文章编号: 1000_0887(2006) 02_0170_07

三维固体中冲击波突跃条件的某些问题*

李永池, 姚 磊, 胡秀章, 曹结东, 董 杰

(中国科学技术大学 力学和机械工程系, 合肥 230027)

(刘人怀推荐)

摘要: 以一般的力学守恒定律为基础, 分别导出了三维固体中冲击波突跃条件的 Euler 表述和 Lagrange 表述, 并对各突跃条件的含义和相互关系特别是质量守恒条件和位移连续条件的关系进行了讨论• 同时对三维固体冲击波的冲击响应曲线即广义 Hugoniot 曲线进行了分析, 为三维固体冲击波耦合特性的研究奠定了基础•

关 键 词: 三维固体; 冲击波; 突跃条件; 冲击响应曲线

中图分类号: O347.5 文献标识码: A

引 言

冲击波的传播和演化规律始终是连续介质动力学中带有挑战性的基本问题• 这是因为, 从学术上说它是奇异面理论的重要组成部分, 并和变形热力学及材料本构关系的研究紧密相关; 而从工程应用上说, 冲击波问题在防护工程、地震和核监测、爆炸效应、高速碰撞和侵彻、探伤及探矿等领域都占有重要的甚至是核心的地位• 由于问题的复杂性, 迄今为止人们主要是对流体中的冲击波开展了系统的研究, 并且已发展了一套相对而言比较成熟的激波动力学理论和方法, 其代表作如 G. B. Whitham[1] 和韩肇元[2] 的专著; 对固体中冲击波的研究尽管也已有很长时间并已作出了不少出色的工作, 如 E. H. Lee 的工作[3] 和经福谦院士的专著[4] 等, 但仍然是主要集中在一维冲击波的问题, 而对三维固体中冲击波的基础研究则相对较少, 其中有例如 T. C. T. Ting、李永池、唐之景[5~10] 等关于冲击波传输方程和冲击波斜反射方面的工作•

由于冲击波理论的基础是跨过冲击波阵面的突跃条件和由此所引出的 Hugoniot 关系, 故本文将对三维固体中冲击波突跃条件有关的某些基本问题, 如突跃条件在不同坐标和构形中的表达和推导方法、各突跃条件的含意及相互关系、三维固体冲击波的冲击响应曲线等问题给予比较系统的阐述, 以期引起同行的兴趣, 并推动关于固体中冲击波的研究工作•

1 运动学关系

对三维固体中应力波的传播, 有 Lagrange 描述(拉氏描述或物质描述) 和 Euler 描述(欧氏描述或空间描述) 两种方法, 前者给出时间 t 和波阵面在初始构形(拉氏构形) 中的笛卡尔坐标

---

* 收稿日期: 2004_11_16; 修订日期: 2005_10_29
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272097); 弹道国防科技重点实验室基金资助项目(51453040101zk0103)
作者简介: 李永池(1941—)男, 河北任县人, 教授, 博导(联系人. Tel: +86_551_3606734; Fax: +86_551_3631760; E_mail: ycli@ustc.edu.cn)•

$\boldsymbol{X}$ 间的函数关系;后者则给出时间 t 和波阵面在瞬时构形(欧氏构形)中的笛卡尔坐标 $\boldsymbol{x}$ 间的函数关系:

$$t = \tau(\boldsymbol{X}),\quad t = \tilde{\tau}(\boldsymbol{x})\cdot \tag{1}$$

以拉氏描述为例,当我们站在波阵面上沿任何一条传播射线 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(t)$ 前进时,相应的拉氏波速 $\boldsymbol{U}(t)$ 可由函数 $\boldsymbol{X}(t)$ 对 t 求导得到:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(t),\quad \boldsymbol{U} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}\cdot \tag{2}$$

而将式(2)代入式(1)并对 t 求导,即得:

$$1 = \tau_{,I}\frac{\mathrm{d}X_I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\tau}{\partial\boldsymbol{X}}\cdot\boldsymbol{U}\cdot \tag{3}$$

