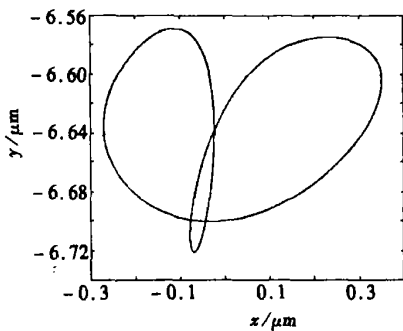


图 3 Floquet 乘子变化图

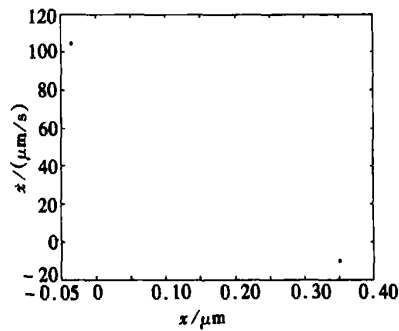
( $\omega = 88.3 \sim 95.0$  Hz,  $c = 3.8 \mu\text{m}$ )

表 2 间隙量  $c = 3.8 \mu\text{m}$  时不同转速下的 Floquet 乘子

$\omega/\text{Hz}$	Floquet 乘子 $\lambda_i$	$\max( \lambda_i )$
93.0	- 0.996 328	0.996 328
	- 0.643 415	
	0.423 108+ 0.679 738i	
	0.423 108- 0.679 738i	
93.2	- 1.004 977	1.004 977
	- 0.638 386	
	0.432 056+ 0.674 464i	
	0.432 056- 0.674 464i	



(a) 轴心轨迹



(b) Poincaré 映射图

图 4 倍周期运动 ( $\omega = 93.3$  Hz,  $c = 3.8 \mu\text{m}$ )

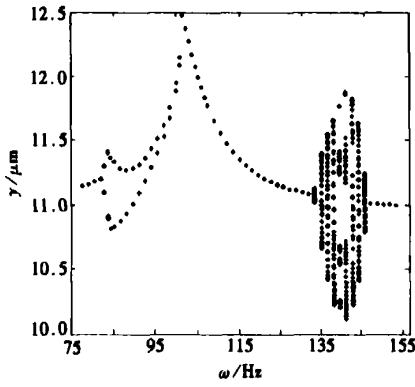


图5 转子中心运动分岔图 ( $c = 7.6 \mu\text{m}$ )

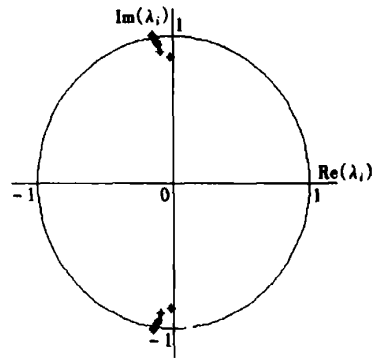
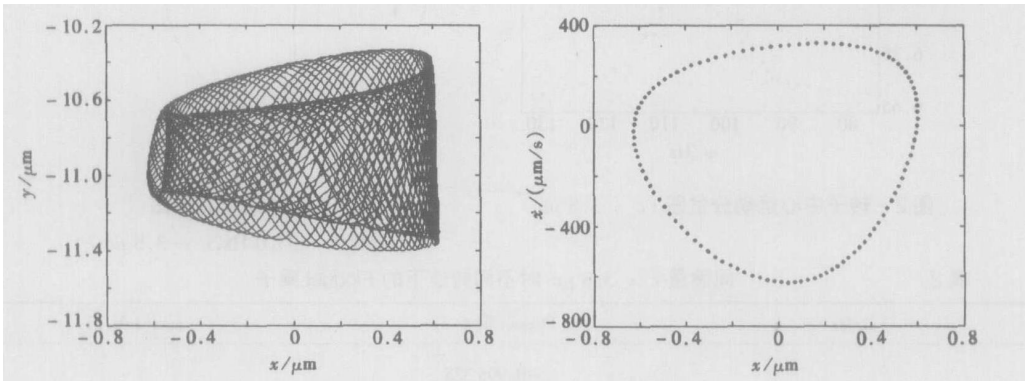


