

文章编号: 1000-0887(2006) 02-0177-09

平面电磁弹性固体的辛对偶体系*

姚伟岸, 李晓川

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

(钟万勰推荐)

摘要: 从电磁弹性固体广义变分原理出发, 将平面电磁弹性固体问题导入 Hamilton 体系。于是在由原变量——位移、电势和磁势以及它们的对偶变量——纵向应力、电位移和磁感应强度组成的辛几何空间, 形成有效的分离变量及辛本征函数向量展开解法。求解出辛本征问题中特殊的零本征值所有本征解及其 Jordan 型本征解, 并给出其具体的物理意义。最后求出在矩形域的两侧作用均布载荷、常电位移和常磁感应强度时的非齐次特解。

关键词: 电磁弹性固体; 平面问题; 辛几何空间; 对偶体系; 分离变量

中图分类号: O343 **文献标识码:** A

引 言

电磁弹性固体特有的力、电和磁多场耦合性能使其成为一种新型功能材料, 并在众多高新技术领域显示出良好的应用前景。对电磁弹性固体的研究在力学、材料科学和物理学的领域都取得了一些研究成果^[1~5], 形成了一门新兴的交叉学科。由于多场耦合, 电磁弹性固体问题的求解比之弹性力学问题的求解更加困难。辛弹性力学及应用力学对偶体系的方法论已经成功地应用于力学的多个学科领域, 突破了经典弹性力学求解体系的限制, 通过理性的推导扩大了解析求解范围^[6,7]。统一的辛对偶体系方法论也可以应用到电磁弹性固体问题的求解, 并已有初步研究成果^[8]。

本文讨论的是平面电磁弹性固体问题。从其广义变分原理出发, 通过引入原变量——位移、电势和磁势的对偶变量——纵向应力、电位移和磁感应强度, 将原问题导入辛几何空间, 形成原问题的辛求解体系。然后利用有效的数学物理方法, 如分离变量法和辛本征向量的展开法进行求解。在辛本征问题中, 零本征值是一个非常特殊的本征值, 对应的本征解及其 Jordan 型本征解具有特殊的物理意义, 它们是构成 Saint_Venant 问题的基本解。

1 基本方程及边界条件

本文讨论的是横观各向同性电磁弹性固体, 其中 z 轴与极化方向一致。如果 y 方向的几

* 收稿日期: 2004_09_28; 修订日期: 2005_10_17

基金项目: 国家自然科学基金项目资助目(10172021)

作者简介: 姚伟岸(1963—), 男, 辽宁人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人, Tel: + 86_411_84707154; Fax: + 86_411_84708400; E-mail: ywa@dlut.edu.cn);

李晓川(1975—), 男, 辽宁人, 博士生(E-mail: li_xiaochuan@tom.com)。

何尺寸和荷载等满足特定的条件, 则问题可简化成 xOz 平面内的平面问题。平面问题的基本方程有:

1) 控制场方程:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = f_x, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = f_z, \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

2) 梯度方程:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad H_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad H_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}; \end{cases} \quad (2)$$

3) 本构方程:

$$\begin{cases} \sigma_x = c_{11} \varepsilon_x + c_{13} \varepsilon_z - e_{31} E_z - q_{31} H_z, \quad \sigma_z = c_{13} \varepsilon_x + c_{33} \varepsilon_z - e_{33} E_z - q_{33} H_z, \\ \tau_{xz} = c_{44} \gamma_{xz} - e_{15} E_x - q_{15} H_x, \quad D_x = e_{15} \gamma_{xz} + K_{11} E_x + \alpha_{11} H_x, \\ D_z = e_{31} \varepsilon_x + e_{33} \varepsilon_z + K_{33} E_z + \alpha_{33} H_z, \quad B_x = q_{15} \gamma_{xz} + \alpha_{11} E_x + \mu_{11} H_x, \\ B_z = q_{31} \varepsilon_x + q_{33} \varepsilon_z + \alpha_{33} E_z + \mu_{33} H_z; \end{cases} \quad (3)$$

其中 u 和 w 分别为 x 和 z 方向的位移分量, 而 σ_x 、 σ_z 和 τ_{xz} 为相应的应力分量, D_x 、 D_z 和 Φ 分别为电位移分量和电势, B_x 、 B_z 和 Ψ 分别为磁感应强度分量和磁势, f_x 、 f_z 和 ρ 分别为域 Ω 内的体积力分量和电荷密度。 c_{ij} 、 K_{ij} 和 μ_{ij} 等分别是弹性常数、介电常数和磁通率, e_{ij} 、 q_{ij} 和 α_{ij} 等分别是压电、压磁和电磁耦合常数。式(3)也可改写成如下形式

$$\begin{cases} \varepsilon_x = s_{11} \sigma_x + s_{13} \sigma_z + d_{31} D_z + b_{31} B_z, \quad \varepsilon_z = s_{13} \sigma_x + s_{33} \sigma_z + d_{33} D_z + b_{33} B_z, \\ \gamma_{xz} = s_{44} \tau_{xz} + d_{15} D_x + b_{15} B_x, \quad E_x = -d_{15} \tau_{xz} + \lambda_{11} D_x + \beta_{11} B_x, \\ E_z = -d_{31} \sigma_x - d_{33} \sigma_z + \lambda_{33} D_z + \beta_{33} B_z, \quad H_x = -b_{15} \tau_{xz} + \beta_{11} D_x + \nu_{11} B_x, \\ H_z = -b_{31} \sigma_x - b_{33} \sigma_z + \beta_{33} D_z + \nu_{33} B_z. \end{cases} \quad (4)$$