以后大小写指标分别表示拉氏和欧氏坐标指标,其中第 1 式采用了张量指标记法中的约定求和法,第 2 式中的“·”则是张量直接记法中的一次点积· 如以 $\boldsymbol{N}$ 表示拉氏波阵面的单位外法矢,则必有

$$\tau_{,I} = kN_I,\quad \frac{\partial\tau}{\partial\boldsymbol{X}} = k\boldsymbol{N}, \tag{4}$$

其中 k 是待定因子· 将式(4)代入式(3)即得

$$1 = k\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{U} \equiv kU_N,\quad k = \frac{1}{U_N},\quad U_N = \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}, \tag{5}$$

其中 $U_N \equiv \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}$ 为拉氏法向波速· 显然,尽管沿不同的射线可得不同的拉氏波速 $\boldsymbol{U}$,但拉氏法向波速 U_N 则是唯一确定的· 由式(4)和式(5)我们有

$$\frac{\partial\tau}{\partial\boldsymbol{X}} = \frac{\boldsymbol{N}}{U_N},\quad \frac{\partial\tau}{\partial X_I} = \frac{N_I}{U_N}\cdot \tag{6}$$

类似地,当采用波阵面的欧氏描述时,可有

$$\frac{\partial\tilde{\tau}}{\partial\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{n}}{V_n},\quad \frac{\partial\tilde{\tau}}{\partial x_i} = \frac{n_i}{V_n}, \tag{6$'$}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为欧氏波阵面的单位外法矢,$V_n = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}$ 为欧氏法向波速,而 $\boldsymbol{V} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)/\mathrm{d}t$ 则是沿任一射线 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ 的欧氏波速· 由连续介质力学中拉氏构形面元和欧氏构形面元之间的关系:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{\rho_0}{\rho}\mathrm{d}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{F}^{-1},\quad \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{\rho}{\rho_0}\mathrm{d}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{F}$$

(其中 ρ_0 和 ρ 分别为初始和瞬时质量密度),则易得

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}}{|\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}|},\quad \boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}}{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}|},\quad |\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}| = \frac{1}{|\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}|}, \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{F} = \partial\boldsymbol{x}/\partial\boldsymbol{X}$ 为变形陡度张量·

如果介质的运动规律为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)$,则可得拉氏阵面和欧氏阵面间的转换关系 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}(t), t)$,对 t 求导即可得出拉氏波速和欧氏波速间的关系如下:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{U},\quad \boldsymbol{V}^* \equiv \boldsymbol{V} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{U}, \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 为介质质点速度,$\boldsymbol{V}^* \equiv \boldsymbol{V} - \boldsymbol{v}$ 为波阵面对介质的相对速度即局部波速,由式(8)之两端点乘以 $\boldsymbol{n}$,并利用式(7),即可得欧氏法向波速和拉氏法向波速的关系如下:

$$\begin{cases} V_n - v_n \equiv V_n^* = \dfrac{U_N}{|\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}|} = U_N|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}|, \\ U_N = \dfrac{V_n^*}{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}|} = V_n^*|\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}|\cdot \end{cases} \tag{9}$$

2　广义开口体系和冲击波突跃条件的欧氏表述

任何一个封闭网表面 $a(t)$(欧氏表述)所包含其内的空间体系 $v(t)$,当其表面有介质出

入时都是一个广义开口体系• 这里加“广义”二字, 是为了区别于流体力学中常用的静止控制体那种特殊的开口体系• 如果以 $\boldsymbol{V}$ 表示网表面某点沿某方向的欧氏射线网速, 则显然当网上各点皆有 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{v}$ 时, 体系即成为与外界无质量交换的闭口体系; 当 $\boldsymbol{V}=\mathbf{0}$ 时, 体系即成为常用的静止控制体; 而在一般情况下, 只要在部分网面上 $\boldsymbol{V}^*=\boldsymbol{V}-\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$, 体系即为一般情况下的广义开口体系• 体系和外界的质量交换取决于网对介质的相对法向网速 V_n^*, 而单位时间内通过网面元 $\mathrm{d}a$ 流入体系的质量流、动量流和能量流将分别是

$$\rho V_n^*\,\mathrm{d}a,\quad \rho V_n^*\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}a,\quad \rho V_n^*\left(e+\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}a, \tag{10}$$