图6 Floquet 乘子变化图

( $\omega = 133.3 \sim 137.5 \text{ Hz}$ ,  $c = 7.6 \mu\text{m}$ )



(a) 轴心轨迹

(b) Poincaré 映射图

图7 拟周期运动 ( $\omega = 138.3 \text{ Hz}$ ,  $c = 7.6 \mu\text{m}$ )

表3

间隙量  $c = 7.6 \mu\text{m}$  时不同转速下的 Floquet 乘子

$\omega/\text{Hz}$	Floquet 乘子 $\lambda_i$	$\max( \lambda_i )$
136.8	$-0.135654 + 0.990197i$	0.999446
	$-0.135654 - 0.990197i$	
	$-0.100442 + 0.733153i$	
	$-0.100442 - 0.733153i$	
137.0	$-0.137896 + 0.993380i$	1.002906
	$-0.137896 - 0.993380i$	
	$-0.101436 + 0.730712i$	
	$-0.101436 - 0.730712i$	

### 3.2 间隙量 $c = 7.6 \mu\text{m}$ 时系统稳定性分析

图5是  $c = 7.6 \mu\text{m}$  时转子中心运动分岔图。对比图2可以发现此时系统出现两个周期解失稳区域。第1个失稳区域发生在  $\omega = 81.0 \sim 101 \text{ Hz}$ ，和  $c = 3.8 \mu\text{m}$  系统相似，发生2倍周期分岔导致失稳，只是失稳转速值有所降低。第2个失稳区域开始于  $137.0 \text{ Hz}$ ，失稳前后的 Floquet 乘子列于表3中，图6是转速从  $\omega = 133.3 \text{ Hz}$  增加到  $\omega = 137.5 \text{ Hz}$  时模最大的 Floquet 乘子的变化情况，可以发现一对模最大的 Floquet 乘子以虚部不为零的共轭复数方式穿出单位

圆,表明周期解发生二次Hopf分岔,系统运动表现为拟周期运动。如图7所示为 $\omega = 138.3$  Hz时转子轴心运动轨迹(图7(a))及Poincaré映射图(图7(b)),在Poincaré映射图上映射点组成了一条封闭的曲线,表明系统运动进入拟周期运动状态。当转速超过 $\omega = 150.2$  Hz时系统恢复稳定的周期运动。

### 3.3 间隙量 $c = 11.4 \mu\text{m}$ 时系统稳定性分析

图8是滚动轴承间隙增加到 $11.4 \mu\text{m}$ 时转子系统的轴心运动分岔图。分析发现系统首先发生拟周期分岔失稳,失稳区域在较高转速的 $\omega = 130.0 \sim 137.3$  Hz段。并没有间隙为 $3.8 \mu\text{m}$ 和 $7.6 \mu\text{m}$ 时系统在较低转速出现的2倍周期分岔失稳。另外,在该间隙量下,转速为 $\omega = 166.7$  Hz到 $\omega = 250$  Hz的高频段出现新的失稳区域,表现为周期解通过轨道裂解变为2倍周期解的倍周期分岔失稳,失稳区域为 $\omega = 197.7 \sim 202.5$  Hz。从后面的分析可以发现,间隙量较大时,一般都会发生这种高频段的2倍周期分岔失稳。

