应用数学和力学, 第 27 卷 第 3 期
2006 年 3 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 27, No. 3, Mar. 15, 2006

文章编号: 1000_0887(2006) 03_0285_08

二维非静力旋转流体方程组的稳定性*

沈　春[1]，王曰朋[1]，施惟慧[2]

(1. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;
2. 上海大学 数学系, 上海 200444)

(戴世强推荐)

摘要：　应用分层理论所提供的方法, 证明了二维非静力 Boussinesq 近似的旋转流体方程组在二阶连续函数类中是一个不稳定性的方程• 并给出方程组的形式解解空间构造和求解方法• 对某些典型的初边值问题,给出了判断其是否存在形式解的充分必要条件以及计算形式解的具体的计算公式•

关　键　词:　Boussinesq 方程组;　稳定性;　初边值问题;　分层
中图分类号:　O175.29　　　文献标识码:　A

引　　言

锋生(frontogenesis)是一种重要的天气现象, 从天气学意义来说, 锋生是指密度不连续所形成的一种过程; 或指已有一个锋面, 其温度(或位温)的水平梯度加大的过程[1, 2]• 锋面的形成, 在我国境内常常伴随着刮风、下雪或下雨等天气现象, 一次强锋过程, 在冬、夏季往往意味着北方的雪灾或南方的暴雨• 因此, 能否准确地预报出锋的形成及其准确的移动位置具有重大的意义• Hoskins 和 Bretherton 提出的半地转锋生模式[1]较好地模拟了大气中变形场和斜压气流不稳定引起的锋生问题, 得到了与锋面的大尺度观测事实比较一致的若干特征• 但在中、小尺度范围内, 锋的许多的特征与中小尺度的非地转运动紧密联系, 而半地转理论不再成立• 二维非静力旋转流体控制方程组就是描述这种现象的一个主要数学模型•

对 Boussinesq 类型方程组的研究, 目前一般采用 Simpson 和 Linden 级数展开方法将场变量展开成时间幂级数, 得到关于 t 的级数解[2~4]• 经过数值模拟, 发现其可信度依赖于时间尺度 T, 但无法说明 t 的有效范围及其原因• 国内也有学者结合使用级数展开和数值积分的方法加以改善, 对锋面附近重力流的产生机制和结构特征做出较好的描述[5]• 但对于方程组本身所作的系统的理论分析和研究则还较少• 本文应用分层理论[6~9]所提供的方法, 通过对这个模型本身的拓扑性质进行分析、研究, 来讨论这个方程组的稳定性•

1　方程与基本定理

非静力 Boussinesq 近似的 x_z 面上二维旋转流体的控制方程组为

* 收稿日期:　2004_06_30;　修订日期:　2005_12_01
基金项目:　国家自然科学基金资助项目(40175014; 90411006)
作者简介:　沈春(1975—), 男, 安徽青阳人, 博士(联系人. Tel: + 86_21_56331051; E_mail: shenchun3641@sina.com)•

$$
\text{(D)}\quad\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{p}{\rho_s}\right)+fv+K_M^H\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+K_M^V\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2},\\
\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}=-fu+K_M^H\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+K_M^V\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2},\\
\dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}=-\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{p}{\rho_s}\right)+\dfrac{g}{\theta_s}\theta+K_M^H\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+K_M^V\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2},\\
\dfrac{\partial \theta}{\partial t}+u\dfrac{\partial \theta}{\partial x}+w\dfrac{\partial \theta}{\partial z}=K_H^H\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+K_H^V\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial z^2},\\
\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0,
\end{cases}\qquad(1)
$$

其中 θ_s 是常参考位温, ρ_s 是参考密度, f 是柯氏参数, θ 为位温对 θ_s 的偏差, K_M^H、K_M^V 分别为动量在水平方向和垂直方向的运动粘性系数, K_H^H、K_H^V 分别为热量在水平方向和垂直方向热耗散系数, 其余符号为气象上的常规含义. 为了简洁, 以下我们均用符号 D 来表示方程组(1).