而其边界条件有:

1) 力学边界条件

$$u = \bar{u}, \quad w = \bar{w}, \quad \text{在 } \Gamma_u \text{ 上}, \quad (5)$$

$$\sigma_x n_x + \tau_{xz} n_z = \bar{t}_x, \quad \tau_{xz} n_x + \sigma_z n_z = \bar{t}_z, \quad \text{在 } \Gamma_t \text{ 上}, \quad (6)$$

其中 n_i ($i = x, z$) 是边界 Γ 的外法线方向余弦;

2) 电学边界条件

$$D_x n_x + D_z n_z = \bar{g}, \quad \text{在 } \Gamma_g \text{ 上}, \quad (7)$$

$$\Phi = \bar{\Phi}, \quad \text{在 } \Gamma_\Phi \text{ 上}; \quad (8)$$

3) 磁学边界条件

$$B_x n_x + B_z n_z = \bar{m}, \quad \text{在 } \Gamma_m \text{ 上}, \quad (9)$$

$$\Psi = \bar{\Psi}, \quad \text{在 } \Gamma_\Psi \text{ 上}; \quad (10)$$

且有 $\Gamma_t + \Gamma_u = \Gamma_g + \Gamma_\Phi = \Gamma_m + \Gamma_\Psi = \Gamma$, $\Gamma_t \cap \Gamma_u = \Gamma_g \cap \Gamma_\Phi = \Gamma_m \cap \Gamma_\Psi = \mathbf{f}$ 。

根据文献[5]可以写出平面问题的一个广义变分原理为

$$\delta \Pi = \delta \left\{ \iint_{\Omega} \left[-U + \alpha_x \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + D_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + D_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} + B_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + B_z \frac{\partial \Psi}{\partial z} + u f_x + w f_z + \Phi \rho \right] dx dz + \text{边界项} \right\} = 0, \quad (11)$$

其中

$$U = \frac{1}{2} [s_{11}\sigma_x^2 + s_{33}\sigma_z^2 + s_{44}\tau_{xz}^2 - \lambda_{11}D_x^2 - \lambda_{33}D_z^2 - \nu_{11}B_x^2 - \nu_{33}B_z^2] + s_{13}\alpha_x\sigma_z + d_{15}\tau_{xz}D_x + d_{31}\alpha_xD_z + d_{33}\alpha_zD_z + b_{15}\tau_{xz}B_x + b_{31}\alpha_xB_z + b_{33}\alpha_zB_z - \beta_{11}D_xB_x - \beta_{33}D_zB_z \quad (12)$$

2 导入辛几何空间

讨论如图 1 所示的矩形域。首先将纵向 z 坐标模拟成 Hamilton 体系的时间坐标, 并用上标点表示对 z 的微商, 即 $(\dot{}) = \partial/\partial z$, 同时将 α_x 、 τ_{xz} 、 D_x 和 B_x 简记为 σ 、 τ 、 D 和 B 。执行式(11)对 α_x 、 D_x 和 B_x 的变分, 整理得

$$\alpha_x = \frac{1}{s_{11}} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - s_{13}\sigma - d_{31}D - b_{31}B \right], \quad (13)$$

$$D_x = \frac{1}{\Delta} \left[C_1\tau - \nu_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta_{11} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right], \quad (14)$$

$$B_x = \frac{1}{\Delta} \left[C_2\tau + \beta_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \lambda_{11} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right], \quad (15)$$

其中 Δ 、 C_1 和 C_2 的计算公式见附录。将式(13)~(15)代入式(11)整理即得 Hamilton 体系的混合能变分原理

$$\delta \left\{ \int_0^l \int_{-h}^h [\alpha_x \dot{u} + \tau_{xz} \dot{\Phi} + D \dot{\Psi} - H(w, u, \Phi, \Psi, \sigma, \tau, D, B)] dx dz + \text{边界项} \right\} = 0, \quad (16)$$

其中 Hamilton 密度函数为

$$H = \frac{1}{2s_{11}} [C_3\sigma^2 + s_{11}s_{44}\tau^2 - C_4D^2 - C_5B^2 + 2C_6D\sigma + 2C_7B\sigma - 2C_8BD] - \frac{1}{2s_{11}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{s_{13}}{s_{11}} \sigma \frac{\partial u}{\partial x} - \tau \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{d_{31}}{s_{11}} D \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_{31}}{s_{11}} B \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \lambda_{11} D_x^2 + \frac{1}{2} \nu_{11} B_x^2 + \beta_{11} D_x B_x - u f_x - u f_z - \Phi \Psi \quad (17)$$