其中 e 和 $v^2/2$ 分别为介质的比内能(即单位质量介质的内能)和比动能• 而广义开口体系的质量、动量和能量守恒定律可以分别表述为:

开口体系的质量增加率= 质量纯流入率;

开口体系的动量增加率= 动量纯流入率+ 外力;

开口体系的能量增加率= 能量纯流入率+ 外力功率+ 外供热率•

其数学形式分别为:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v(t)}\rho\,\mathrm{d}v=\oint_{a(t)}\rho V_n^*\,\mathrm{d}a,\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v(t)}\rho\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}v=\oint_{a(t)}\rho V_n^*\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}a+\oint_{a(t)}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a+\int_{v(t)}\rho\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}v,\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{v(t)}\rho\left(e+\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}v=\oint_{a(t)}\rho V_n^*\left(e+\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}a+\oint_{a(t)}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a+\\
&\qquad\int_{v(t)}\boldsymbol{v}\cdot\rho\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}v+\int_{v(t)}\rho\gamma\,\mathrm{d}v-\oint_{a(t)}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a,
\end{aligned}\right. \tag{11}$$

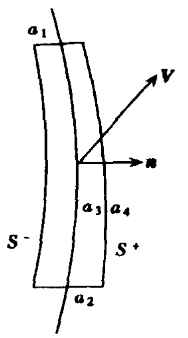

图 1 波阵面上的薄层开口体系

其中, $\boldsymbol{\sigma}$ 为 Cauchy 应力张量, $\boldsymbol{b}$ 为比体积力, γ 为热辐射比供热率, $\boldsymbol{h}$ 为欧氏热流矢量, 而 $\mathrm{d}(\cdot)/\mathrm{d}t$ 表示体系内相应量的时变率• 公式(11) 适用于任何开口体系, 特别当取其为一个有限面积为 S 并且附着在冲击波阵面上的无限薄的薄层时, $\boldsymbol{V}$、V_n 和 V_n^* 即分别成为冲击波的欧氏射线波速、法向波速和相对法向波速, 而此时我们有: $a=a_1+a_2+a_3+a_4+S^++S^-$, 见图 1•

由于 a_1、a_2、a_3、a_4 和薄层体积 v 都与薄层厚度 δ 成比例皆为一阶小量, 只有 $S^+=S^-=S$ 为任意有限的量, 故当薄层厚度 δ 趋于 0 的情况下, 将有

$$\int_v(\cdot)\,\mathrm{d}v\to 0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v(\cdot)\,\mathrm{d}v\to 0,\quad \oint_{a_1+a_2+a_3+a_4}(\cdot)\,\mathrm{d}a\to 0,$$

而公式(11) 的第 3 式将分别给出

$$\left\{\begin{aligned}
&0=\int_{S^++S^-}\rho V_n^*\,\mathrm{d}a,\quad \mathbf{0}=\int_{S^++S^-}\left\{\rho V_n^*\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\right\}\mathrm{d}a,\\
&0=\int_{S^++S^-}\left\{\rho V_n^*\left(e+\frac{v^2}{2}\right)+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}\right\}\mathrm{d}a\cdot
\end{aligned}\right. \tag{12}$$

利用 $S^+=S^-=S$ 的任意性, 并注意作为开口体系 v 外表面的一部分, 冲击波内外表面 S^- 和 S^+ 的外法线方向分别与冲击波前进的外法向 $\boldsymbol{n}$ 反向和同向, 则由式(11) 的第 3 式可分别得到:

$$[\rho V_n^*]=0 \qquad (\text{质量守恒}), \tag{13}$$

$$[\rho V_n^* \boldsymbol{v} + \sigma\cdot \boldsymbol{n}] = \boldsymbol{0} \qquad (\text{动量守恒}), \tag{14}$$

$$\left[\rho V_n^*\left(e+\frac{v^2}{2}\right) - \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n} + \boldsymbol{v}\cdot\sigma\cdot\boldsymbol{n}\right] = 0 \qquad (\text{能量守恒}), \tag{15}$$