定义 1　设 $D\subset J^{k_0}(V,Z)$, $x_0\in V$, u 是 D 的一个 $C^k(k\geqslant k_0)$ 解, X 是过 x_0 的任一个超曲面. 如果方程组 D 加上 u 及其 $k(k\leqslant k_0)$ 阶偏导数在 X 上的限制所构成的定解问题都是不适定的, 则称 u 在 x_0 不稳定. 如果 $\forall x\in V$, u 在 X 都不稳定, 则称 u 是 D 的一个不稳定解.

定义 2　如果方程组 D 的所有 $C^k(k\geqslant k_0)$ 解都不稳定, 则称 D 是一个不稳定方程.

基本定理　非静力 Boussinesq 近似的 x-z 面上二维旋转流体的控制方程组 D 在 $C^k(k\geqslant 2)$ 函数类中是一个不稳定性的方程, 即 D 的任何初边值问题均不存在 $C^k(k\geqslant 2)$ 稳定解.

2　基本定理的证明

按照分层理论提供的方法, 对基本定理的证明按如下步骤进行

第 1 步　使用 Ehresmann 空间的局部坐标改写方程.

第 2 步　根据定义计算本方程.

第 3 步　对纤维空间 $\rho_{2,k-1}: E_{2,k-1}(D)\to W_{2,k-1}(V,Z)$ 分层.

文中所涉及的符号与定义请参看文献[6].

2.1　改写方程

为了表达和计算的方便, 引入符号 $k_1=K_M^H$, $k_2=K_M^V$, $k_3=K_H^H$, $k_4=K_H^V$. 记 $V=R^2\times R$, $Z=R^5$, 并把 (x,z,t) 与 (u,v,w,θ,p) 分别改记成 (x_1,x_2,x_3)、(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5), 这样 D 可以看成 Ehresmann 空间 $J^2(V,Z)$ 的一个子集. 利用 Ehresmann 空间的局部坐标, D 可表示为

$$
\begin{cases}
f_1:\quad k_1p_{11}^1+k_2p_{22}^1+\Phi_1=0,\\
f_2:\quad k_1p_{11}^2+k_2p_{22}^2+\Phi_2=0,\\
f_3:\quad k_1p_{11}^3+k_2p_{22}^3+\Phi_3=0,\\
f_4:\quad k_3p_{11}^4+k_4p_{22}^4+\Phi_4=0,\\
f_5:\quad p_1^1+p_2^3=0,
\end{cases}\qquad(2)
$$

其中

$$\begin{cases} \Phi_1 = -(1/\rho_s)p_1^5 + fu_2 - p_3^1 - u_1 p_1^1 - u_3 p_2^1, \\ \Phi_2 = -fu_1 - p_3^2 - u_1 p_1^2 - u_3 p_2^2, \\ \Phi_3 = -(1/\rho_s)p_2^5 + (g/\theta_s)u_4 - p_3^3 - u_1 p_1^3 - u_3 p_2^3, \\ \Phi_4 = -p_3^4 - u_1 p_1^4 - u_3 p_2^4 \cdot \end{cases} \tag{3}$$

在(2)中,每个方程的左侧用 $f_i(i=1\sim5)$ 来表示,

$$f_i: \quad J^2(V,Z) \to R \qquad (i=1\sim5),$$

这样就有

$$D = V(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5) = \bigcap_{i=1}^{5} V(f_i) \subseteq J^2(V,Z),$$

这里 $V(f_i) = f_i^{-1}(0) = \{\beta \mid f_i(\beta) = 0\} \subseteq J^2(V,Z)$ 表示 f_i 的 0 点的集合•

2.2 计算本方程

引理 1 方程组 D 是 1_简单的•

证明 通过计算, D 的准本方程为

$$D'_* = \bigcup_l D'_l, \quad D'_l \subseteq J^l(V,Z) \qquad (l=-1,0,1,2,\cdots);$$

$$D'_{-1} = V, \quad D'_0 = J^0(V,Z), \quad D'_1 = V(f_5), \quad D'_2 = V(f_j, e_i(f_5), f_5),$$

$$D'_3 = V(e_{i_1}(f_j), e_{ii_1}(f_5), f_j, e_i(f_5), f_5),$$

$$\vdots$$

$$D'_k = V(e_{i_1 i_2 \cdots i_{k-2}}(f_j), e_{ii_1 i_2\cdots i_{k-2}}(f_5), \cdots, e_{i_1}(f_j), e_{ii_1}(f_5), f_j, e_i(f_5), f_5),$$

$$(j=1\sim4;\ i, i_1, i_2, \cdots, i_{k-2} = 1,2,3;\ k \geqslant 2)\cdot$$

在 D'_3 中注意到

$$e_1(f_1) + e_2(f_3) - k_1 e_{11}(f_5) - k_2 e_{22}(f_5) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} = 0,$$