即原变量 w 、 u 、 Φ 和 Ψ 的对偶变量分别是 σ 、 τ 、 D 和 B , 它们按照下面的辛内积定义^[6] 组成一辛几何空间的全状态向量 $\mathbf{v} = (w \ u \ \Phi \ \Psi \ \sigma \ \tau \ D \ B)^T$,

$$\langle \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-h}^h (\mathbf{v}^{(1)})^T \mathbf{J} \mathbf{v}^{(2)} dx, \quad (18)$$

其中 \mathbf{J} 为单位辛矩阵

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_4 \\ -\mathbf{I}_4 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_4 \text{ 为 4 阶单位矩阵}, \quad (19)$$

若辛内积 $\langle \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)} \rangle = 0$, 则称 $\mathbf{v}^{(1)}$ 与 $\mathbf{v}^{(2)}$ 辛正交; 否则, 称 $\mathbf{v}^{(1)}$ 与 $\mathbf{v}^{(2)}$ 辛共轭^[6]。

执行式(16)的变分, 即得用全状态向量描述的对偶方程组

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H}\mathbf{v} + \mathbf{Q}, \quad (20)$$

而 \mathbf{H} 为算子矩阵

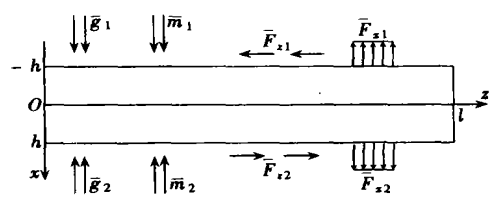


图 1 电磁弹性固体矩形域问题

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{s_{31}}{s_{11}} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{C_3}{s_{11}} & 0 & \frac{C_6}{s_{11}} & \frac{C_7}{s_{11}} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{C_1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{C_2}{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & C_9 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_{31}}{s_{11}} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{C_6}{s_{11}} & 0 & -\frac{C_4}{s_{11}} & -\frac{C_8}{s_{11}} \\ 0 & \frac{b_{31}}{s_{11}} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{C_7}{s_{11}} & 0 & -\frac{C_8}{s_{11}} & -\frac{C_5}{s_{11}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{s_{11}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & \frac{s_{13}}{s_{11}} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{d_{31}}{s_{11}} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{b_{31}}{s_{11}} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\nu_{11}}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\beta_{11}}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & -\frac{C_1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta_{11}}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\lambda_{11}}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & -\frac{C_2}{\Delta} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

其中的系数 C_i 等见附录. \mathbf{Q} 为与体力和体电荷有关的非齐次项

$$\mathbf{Q} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ f_z \ f_x \ \rho \ 0)^T. \quad (22)$$

要求解非齐次线性偏微分方程组 (20), 应先求解其相应齐次方程组

$$\mathbf{v} = \mathbf{H}\mathbf{v}, \quad (23)$$

它通常可以用分离变量法进行求解. 令

$$\mathbf{v}(x, z) = \xi(z) \mathbf{Y}(x), \quad (24)$$

将其代入 (23) 式即可以得到

$$\mathbf{H}\mathbf{Y}(x) = \eta \mathbf{Y}(x), \quad \xi(z) = e^{\eta z}, \quad (25)$$

其中 η 是待求本征值; 而 $\mathbf{Y}(x)$ 是本征函数向量, 它还应当满足两侧 $x = \pm h$ 的边界条件 (5) ~ (10) 对应的齐次边界条件.

为了讨论算子矩阵 \mathbf{H} 的性质, 进行分部积分有

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{H}\mathbf{v}^{(2)} \rangle &= \langle \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{H}\mathbf{v}^{(1)} \rangle + \\
 &\left[u_1 \left\{ -\frac{1}{s_{11}} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{s_{13}}{s_{11}} \sigma_2 + \frac{d_{31}}{s_{11}} D_2 + \frac{b_{31}}{s_{11}} B_2 \right\} - w_1 \tau_2 \right]_{x=-h}^h + \\
 &\left[u_2 \left\{ \frac{1}{s_{11}} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{s_{13}}{s_{11}} \sigma_1 - \frac{d_{31}}{s_{11}} D_1 - \frac{b_{31}}{s_{11}} B_1 \right\} + w_2 \tau_1 \right]_{x=-h}^h + \\
 &\left[\Phi_1 \frac{1}{\Delta} \left\{ -C_1 \tau_2 + \nu_{11} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \beta_{11} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right\} \right]_{x=-h}^h + \\
 &\left[\Phi_2 \frac{1}{\Delta} \left\{ C_1 \tau_1 - \nu_{11} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \beta_{11} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right\} \right]_{x=-h}^h + \\
 &\left[\Psi_1 \frac{1}{\Delta} \left\{ -C_2 \tau_2 - \beta_{11} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \lambda_{11} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right\} \right]_{x=-h}^h + \\
 &\left[\Psi_2 \frac{1}{\Delta} \left\{ C_2 \tau_1 + \beta_{11} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \lambda_{11} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right\} \right]_{x=-h}^h. \quad (26)
 \end{aligned}$$