其中 $$[f] \equiv f^- - f^+ \tag{16}$$

表示任一物理量 f 由冲击波紧前方跨跃到紧后方的突跃量, 即由量 f 衡量的冲击波的强度•

式(13)、(14) 和(15) 可简单地表述为: 当跨过冲击波阵面时, 质量流 ρV_n^*、广义动量流 $\rho V_n^* \boldsymbol{v} + \sigma\cdot\boldsymbol{n}$ 和广义能量流 $\rho V_n^*\left(e+v^2/2\right) - \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n} + \boldsymbol{v}\cdot\sigma\cdot\boldsymbol{n}$ 都保持连续• 注意, 广义动量流在动量流中加入了波阵面上的应力矢量, 而广义能量流则在能量流中加入了热传导供热率和波阵面上应力矢量的功率• 当考虑到冲击波效应极快而不计热传导效应, 即$(-\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}) = 0$ 时, 即得常用的绝热冲击波的突跃条件•

同时我们指出, 当把单位面积的冲击波阵面 1 s 所扫过的物质量 $(\rho V_n^*)^+ = (\rho V_n^*)^-$ 作一个闭口体系考虑时, 则式(13)、(14)、(15) 也即是这闭口体系质量守恒、动量守恒、能量守恒的表现形式:

$$(\rho V_n^*)^- - (\rho V_n^*)^+ = 0,\quad \rho V_n^*[\boldsymbol{v}] = -[\sigma\cdot\boldsymbol{n}],\quad \rho V_n^*\left[e+\frac{v^2}{2}\right] = [\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n} - \boldsymbol{v}\cdot\sigma\cdot\boldsymbol{n}]•$$

3　广义开口体系和冲击波突跃条件的拉氏表述

如同对闭口体系一样, 对广义开口体系也同样可采用欧氏描述和拉氏描述• 设欧氏构形中开口体系 $v(t)$、网表面 $a(t)$ 及单位外法矢量 $\boldsymbol{n}$ 在拉氏构形中的映象分别为 $V(t)$、$A(t)$ 和 $\boldsymbol{N}$, 并以 $\boldsymbol{U}$ 和 $U_N = \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{N}$ 表示网表面的拉氏射线网速和拉氏法向射线网速, 则单位时间内通过网面元 $\mathrm{d}A$ 流入体系的质量流、动量流和能量流将分别是

$$\rho_0 U_N \mathrm{d}A,\quad \rho_0 U_N \boldsymbol{v}\mathrm{d}A,\quad \rho_0 U_N\left(e+\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}A• \tag{17}$$

而 3 个守恒定律的欧氏表述(12) 在拉氏构形中将表现为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{V(t)} \rho_0 \mathrm{d}V = \oint_{A(t)} \rho_0 U_N \mathrm{d}A, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{V(t)} \rho_0 \boldsymbol{v}\mathrm{d}V = \oint_{A(t)} \rho_0 U_N \boldsymbol{v}\mathrm{d}A + \oint_{A(t)} \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{N}\mathrm{d}A + \int_{V(t)} \rho_0 \boldsymbol{b}\mathrm{d}V, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_{V(t)} \rho_0\left(e+\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}V = \oint_{A(t)} \rho_0 U_N\left(e+\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}A + \oint_{A(t)} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{N}\mathrm{d}A + \\ \qquad \displaystyle\int_{V(t)} \boldsymbol{v}\cdot\rho_0\boldsymbol{b}\mathrm{d}V + \int_{V(t)} \rho_0 \gamma\mathrm{d}V - \oint_{A(t)} \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{N}\mathrm{d}A, \end{cases} \tag{18}$$

其中 ρ_0 是介质的初始质量密度, $\boldsymbol{S}$ 为第一类 Piola_Kirchhoff 应力张量, $\boldsymbol{H}$ 为拉氏热流矢量• 通过与第 2 节类似的极限过程, 容易得到与冲击波阵面上突跃条件欧氏表述式(13)、(14)、(15) 相对应的突跃条件的拉氏表述为:

$$[\rho_0 U_N] = 0 \qquad (\text{质量守恒}), \tag{19}$$

$$[\rho_0 U_N \boldsymbol{v} + \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{N}] = \boldsymbol{0} \qquad (\text{动量守恒}), \tag{20}$$

$$\left[\rho_0 U_N\left(e+\frac{v^2}{2}\right) - \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{N} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{N}\right] = 0 \qquad (\text{能量守恒})• \tag{21}$$