这说明

$$\alpha_2^3(D'_3) = V(f_j, f, e_i(f_5), f_5) \neq D'_2,$$

这里

$$f: \quad -(p_{13}^1 + u_1 p_{11}^1 + u_3 p_{12}^1) - (p_{23}^3 + u_1 p_{12}^3 + u_3 p_{22}^3) - (1/\rho_s)(p_{11}^5 + p_{22}^5) + \Phi = 0,$$

其中

$$\Phi = f p_1^2 - p_1^1 p_1^1 - 2 p_2^1 p_1^3 + (g/\theta_s) p_2^4 - p_2^3 p_2^3 \cdot$$

现在令

$$D = V(e_{i_1}(f_j), e_{i_1}(f), e_{ii_1}(f_5), f_j, f, e_i(f_5), f_5) \subseteq J^3(R^3, R^5),$$

再求得 D 的各阶准本方程

$$D'_{-1} = V, \quad D'_0 = J^0(V,Z), \quad D'_1 = V(f_5), \quad D'_2 = V(f_j, f, e_i(f_5), f_5),$$

$$D'_3 = V(e_{i_1}(f_j), e_{i_1}(f), e_{ii_1}(f_5), f_j, f, e_i(f_5), f_5),$$

$$\vdots$$

$$D'_k = V(e_{i_1 i_2\cdots i_{k-2}}(f_j), e_{i_1 i_2\cdots i_{k-2}}(f), e_{ii_1 i_2\cdots i_{k-2}}(f_5), \cdots,$$
$$e_{i_1}(f_j), e_{i_1}(f), e_{ii_1}(f_5), f_j, f, e_i(f_5), f_5),$$

$$(j=1\sim4;\ i, i_1, i_2, \cdots, i_{k-2} = 1,2,3;\ k \geqslant 2)\cdot$$

可以证明对任意 k, 都有 $\partial_{k-1}^{k}(D_k')=D_{k-1}'$, 也就证明了由 D 出发所得的准本方程 $(D)'_*$ 是一个饱和集, 即有 $(D)'_*=((D)'_*)^{\#}=D_*$ 和 $D_k=D_k'$ 成立• 根据定义, 方程组 D 是 1_简单的•

2.3 分层

设 $\tau\in G_2^*(TJ^{k-1}(V,Z))$ $(V=R^3, Z=R^5)$, 典则投影为

$$p:\quad G_2^*(TJ^{k-1}(V,Z))\to J^{k-1}(V,Z),$$

则点 $p(\tau)\in J^{k-1}(V,Z)$ 的局部坐标是

$$p(\tau)=(x_1,x_2,x_3,u_1,\cdots,u_5,p_1^1,\cdots,p_3^5,p_{1^2}^1,\cdots,p_{j^\lambda}^i,\cdots p_{3^{k-1}}^5)\in J^{k-1}(V,Z)•$$

引理 2 对任何 $k\geqslant 2$, D 的 $(2,k-1)$ 阶典则分层是

$$W_{2,k-1}(V,Z)=W_{2,k-1}(D)\cup T_{2,k-1}(D)=S_{2,k-1}^0(D)\cup S_{2,k-1}^5(D)\cup T_{2,k-1}(D),$$

其中, 纤维空间

$$\rho_{2,k-1}^0:\quad E_{2,k-1}^0(D)\to S_{2,k-1}^0(D);\ \rho_{2,k-1}^5:\quad E_{2,k-1}^5(D)\to S_{2,k-1}^5(D),$$

其纤维的维数分别是 0 和 5, 且 $T_{2,k-1}(D)\neq\varnothing$• 特别地, D 的横截层 $S_{2,k-1}^t(D)=\varnothing$•

证明 在 $W_{2,k-1}(V,Z)\subseteq G_2^*(TJ^{k-1}(V,Z))$ 的开覆盖 $\{U_i\}$ $(i=1,2,3)$ 中, 根据方程组 D 的形式, 讨论 U_1, U_2 和 U_3 三种情形• 因 U_1 和 U_2 的情形相类似, 故只须讨论 U_1 和 U_3 的情形•