显然只要 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 在两侧边满足式 (5) ~ (10) 的任何一种可能组合的齐次边界条件, 则恒有

$$\langle \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{H}\mathbf{v}^{(2)} \rangle \equiv \langle \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{H}\mathbf{v}^{(1)} \rangle, \quad (27)$$

即算子矩阵 \mathbf{H} 为辛几何空间的 Hamilton 算子矩阵, 因此其本征值是有特点的, 即如果 η 是其本征值, 则 $-\eta$ 也一定是其本征值, 而且本征函数向量之间有共轭辛正交关系^[6]. 一旦给出其本征值及其本征函数向量就可应用展开定理求解原问题的解. 限于篇幅, 这里就不讨论了.

3 零本征值的本征解

当两侧边为自由等齐次边界条件时, (25) 式的本征问题将存在零本征值. 零本征值是 Hamilton 算子矩阵特殊的本征值, 其对应解是有特殊物理意义的基本解, 是非衰减的解. 余下一个特殊的两侧边界条件为例, 具体讨论其对应的零本征值的本征解. 假设两侧边界条件为边界的面力、电位移和磁感应强度为零的齐次边界条件时, 即有

$$\frac{1}{s_{11}} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - s_{13} \sigma - d_{31} D - b_{31} B \right] = \tau = \frac{1}{\Delta} \left[-\nu_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta_{11} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + C_1 \tau \right] =$$

$$\frac{1}{\Delta} \left[\beta_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \lambda_{11} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + C_2 \tau \right] = 0, \quad \text{当 } x = \pm h \text{ 时}, \quad (28)$$

求解带有边界条件 (28) 的本征方程 (25) 可得 4 个线性无关的基本本征解

$$\mathbf{v}_{0f}^{(0)} = \mathbf{Y}_f^{(0)} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \quad (29)$$

$$\mathbf{v}_{0s}^{(0)} = \mathbf{Y}_s^{(0)} = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \quad (30)$$

$$\mathbf{v}_{0t}^{(0)} = \mathbf{Y}_t^{(0)} = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \quad (31)$$

$$\mathbf{v}_{0r}^{(0)} = \mathbf{Y}_r^{(0)} = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \quad (32)$$

即有 4 条链, 分别用下标 f 、 s 、 t 和 r 区分. 这 4 个基本本征向量本身就是原方程 (23) 及其边界条件 (28) 的解. 它们的物理意义分别为 z 方向刚体平移, x 方向刚体平移, 常电势和常磁势的基本解. 由于这些解互相之间是辛正交的, 因此一定还存在 Jordan 型本征解.

零本征值的 Jordan 型本征解应求解带有边界条件 (28) 的方程

$$\mathbf{H}\mathbf{Y}_0^{(i)} = \mathbf{Y}_0^{(i-1)}, \quad (33)$$

其中 i 和 $i-1$ 分别代表第 i 和 $i-1$ 阶 Jordan 型(或基本)本征解.

将式 (29) ~ (32) 的基本本征解分别代入上式, 可解得一阶 Jordan 型本征解为

$$\mathbf{Y}_f^{(1)} = (0 \ b_{1x} \ 0 \ 0 \ a_1 \ 0 \ a_2 \ a_3)^T, \quad (34)$$

$$\mathbf{Y}_{0s}^{(1)} = (-x \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \quad (35)$$

$$\mathbf{Y}_{0t}^{(1)} = (0 \ b_{2x} \ 0 \ 0 \ a_2 \ 0 \ a_4 \ a_5)^T, \quad (36)$$

$$\mathbf{Y}_r^{(1)} = (0 \ b_{3x} \ 0 \ 0 \ a_3 \ 0 \ a_5 \ a_6)^T, \quad (37)$$

其中 $b_1 \sim b_3$ 的计算公式见附录. 记

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} s_{33} & d_{33} & b_{33} \\ d_{33} & -\lambda_{33} & -\beta_{33} \\ b_{33} & -\beta_{33} & -\nu_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_6 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

此时一阶 Jordan 型本征向量已不是原方程 (23) 的解, 但由它可组成原方程的解

$$\mathbf{v}_{0i}^{(1)} = \mathbf{Y}_{0i}^{(1)} + z \mathbf{Y}_{0i}^{(0)}, \quad (39)$$

其中 i 分别代表 f 、 s 、 t 和 r . 下面具体写出 $\mathbf{v}_{0i}^{(1)}$ 的分量形式.