由物理意义显然可知, 欧氏波速 $\boldsymbol{V}$、欧氏法向波速 V_n、拉氏波速 $\boldsymbol{U}$、拉氏法向波速 U_N 都是跨波连续的, 但欧氏相对波速 $\boldsymbol{V}^*$ 和相对法向波速 V_n^* 则是跨波间断的, 这是因为质点速度 $\boldsymbol{v}$ 及法向质点速度 v_n 是跨波间断的• 因此对比质量守恒条件(13) 和(19) 可知: 质量守恒的欧氏表述是有实质意义的, 而质量守恒的拉氏表述(19) 只是一个平凡和显然可见的结果, 并无实

质意义, 因为 ρ_0、U_N 显然都是跨波连续的• 与此相应的是, 拉氏突跃条件中少一个未知量——瞬时密度 ρ, 而 ρ 却是出现在欧氏突跃条件中的• 当然, 当采用拉氏表述时, 瞬时密度可通过 $\rho = \rho_0 \| \boldsymbol{F} \|$ 而求出, 其中 $\| \boldsymbol{F} \|$ 表示 $\boldsymbol{F}$ 的行列式•

4 冲击波波阵面上的位移连续条件

只要不出现破坏, 介质的位移应是单值连续的, 这就是连续介质力学中的位移连续条件, 当跨过存在着应力、质速等间断现象的冲击波时, 同样应满足这一条件• 位移连续也就是运动的连续, 或粒子坐标的连续, 故跨过冲击波的位移连续条件可表达为

$$[\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{0} \qquad (\text{或}[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{0})• \tag{22}$$

设介质运动规律为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)$, 冲击波的拉氏阵面为 $t = \tau(\boldsymbol{X})$, 则在冲击波阵面上粒子的欧氏坐标将成为阵面所经过的拉氏坐标的复合函数:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, \tau(\boldsymbol{x})) \equiv \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{X})• \tag{23}$$

式(23)可称之为运动学量欧拉坐标 $\boldsymbol{x}$ 的随波场函数, 而式(22)则说明, 这一随波场函数应是跨波连续的, 即在冲击波紧前方和紧后方人们应感受到同样的随波场函数, 或

$$[\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{X})] = \boldsymbol{0}, \tag*{(22)$'$}$$

故其随波偏导数(它是阵面上的内导数, 不同于外导数 $\partial\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)/\partial\boldsymbol{X}$ 和 $\partial\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)/\partial t$) 也必然跨波连续, 即

$$\left[\frac{\partial\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{X})}{\partial\boldsymbol{X}}\right] = \boldsymbol{0}• \tag{24}$$

将式(23)代入式(24), 并利用公式(6), 即得

$$\left[\boldsymbol{F} + \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{N}}{U_N}\right] = \boldsymbol{0}, \tag{25}$$

其中 $\boldsymbol{v}\boldsymbol{N}$ 表示 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的并矢• 再利用 U_N 和 V_n^* 间的关系(9) 以及 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 间的关系(7), 则式(25)也可化为

$$\left[\boldsymbol{F} + \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}}{V_n^*}\right] = \boldsymbol{0}• \tag{26}$$

公式(25)和(26)各包含 9 个公式, 它们分别是冲击波阵面上位移连续条件的拉氏表述和欧氏表述•

5 关于质量守恒条件和位移连续条件的关系

在连续介质理论中, 至今人们一直习惯地将由质量守恒定律导出的方程称为连续方程, 严格而言这是不恰当和不严谨的• 事实上, 位移单值连续的条件必然可导出并因之包含了质量守恒方程, 但质量守恒却并不能代替和包含位移单值连续的条件, 后者包含了更为丰富的内容和更为多彩的结果• 本文将以冲击波阵面上的质量守恒条件和位移连续条件的关系来具体说明这一问题•

质量守恒条件(13)或(19)只有一个关系, 它不能完全包含和代替有 9 个方程的位移连续条件(25)和(26), 这是显然的• 现在我们将证明如下命题: 质量守恒方程(13)只是位移连续条件(26)的结果而已•