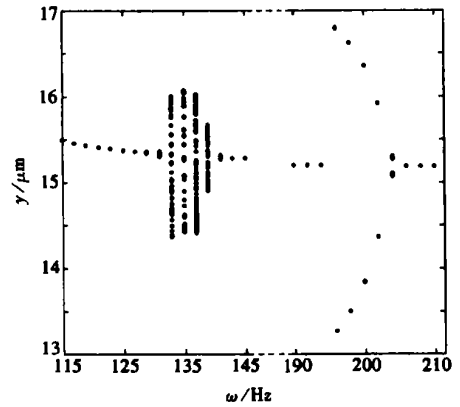
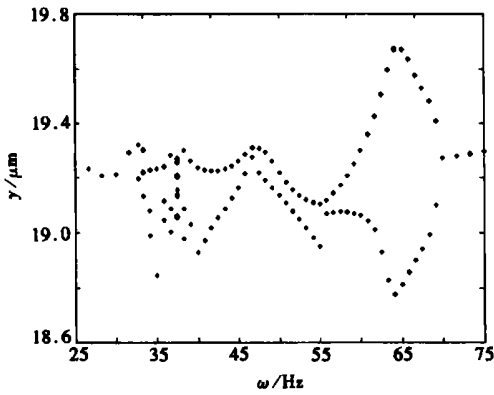
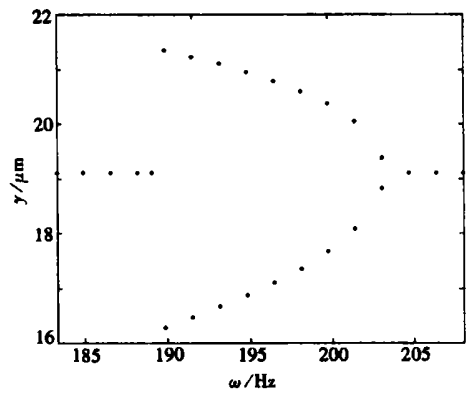


图8 转子中心运动分岔图 ( $c = 11.4 \mu\text{m}$ )



(a)



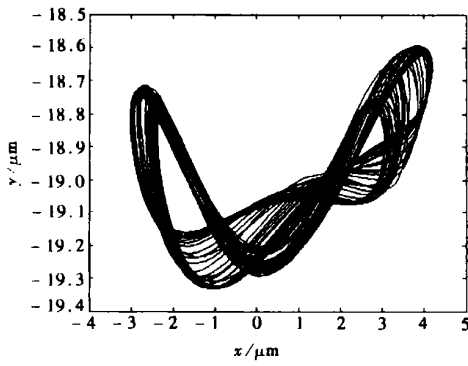
(b)

图9 转子中心运动分岔图 ( $c = 15.2 \mu\text{m}$ )

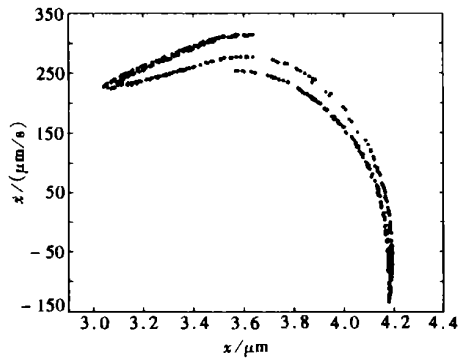
### 3.4 间隙量 $c = 15.2 \mu\text{m}$ 时系统稳定性分析

间隙量增大到 $15.2 \mu\text{m}$ ,滚动轴承转子系统表现出更丰富的非线性行为。图9(a)给出了转速在 $\omega = 25$  Hz到 $\omega = 75$  Hz段时系统拓扑结构变化情况。其中的 $\omega = 32.7 \sim 69.7$  Hz是该间隙量下的第1个失稳区域。在 $\omega = 32.7$  Hz,系统发生了倍周期分岔失稳,随后系统通过倍周期分岔道路进入混沌。转速为 $\omega = 33.2$  Hz时,系统运动的最大Liapunov指数为 $+1.05$ ,大于零,表明系统作混沌运动,图10(b)中有细致结构的混沌吸引子和图10(c)中连续功率谱也表明系统进入混沌,其轨道极为复杂(图10(a)),而在 $\omega = 33.3$  Hz时系统以3倍周期形式退出混沌(图10(d)~(f))。其后进入2倍周期运动,到 $\omega = 69.7$  Hz之后系统又作稳定的周期运动。