$\mathbf{v}_{0f}^{(1)}$ 的分量形式为

$$w = z, \quad u = b_{1x}, \quad \Phi = \Psi = 0, \quad \sigma = a_1, \quad \tau = 0, \quad D = a_2, \quad B = a_3, \quad (40)$$

其物理意义为 z 向均匀拉伸解.

$\mathbf{v}_{0s}^{(1)}$ 的分量形式为

$$w = -x, u = z, \Phi = \Psi = 0, \sigma = \tau = D = B = 0, \quad (41)$$

其物理意义为面内刚体旋转解。

$v_{0i}^{(1)}$ 的分量形式为

$$w = 0, u = b_2x, \Phi = z, \Psi = 0, \sigma = a_2, \tau = 0, D = a_4, B = a_5, \quad (42)$$

其物理意义为 z 向常电位移的压电效应解。

$v_{0r}^{(1)}$ 的分量形式为

$$w = 0, u = b_3x, \Phi = 0, \Psi = z, \sigma = a_3, \tau = 0, D = a_5, B = a_6, \quad (43)$$

这个解的物理意义为 z 向常磁感应强度的压磁效应解。

显然第 1、3 和 4 链上的解是关于 z 轴为对称变形的解, 而第 2 条链关于 z 轴为反对称变形的解。对称变形的本征解与反对称变形的本征解之间一定是辛正交的。为了达成一组共轭辛正交基, 首先对对称变形解进行辛正交化处理。根据文献[6]提供的计算方法, 取

$$Y_{0i}^{(0)} = Y_{0i}^{(0)} + t_1 Y_{0i}^{(0)} = (t_1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \quad (44)$$

$$Y_{0r}^{(0)} = Y_{0r}^{(0)} + t_2 Y_{0r}^{(0)} + t_3 Y_{0i}^{(0)} = (t_2 + t_3 t_1 \ 0 \ t_3 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \quad (45)$$

则 $Y_{0i}^{(1)}$ 与 $Y_{0r}^{(1)}$ 相应地应变为

$$Y_{0i}^{(1)} = Y_{0i}^{(1)} + t_1 Y_{0i}^{(1)} = (0 \ (b_2 + t_1 b_1)x \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ a_4 + t_1 a_2 \ a_5 + t_1 a_3)^T, \quad (46)$$

$$Y_{0r}^{(1)} = Y_{0r}^{(1)} + t_2 Y_{0r}^{(1)} + t_3 Y_{0i}^{(1)} = (0 \ b_4x \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ a_7)^T, \quad (47)$$

其中 t_1, t_2, t_3, b_4 和 a_7 的计算公式见附录。

现在已经达成了对称变形的本征解 $Y_{0i}^{(0)}, Y_{0r}^{(0)}, Y_{0i}^{(1)}, Y_{0r}^{(1)}$ 和 $Y_{0i}^{(1)}$ 之间的共轭辛正交的关系。也就是说除了 $Y_{0i}^{(0)}, Y_{0r}^{(0)}$ 和 $Y_{0i}^{(1)}$ 与 $Y_{0i}^{(1)}, Y_{0r}^{(1)}$ 和 $Y_{0i}^{(1)}$ 分别辛共轭外, 其余均为辛正交关系。这表明零本征值的对称变形本征解仅有这 6 个, 它们不存在二阶 Jordan 型本征解。事实上通过直接求解也可以验证这一点。

再看反对称变形的本征解。因为向量 $Y_{0s}^{(0)}$ 与 $Y_{0s}^{(1)}$ 辛正交, 因此第 2 条链一定还存在二阶 Jordan 型本征解。经求解

$$Y_{0s}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.5b_1x^2 & 0 & 0 & -a_1x & 0 & -a_2x & -a_3x \end{pmatrix}^T, \quad (48)$$

由它可组成原方程的解为

$$v_{0s}^{(2)} = Y_{0s}^{(2)} + z Y_{0s}^{(1)} + 0.5z^2 Y_{0s}^{(0)}, \quad (49)$$

写成分量形式为

$$\begin{cases} w = -xz, u = -0.5b_1x^2 + 0.5z^2, \Phi = \Psi = 0, \\ \sigma = -a_1x, \tau = 0, D = -a_2x, B = -a_3x, \end{cases} \quad (50)$$

这个解的物理意义为纯弯曲解。由于 $Y_{0s}^{(2)}$ 与 $Y_{0s}^{(0)}$ 仍然辛正交, 因此第 2 条链一定还存在三阶 Jordan 型本征向量, 求解可得

$$Y_{0s}^{(3)} = \begin{pmatrix} a_8x^3 + b_5x & 0 & a_9(x^3 - 3h^2x) & a_{10}(x^3 - 3h^2x) & 0 & 0.5a_1(x^2 - h^2) & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad (51)$$

其中常数 a_8, a_9, a_{10} 和 b_5 的计算公式见附录。由它可组成原方程的解

$$v_{0s}^{(3)} = Y_{0s}^{(3)} + z Y_{0s}^{(2)} + z^2 Y_{0s}^{(1)}/2 + z^3 Y_{0s}^{(0)}/6, \quad (52)$$