事实上, 公式(26)可写为

$$\left[\left(\boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}}{V_n^*}\right)\cdot\boldsymbol{F}\right] = \boldsymbol{0} \qquad (\boldsymbol{I}\ \text{为单位张量})• \tag*{(26)$'$}$$

任一二阶张量跨波连续时, 其行列式的值也必然跨波连续• 由此, 并利用线性代数中的公式

$$\|\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}\| = \|\boldsymbol{B}\|\,\|\boldsymbol{C}\|,\quad \|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{ab}\| = 1+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}, \tag{27}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 为任意 2 个二阶张量, 而 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为任意 2 个矢量, 则由式(26)′便可得到

$$\left[\frac{V_n}{V_n^*}\frac{\rho_0}{\rho}\right] = 0. \tag{28}$$

由于 ρ_0 和 V_n 都是跨波连续, 故式(28) 可引出 $1/\rho V_n^*$ 跨波连续, 故 ρV_n^* 也跨波连续, 即

$$[\rho V_n^*] = 0, \tag{13}$$

而这恰恰即是质量守恒条件(13), 这就证明了我们的命题.

6　冲击响应曲线——广义 Hugoniot 曲线

总结以上结果, 可以分别写出三维固体冲击波突跃条件的欧氏表述(29) 式和拉氏表述(30) 式:

$$\begin{cases} [\rho V_n^*] = 0,\ [\rho V_n^* \boldsymbol{v} + \sigma\cdot\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{0}, \\ \left[\rho V_n^*\left(e+\dfrac{v^2}{2}\right) - \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n} + \boldsymbol{v}\cdot\sigma\cdot\boldsymbol{n}\right] = 0,\ \left[\boldsymbol{F}+\dfrac{\boldsymbol{vn}\cdot\boldsymbol{F}}{V_n^*}\right] = \boldsymbol{0}; \end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases} [\rho_0 U_N] = 0 \quad (\text{平凡关系}),\ [\rho_0 U_N \boldsymbol{v} + \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{N}] = \boldsymbol{0}, \\ \left[\rho_0 U_N\left(e+\dfrac{v^2}{2}\right) - \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{N} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{N}\right] = 0,\ \left[\boldsymbol{F}+\dfrac{\boldsymbol{vN}}{U_N}\right] = \boldsymbol{0}. \end{cases} \tag{30}$$

以拉氏表述为例, 如果将冲击波前方状态 $\boldsymbol{v}^+$ 等视为已知, 而将波后状态 $\boldsymbol{v}^-$ 等视为未知量, 则我们有未知量 $\boldsymbol{W}^- = (\boldsymbol{v}^-, \boldsymbol{F}^-, \boldsymbol{S}^-, e^-, \boldsymbol{H}^-)$ 共25 个, 再加上冲击波的拉氏法向波速 U_N, 我们共有 26 个未知量. 守恒条件(30) 共含有 13 个非平凡的代数方程, 但是再加上波后方由 $\boldsymbol{F}^-$ 和 e^- 等所表达的关于 $\boldsymbol{S}^-$ 和 $\boldsymbol{H}^-$ 的分别 9 个和 3 个本构关系, 我们共有关于波后状态的 25 个关系. 于是从原则上我们可由式(30) 和波后本构关系, 解出波后状态 $\boldsymbol{W}^-$ 作为冲击波法向波速 U_N 的函数, 当然它还与波前参考状态 $\boldsymbol{W}^+$ 有关, 即