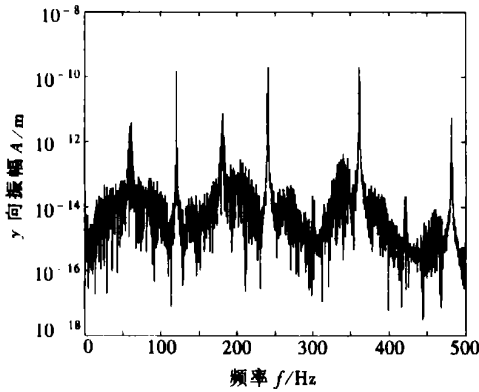
图9(b)显示了转子系统发生在高频段的第2个失稳区域,开始于 $\omega = 190.5$  Hz结束于 $\omega = 203.3$  Hz,和 $11.4 \mu\text{m}$ 间隙量时一样,都是2倍周期失稳,只是失稳区域的边界值有所降低。



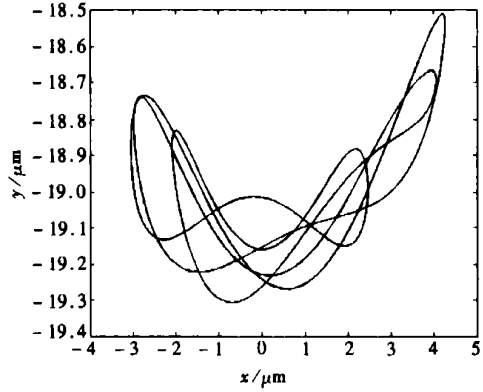
(a)  $\omega = 33.2$  Hz 时系统轴心轨迹



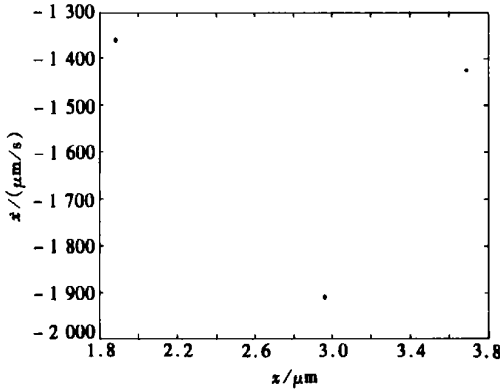
(b)  $\omega = 33.2$  Hz 时的 Poincaré 映射



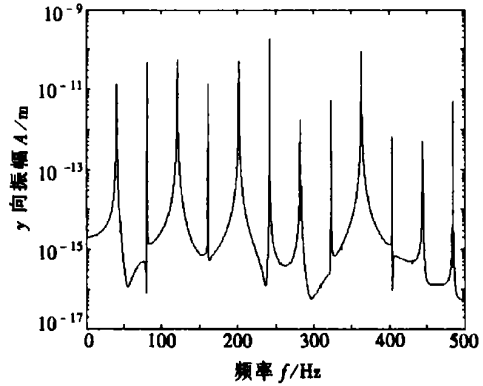
(c)  $\omega = 33.2$  Hz 时的功率谱



(d)  $\omega = 33.3$  Hz 时系统轴心轨迹



(e)  $\omega = 33.3$  Hz 时的 Poincaré 映射



(f)  $\omega = 33.3$  Hz 时的功率谱

图 10 倍周期分岔进入混沌过程 ( $c = 15.2 \mu\text{m}$ )