写成分量形式为

$$\begin{cases} w = a_8x^3 + b_5x - xz^2/2, u = -b_1x^2z/2 + z^3/6, \\ \Phi = a_9(x^3 - 3h^2x), \Psi = a_{10}(x^3 - 3h^2x), \\ \sigma = -a_1xz, \tau = a_1(x^2 - h^2)/2, D = -a_2xz, B = -a_3xz, \end{cases} \quad (53)$$

这个解的物理意义为常剪力弯曲解。由于 $Y_{0s}^{(3)}$ 与 $Y_{0s}^{(0)}$ 不再辛正交, 而是辛共轭, 因此第 2 条链不存在四阶 Jordan 型本征向量。事实上通过进一步求解也可验证这一点。

下面对反对称变形的解进行辛正交化处理。根据文献[6]提供的计算方法, 取

$$Y_{0s}^{(2)} = Y_{0s}^{(2)} + t_4 Y_{0s}^{(0)}, \quad (54)$$

其中 t_4 的计算公式见附录。则 $Y_{0s}^{(3)}$ 相应地变为

$$Y_{0s}^{(3)} = Y_{0s}^{(3)} + t_4 Y_{0s}^{(1)}. \quad (55)$$

至此, 得到由 Hamilton 矩阵 H 的零本征值的本征向量构成的一组共轭辛正交基是

$$Y_{0r}^{(0)}, Y_{0s}^{(0)}, Y_{0l}^{(1)}, Y_{0l}^{(0)}, Y_{0r}^{(0)}; Y_{0r}^{(1)}, Y_{0s}^{(3)}, Y_{0s}^{(2)}, Y_{0l}^{(1)}, Y_{0r}^{(1)}, \quad (56)$$

这组共轭辛正交基可以张成一个完备的辛子空间, 它们就是构成 Saint Venant 问题的基本解。

4 非齐次特解

上节讨论了带有齐次边界条件(28)的方程组(25)的零本征值对应的本征解及其 Jordan 型本征解。对于具有均布外载荷、常电位移和常磁感应强度等的情况, 这套方法还可以用于继续求出非齐次边界条件的特解。

例如通过链 1 的 Jordan 型本征向量 $Y_{0r}^{(1)}$ 可以求出在矩形域的两侧作用 z 方向有对称均布外表面力时的一个非齐次特解。利用方程 $HY_{\tau} = Y_{0r}^{(1)}$ 可求得在两侧边界条件为

$$\alpha_x = 0, \quad \tau = 1, \quad D_x = 1, \quad B_x = 1, \quad \text{当 } x = \pm h \text{ 时} \quad (57)$$

的一个 Jordan 型特解

$$Y_{\tau} = (b_{1x}^{\tau} x^2 \quad 0 \quad b_{2x}^{\tau} x^2 \quad b_{3x}^{\tau} x^2 \quad 0 \quad -a_{1x} \quad 0 \quad 0)^T, \quad (58)$$

其中常数 $b_1^{\tau} \sim b_3^{\tau}$ 的计算公式见附录。当然 Y_{τ} 不是原问题(20)的特解, 但由它可以组成原问题的一个特解

$$v_{\tau} = Y_{\tau} + z Y_{0r}^{(1)} + 0.5z^2 Y_{0r}^{(0)}. \quad (59)$$

通过链 3 的 Jordan 型本征向量 $Y_{0l}^{(1)}$, 可以求出在矩形域的两侧作用有常电位移时的一个非齐次特解。利用方程 $HY_D = Y_{0l}^{(1)}$, 可求得在两侧边界条件为

$$\alpha_x = 0, \quad \tau = 0, \quad D_x = 1, \quad B_x = 1, \quad \text{当 } x = \pm h \text{ 时} \quad (60)$$

的一个 Jordan 型特解

$$Y_D = (b_{1x}^D x^2 \quad 0 \quad b_{2x}^D x^2 \quad b_{3x}^D x^2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T, \quad (61)$$

其中常数 $b_1^D \sim b_3^D$ 的计算公式见附录。同样 Y_D 不是原问题(20)的解, 原问题的特解是

$$v_D = Y_D + z Y_{0l}^{(1)} + 0.5z^2 Y_{0l}^{(0)}. \quad (62)$$

通过链 4 的 Jordan 型本征向量 $Y_{0r}^{(1)}$, 可以求出在矩形域的两侧作用有对称常磁感应强度时的一个非齐次特解。利用方程 $HY_B = Y_{0r}^{(1)}$, 可求得在两侧边界条件为

$$\alpha_x = 0, \quad \tau = 0, \quad D_x = 0, \quad B_x = 1, \quad \text{当 } x = \pm h \text{ 时} \quad (63)$$

的一个 Jordan 型特解

$$Y_B = (b_{1x}^B x^2 \quad 0 \quad b_{2x}^B x^2 \quad b_{3x}^B x^2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T, \quad (64)$$