$$\boldsymbol{W}^- = \boldsymbol{W}(U_N;\ \boldsymbol{W}^+). \tag{31}$$

式(31) 在冲击响应未知量空间 $\boldsymbol{W}$ 中是一条经过波前参考状态 $\boldsymbol{W}^+$ 的曲线, 以冲击波法向波速 U_N 为参数, 其上各点代表了以 $\boldsymbol{W}^+$ 为波前参考状态而以各种可能的不同冲击波法向波速 U_N 传播的冲击波所产生的后方状态 $\boldsymbol{W}^-$, 故我们将其称为冲击波的冲击响应曲线. 在不计热传导效应时, 冲击响应曲线(31) 即成为通常的冲击绝热 Hugoniot 曲线, 故冲击响应曲线(31) 也可称为广义 Hugoniot 曲线. 在应力子空间中的投影 $\boldsymbol{S}^- = \boldsymbol{S}(U_N;\ \boldsymbol{W}^+)$ 给出 $\boldsymbol{S}$_U_N 冲击响应线, 即所谓的冲击波的应力路径线; 在速度子空间的投影 $\boldsymbol{v}^- = \boldsymbol{v}(U_N;\ \boldsymbol{W}^+)$ 给出 $\boldsymbol{v}$_U_N 冲击响应线, 即所谓质速路径线等等. 由式(31) 中的任二方程消去参数 U_N 即可得相应的子状态平面上的冲击响应线, 例如 e_s_{11} 冲击响应线, v_1_s_{12} 冲击响应线, …, 等等, 这些关系可清楚地揭示固体中冲击波响应的各种复杂耦合特性.

最后我们指出, 由式(30) 最后 1 个方程点乘以 $\boldsymbol{N}$ 以及由式(30) 的第 2 个方程可分别得

$$[\boldsymbol{v}] = -U_N[\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}],\quad [\boldsymbol{v}] = -(\rho_0 U_N)^{-1}[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{N}], \tag{32}$$

故有:

$$[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{N}] = \rho_0 U_N^2[\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}], \tag{33}$$

$$U_N = \sqrt{\frac{[\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{N}]_i}{\rho_0[\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}]_i}} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{34}$$

由(34) 的任何一式都可求出冲击波的拉氏法向波速 U_N.

也可对冲击波突跃条件的欧氏表述进行类似的讨论. 有关的更深层次的问题将另行发表

文章进行讨论•

[参 考 文 献]

[1] Whitham G B. Linear and Nonlinear Waves[M]. New York: Wiley_Interscience Publi_Cation, 1973.

[2] HAN Zhao_yuan, YIN Xie_zhen. Shock Dynamics[M]. Netherland: Kluwer Academic Publi_Sher/ Science Press, 1993.

[3] Lee E H. Plastic_wave propagation analysis and elastic_plastic theory at finite deformation[A]. In: Burke J J, Weiss V Eds. Shock Waves and the Mechanical Properties of Solids[C]. New York: Syracuse University Press, 1971, 210—255.

[4] 经福谦. 实验物态方程导引[M]. 第二版. 北京: 科学出版社, 1999.

[5] Ting T C T, LI Yong_chi. Eulerian formulation of transport equations for three_dimensional shock waves in simple elastic solids[J]. Journal of Elasticity, 1983, **13**(3): 295—310.

[6] 李永池, 丁启财. 三维弹性固体中冲击波传输方程的 Lagrange 描述[J]. 应用数学和力学, 1982, **3**(4): 449—462.

[7] LI Yong_chi, Ting T C T. Simple waves and shock waves generated by an incident shock wave in two_dimensional hyperelastic materials[J]. Transactions of the ASME, 1984, **51**(3): 586—594.

[8] 李永池, 刘鲁峰, 唐之景. 非线性弹性介质中冲击波斜反射的研究[J]. 爆炸与冲击, 1988, **8**(1): 7—14.

[9] 李永池, 刘鲁峰, 唐之景. 非线性弹性介质中冲击波斜反射的研究(Ⅱ)[J]. 爆炸与冲击, 1989, **9**(3): 206—211.

[10] 唐之景, 丁启财, 李永池. 不可压缩弹性固体中的二维应力波分析[J]. 应用数学和力学, 1989, **10**(8): 669—677.

Some Problems on the Jump Conditions of Shock Waves in 3_Dimensional Solids

LI Yong_chi, YAO Lei, HU Xiu_zhang,
CAO Jie_dong, DONG Jie

(Department of Mechanics and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, P. R. China)

Abstract: Based on the general conservation laws in continuum mechanics, the Eulerian and Lagrangian descriptions of the jump conditions of shock waves in 3_dimensional solids were presented respectively. The implication of the jump conditions and their relations between each other, particularly the relation between the mass conservation and the displacement continuity, were discussed. Meanwhile the shock wave response curves of the shock waves in 3_dimensional solids, i. e. the Hugoniot curves were analysed, which provide the foundation to study the coupling effects of shock waves in 3_dimensional solids.

Key words: 3_dimensional solid; shock wave; jump condition; shock response curve