### 3.5 间隙量 $c = 19.0 \mu\text{m}$ 时系统稳定性分析

在这种间隙量下,滚动轴承转子系统的拓扑结构变化更趋复杂。如图 11(a)和(b)所示,系统出现 3 个失稳区域。其中在高转速段发生 2 倍周期分岔失稳形成的第 3 个失稳区域和其它较大间隙(11.4 和 15.2  $\mu\text{m}$ )系统比较类似,但是失稳区域的左右边界值都有所降低,分别降为  $\omega = 182.3$  Hz 和  $\omega = 195.2$  Hz。而第一个失稳区域发生在  $\omega = 15.6 \sim 20.0$  Hz, 表现为倍周期分岔产生的 2 倍周期运动,与较低间隙量(3.8  $\mu\text{m}$  和 7.6  $\mu\text{m}$ )系统在低频段失稳区域的拓



扑结构变化接近。

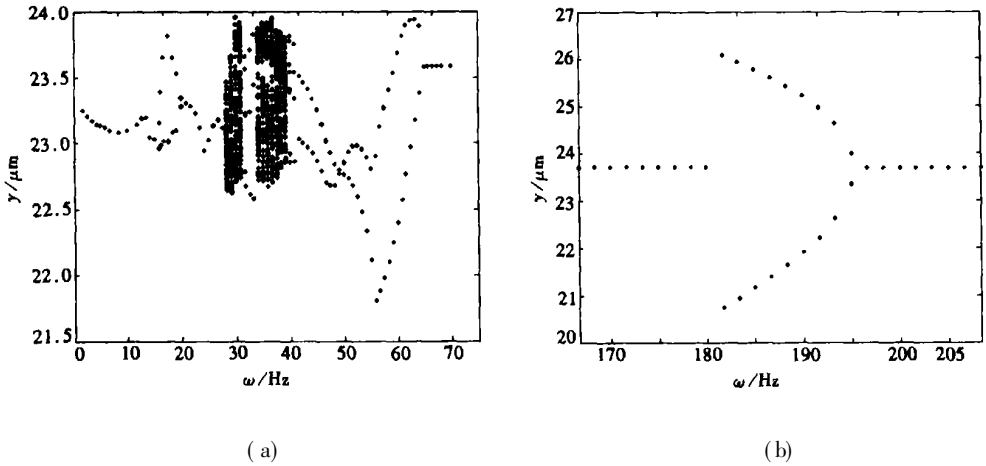
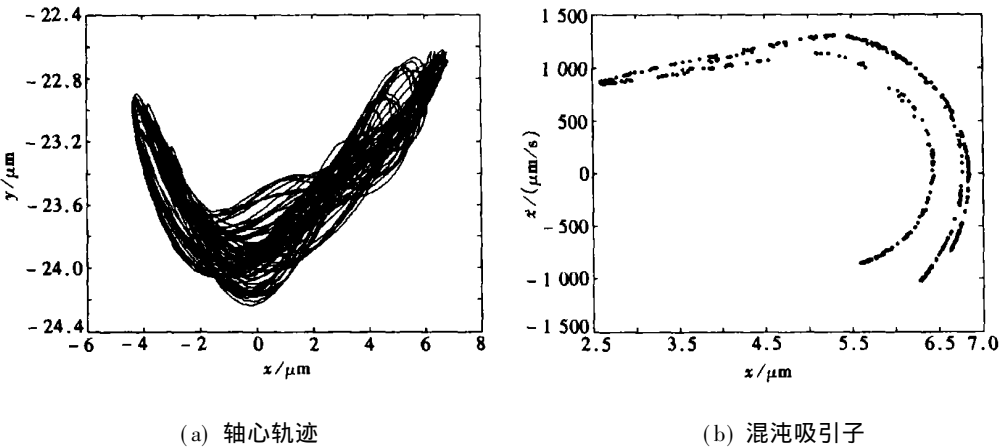


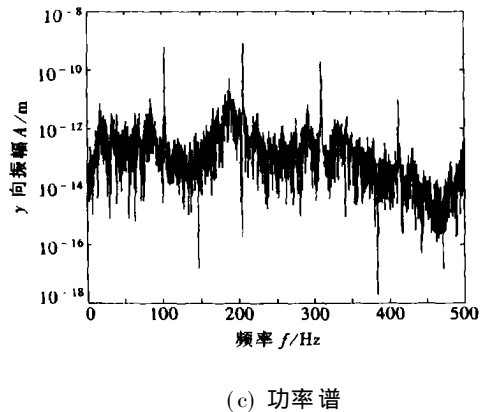
图 11 转子中心运动分岔图 ( $c = 19.0 \mu\text{m}$ )