其中常数 $b_1^B \sim b_3^B$ 的计算公式见附录。同样 Y_B 也不是原问题(20)的解, 原问题的特解是

$$v_B = Y_B + z Y_{0r}^{(1)} + 0.5z^2 Y_{0r}^{(0)}. \quad (65)$$

而两侧边有对称正应力的特解可利用方程 $HY_{\sigma} = \mathbf{0}$ 求得, 此时两侧边界条件为

$$\alpha_x = 1, \quad \tau = 0, \quad D_x = 0, \quad B_x = 0, \quad \text{当 } x = \pm h \text{ 时}, \quad (66)$$

它的一个 Jordan 型特解为

$$Y_0 = (0 \quad b_1^0 x \quad 0 \quad 0 \quad b_2^0 \quad 0 \quad b_3^0 \quad b_4^0)^T, \quad (67)$$

其中常数 $b_1^0 \sim b_4^0$ 的计算公式见附录。当然, Y_0 就是原问题(20)的一个特解。

有了对称变形的特解(59)、(62)、(65)和(67),我们就可以通过叠加原理组成在两侧边有任意对称均布外表面力、常电位移和常磁感应强度的特解。

用同样的方法,通过链2的 Jordan 型本征向量 $Y_{0s}^{(3)}$, 可以求出在矩形域的两侧作用反对称均布外表面力、常电位移和常磁感应强度的特解。事实上两侧边界为线性分布以及高阶次多项式分布形式等荷载的情况,还可以通过继续求解其次阶 Jordan 型而得到。

求解出这些特解之后,余下的就可根据叠加原理和辛本征展开定理,求解对应问题的解析解。例如,由零本征值的本征解以及两侧边非齐次边界的特解就可以求解出 Saint Venant 问题的解析解^[6]。当然,对域内有突变荷载等情况的精确求解还需要讨论非零本征值的本征解,限于篇幅这里就不一一讨论,详细的求解过程可参见文献[6]。

5 结束语

本文将辛弹性力学的辛求解方法进一步引入到电磁弹性固体问题中,实现了电磁弹性固体平面各向异性问题从 Euclidean 空间向辛几何空间、从 Lagrange 体系向 Hamilton 体系的过渡,并通过分离变量形成了辛本征问题。求出零本征值对应的本征解及其 Jordan 型本征解,并给出了它们的物理意义,它们是构成 Saint Venant 问题的基本解。同时求出在矩形域的两侧作用均布荷载、常电位移和常磁感应强度的非齐次特解。

这里虽然讨论的是电磁弹性固体平面各向异性问题,但这套方法也可以扩展到三维问题,并对更复杂问题在方法上有一定的借鉴意义。

附 录

$$\Delta = \lambda_{11} \nu_{11} - \beta_{11}^2; \quad (A_1)$$

$$C_1 = \nu_{11} d_{15} - \beta_{11} b_{15}, \quad C_2 = \lambda_{11} b_{15} - \beta_{11} d_{15}; \quad (A_2)$$

$$C_3 = s_{11} s_{33} - s_{13}^2, \quad C_4 = s_{11} \lambda_{33} + d_{31}^2, \quad C_5 = s_{11} \nu_{33} + b_{31}^2; \quad (A_3)$$

$$C_6 = s_{11} d_{33} - s_{13} d_{31}, \quad C_7 = s_{11} b_{33} - s_{13} b_{31}, \quad C_8 = s_{11} \beta_{33} + b_{31} d_{31}; \quad (A_4)$$

$$C_9 = s_{44} + (d_{15} C_1 + b_{15} C_2) / \Delta; \quad (A_5)$$

$$b_1 = s_{13} a_1 + d_{31} a_2 + b_{31} a_3, \quad (A_6)$$

$$b_2 = s_{13} a_2 + d_{31} a_4 + b_{31} a_5, \quad (A_7)$$

$$b_3 = s_{13} a_3 + d_{31} a_5 + b_{31} a_6, \quad (A_8)$$

$$b_4 = (b_3 + t_2 b_1) + t_3 (b_2 + t_1 b_1), \quad (A_9)$$

$$b_5 = (-3a_9 C_1 / \Delta - 3a_{10} C_2 / \Delta + a_1 C_9 / 2) h^2; \quad (A_{10})$$

$$a_7 = a_6 + t_2 a_3 + t_3 (a_6 + t_1 a_3), \quad (A_{11})$$

$$a_8 = -a_9 C_1 / \Delta - a_{10} C_2 / \Delta + (a_1 C_9 + b_1) / 6, \quad (A_{12})$$

$$a_9 = [\lambda_{11} (a_1 C_1 - \Delta a_2) + \beta_{11} (a_1 C_2 - \Delta a_3)] / 6 \Delta, \quad (A_{13})$$

$$a_{10} = [\nu_{11} (a_1 C_2 - \Delta a_3) + \beta_{11} (a_1 C_1 - \Delta a_2)] / 6 \Delta; \quad (A_{14})$$

$$t_1 = -a_2 / a_1, \quad t_2 = -a_3 / a_1, \quad t_3 = -\frac{a_1 a_6 - a_2 a_3}{a_1 a_5 - a_2^2}, \quad t_4 = -\langle Y_{0s}^{(2)}, Y_{0s}^{(3)} \rangle / a; \quad (A_{15})$$

$$a = \langle Y_{0s}^{(1)}, Y_{0s}^{(2)} \rangle = 2a_1 h^3 / 3; \quad (A_{16})$$

$$b_1^\top = -(C_1 b_2^\top + C_2 b_3^\top) / \Delta - (b_1 + a_1 C_9) / 2, \quad (A_{17})$$

$$b_2^\top = [\lambda_{11} (\Delta a_2 - a_1 C_1) + \beta_{11} (\Delta a_3 - a_1 C_2)] / (2 \Delta), \quad (A_{18})$$

$$b_3^\top = [\nu_{11} (\Delta a_3 - a_1 C_2) + \beta_{11} (\Delta a_2 - a_1 C_1)] / (2 \Delta); \quad (A_{19})$$

$$b_1^D = - (C_1 b_2^D + C_2 b_3^D) / \Delta - (b_2 + t_1 b_1) / 2, \quad (\text{A}_20)$$

$$b_2^D = [\lambda_{11}(a_4 + t_1 a_2) + \beta_{11}(a_5 + t_1 a_3)] / 2, \quad (\text{A}_21)$$

$$b_3^D = [\nu_{11}(a_5 + t_1 a_3) + \beta_{11}(a_4 + t_1 a_2)] / 2; \quad (\text{A}_22)$$

$$b_1^B = - (C_1 b_2^B + C_2 b_3^B) / \Delta - b_4 / 2, \quad b_2^B = a_7 \beta_{11} / 2, \quad b_3^B = a_7 \nu_{11} / 2; \quad (\text{A}_23)$$

$$b_1^o = (s_{13} M_1 + d_{31} M_2 + b_{31} M_3) / |M| + s_{11}, \quad (\text{A}_24)$$

$$b_2^o = M_1 / |M|, \quad b_3^o = M_2 / |M|, \quad b_4^o = M_3 / |M|; \quad (\text{A}_25)$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} -s_{13} & d_{33} & b_{33} \\ -d_{31} & -\lambda_{33} & -\beta_{33} \\ -b_{31} & -\beta_{33} & -\nu_{33} \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} s_{33} & -s_{13} & b_{33} \\ d_{33} & -d_{31} & -\beta_{33} \\ b_{33} & -b_{31} & -\nu_{33} \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} s_{33} & d_{33} & -s_{13} \\ d_{33} & -\lambda_{33} & -d_{31} \\ b_{33} & -\beta_{33} & -b_{31} \end{vmatrix}. \quad (\text{A}_26)$$

[参 考 文 献]

- [1] Benveniste Y. Magnetolectric effect in fibrous composites with piezoelectric and piezomagnetic phases[J]. Phys Rev B, 1995, **51**(22): 16424—16427.
- [2] Huang J H, Kuo W S. The analysis of piezoelectric/ piezomagnetic composites materials containing ellipsoidal inclusions[J]. J Appl Phys, 1997, **81**(3): 1378—1386.
- [3] Wang X, Shen Y P. The general solution of three-dimensional problems in magnetoelctroelastic media[J]. International Journal of Engineering Science, 2002, **40**(10): 1069—1080.
- [4] 刘金喜. 各向异性电磁弹性介质的 Green 函数[J]. 石家庄铁道学院学报, 2000, **13**(3): 56—59.
- [5] 姚伟岸. 电磁弹性固体三维问题的广义变分原理[J]. 计算力学学报, 2003, **20**(4): 487—489.
- [6] 姚伟岸, 钟万勰. 辛弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
- [7] 钟万勰. 应用力学对偶体系[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [8] 姚伟岸. 电磁弹性固体反平面问题的辛求解体系及圣维南原理[J]. 大连理工大学学报, 2004, **44**(5): 630—633.

Symplectic Duality System on the Plane Magnetoelctroelastic Solids

YAO Wei_an, LI Xiao_chuan

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116023, P. R. China)

Abstract: By means of the generalized variable principle of magnetoelctroelastic solids, the plane magnetoelctroelastic solids problem was derived to Hamiltonian system. In symplectic geometry space, which consists of origin variables, displacements, electric potential and magnetic potential, and their duality variables, lengthways stress, electric displacement and magnetic induction, the effective methods of separation of variables and symplectic eigenfunction expansion were applied to solve the problem. Then all the eigen_solutions and eigen_solutions in Jordan form on eigenvalue zero can be given, and their specific physical significations were showed clearly. At last, the special solutions were presented with uniform loader, constant electric displacement and constant magnetic induction on two sides of the rectangle domain.

Key words: magnetoelctroelastic solid; plane problem; symplectic geometry space; duality system; separation of variables