(a) 轴心轨迹

(b) 混沌吸引子

在第 2 个失稳区域发现不同于以上所述的新的失稳方式, 由于边界激变突然出现混沌吸引子造成系统周期解失稳。按照激变引起的混沌吸引子不连续变化的性质, 激变可以分为 3 种类型: 边界激变、内部激变和吸引子合并激变。混沌吸引子及其吸引域边界上的不稳定周期轨道发生碰撞而导致混沌吸引子突然消失称为边界激变<sup>[9,11]</sup>。如果系统参数逆向变化, 边界激变就导致混沌吸引子突然出现, 使系统失稳, 边界激变临界点就是系统的失稳点。通过计算分析, 在  $\omega = 28.23 \text{ Hz}$  时, Floquet 乘子模的最大值为 0.639 718, 系统做稳定的周期运动; 即使在  $\omega = 28.24 \text{ Hz}$  时系统仍保持稳定的周期运动, Floquet 乘子模的最大值为 0.651 718, 但是  $\omega = 28.25 \text{ Hz}$  是边界激变临界点, 系统运动的最大 Liapunov 指数从 0 跃变为 + 0.76, 此时发生边界激变突然出现混沌, 造成系统周期解失稳, 如图 12 所示。边界激变是一



(c) 功率谱

图 12 边界激变进入混沌

( $\omega = 28.25 \text{ Hz}$ ,  $c = 19.0 \mu\text{m}$ )

种危险的失稳方式, 在其它失稳方式中行之有效的打靶法无法判断是否发生边界激变造成系统失稳, 只能通过 Liapunov 指数、Poincaré 映射、功率谱等方法确定系统是否发生边界激变, 从而断定周期解的稳定性。

在  $\omega = 28.3 \sim 64.8$  Hz 之间的第 2 个失稳区域中不仅发现边界激变导致的混沌, 而且有沿 Sarkovskii 自然数序列<sup>[10]</sup> 发生倍周期分岔产生混沌的过程, 表 4 列出了转速 20.2 Hz ~ 182.2 Hz 间的系统拓扑特性的变化, 可以清楚地看出这两种进入混沌的道路。

表 4 系统拓扑特性变化的全过程

$\omega$ /Hz	运动状态	$\omega$ /Hz	运动状态
20.2~ 28.2	1 倍周期	39.8	16 倍周期
28.3~ 31.3	混沌	40.0	8 倍周期
31.5	24 倍周期	40.2~ 41.5	4 倍周期
31.7	6 倍周期	41.7~ 64.8	2 倍周期
31.8~ 33.8	3 倍周期	65.0~ 182.2	1 倍周期
34.0~ 39.7	混沌		

## 4 结 论

为便于比较, 图 13 绘出了各个间隙下转子系统的稳定和不稳定区域, 其中的阴影部分表示失稳区域。

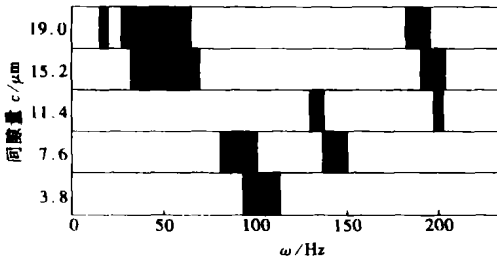


图 13 不同间隙量下系统的失稳区域  
(阴影部分为失稳区域)

综上所述, 通过对不同间隙下滚动轴承转子系统的非线性运动稳定性及非线性行为的研究, 发现滚动轴承间隙量对转子系统稳定性有重要影响, 可以归结为以下几点:

1. 滚动轴承转子系统运动主要有 3 种失稳方式: 倍周期分岔失稳、拟周期分岔失稳和边界激变进入混沌导致失稳。

2. 随着间隙的增加, 系统非线性增强, 拓扑结构变化渐趋复杂, 失稳区域的数目逐渐增多, 从 1 个区域变为 2 个, 甚至达到 3 个, 各个失稳区域的基本趋势是随着间隙的增大区域变宽而区域的边界值逐渐降低。

3. 在滚动轴承转子系统中最常出现的失稳运动是 2 倍周期分岔失稳。特别在较高转速时, 系统易发生 2 倍周期分岔失稳, 而且随着间隙的增大振幅相应变大。

4. 从图 13 可以看出, 本文分析的转子系统在转速低于 170 Hz 时, 小间隙对运转平稳性来说并不一定是最合理的。间隙量为 11.4  $\mu\text{m}$  时, 系统所表现出的动力特性远远优于其它间隙量。因此, 在滚动轴承的设计中, 应根据工况确定最合理的间隙量, 以满足振动和噪声要求。

致谢 本文作者感谢西安交通大学博士论文基金(DFXJTU 2003\_9)的资助。

## [参 考 文 献]

- [1] Gustafsson O G, Tallian T, et al. Research report on study of the vibration characteristics of bearing [R]. Report: AL631023, Reg: 585 14: 422 3 SKF Ind, Inc, 1963.
- [2] Tamura H, Gad E H, Kondou T, et al. The static running accuracy of ball bearing, memoirs of the faculty of engineering[J]. J Kyushu University, 1983, 43(4): 285—316.
- [3] Anonymous. NSK explains about internal clearance in rolling bearings[J]. Industrial Lubrication and Tribology, 2002, 54(2): 87—88.
- [4] Tiwari M, Gupta K, Prakash O. Effect of radial internal clearance of a ball bearing on the dynamics of a balanced horizontal rotor[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 238(5): 723—756.
- [5] Harsha S P, Sandeep K, Prakash R. The effect of speed of balanced rotor on nonlinear vibrations associated with ball bearings[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2003, 45(4): 725—740.
- [6] Mevel B, Guyader J L. Routes to chaos in ball bearings[J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, 162(3): 471—487.
- [7] Aktark N. Dynamics of a rigid shaft supported by angular contact ball bearings[D]. Ph D thesis. London U K: Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1993.
- [8] Harris Tedric A. Rolling Bearing Analysis [M]. New York: John Wiley & Sons, 1984.
- [9] 刘延柱, 陈立群. 非线性振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [10] 周纪卿, 朱因远. 非线性振动[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1998.
- [11] Ott Edward. Chaos in Dynamical Systems [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

## Nonlinear Stability of Balanced Rotor Due to the Effect of Ball Bearing Internal Clearance

BAI Chang\_qing<sup>1</sup>, XU Qing\_yu<sup>1</sup>, ZHANG Xiao\_long<sup>1,2</sup>

(1. School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University,  
Xi'an 710049, P. R. China;

2. Mechanical and Electrical Engineering College, Xi'an University of  
Architecture & Technology, Xi'an 710055, P. R. China)

**Abstract:** Stability and dynamic characteristics of a ball bearing rotor system are investigated under the effect of the clearance in the ball bearing. Different clearance values were assumed to calculate the nonlinear stability of periodic solution with the aid of the Floquet theory. Bifurcation and chaos behavior were analyzed with variation of the clearance and rotational speed. It is found that there are three routes to unstable periodic solution. The period-doubling bifurcation and the secondary Hopf bifurcation are two usual routes to instability. The third route is the boundary crisis, a chaotic attractor occurs suddenly as the speed passes through its critical value. At last, the unstable ranges for different internal clearance values were described. It is useful to investigate the stability property of ball bearing rotor system.

**Key words:** ball bearing; clearance; rotor; stability; bifurcation; chaos