(A) 设 $\tau\in U_1$, τ 由 $J^{k-1}(V,Z)$ 在点 $p(\tau)$ 的如下 2 个切向量生成

$$\eta_2=(\alpha_2,1,0,\hat u_i(2),\hat p_{j^\lambda}^i(2)),$$

$$\eta_3=(\alpha_3,0,1,\hat u_i(3),\hat p_{j^\lambda}^i(3)),$$

其中

$$p(\tau)=(x_j,u_i,p_{j^\lambda}^i)\in J^{k-1}(V,Z)\qquad(i=1\sim 5;j=1,2,3;|\lambda|\leqslant k-1)•$$

根据 $W_{2,k-1}(V,Z)$ 的定义以及 $p(\tau)\in D_{k-1}\subset J^{k-1}(V,Z)$ 可得•

当 $k=2$ 时要求 $p(\tau)\in D_0$ 和 $(p(\tau),p_j^i)\in D_1$, 方程的边值条件必须满足

$$p_1^1+\hat u_3(2)-\alpha_2 p_1^3=0•$$

当 $k\geqslant 2$ 时, 根据以上的要求, 经计算可得关于 $p_{1^k}^i(i=1\sim 5)$ 的方程组如下:

$$\begin{cases}(k_1+k_2\alpha_2^2)p_{1^k}^1=\varphi_{1,k-2}^{(1)}(\tau),\\(k_1+k_2\alpha_2^2)p_{1^k}^2=\varphi_{2,k-2}^{(1)}(\tau),\\(k_1+k_2\alpha_2^2)p_{1^k}^3=\varphi_{3,k-2}^{(1)}(\tau),\\(k_3+k_4\alpha_2^2)p_{1^k}^4=\varphi_{4,k-2}^{(1)}(\tau),\\p_{1^k}^1-\alpha_2 p_{1^k}^3=\varphi_{5,k-2}^{(1)}(\tau),\\(\alpha_3-u_1+u_3\alpha_2)p_{1^k}^1-\alpha_2(\alpha_3-u_1+u_3\alpha_2)p_{1^k}^3-\\\qquad(1/\rho_s)(1+\alpha_2^2)p_{1^k}^5=\varphi_{k-2}^{(1)}(\tau),\end{cases}\tag{4}$$

其中 $\varphi_{i,k-2}^{(1)}$ 的计算公式见附录, $(\hat{\ })$ 表示的是一般拓扑意义下的情况•

方程组(4) 关于 $p_{1^k}^i(i=1\sim 5)$ 可解的充要条件是

$$\varphi_{1,k-2}^{(1)}(\tau)-\alpha_2\varphi_{3,k-2}^{(1)}(\tau)=(k_1+k_2\alpha_2^2)\varphi_{5,k-2}^{(1)}(\tau)•$$

这样, 可得分层的结果 $\tau\in U_1\cap S_{2,k-1}^0(D)$ 的充要条件为

$$\varphi_{1,k-2}^{(1)}(\tau)-\alpha_2\varphi_{3,k-2}^{(1)}(\tau)=(k_1+k_2\alpha_2^2)\varphi_{5,k-2}^{(1)}(\tau)•\tag{5}$$

(B) 设 $\tau\in U_3$, τ 由 $J^{k-1}(V,Z)$ 在点 $p(\tau)$ 的如下 2 个切向量生成

$$\mu_1=(1,0,\delta_1,\hat{u}_i(1),\hat{p}^i_{j\lambda}(1));\ \mu_2=(0,1,\delta_2,\hat{u}_i(2),\hat{p}^i_{j\lambda}(2)),$$

其中

$$p(\tau)=(x_j,u_i,p^i_{j\lambda})\in J^{k-1}(V,Z)\qquad(i=1\sim 5;j=1\sim 3;|\lambda|\leqslant k-1)\cdot$$

根据 $W_{2,k-1}(V,Z)$ 的定义以及 $p(\tau)\in D_{k-1}\subset J^{k-1}(V,Z)$ 可得•

当 $k=1$ 时要求 $p(\tau)\in D_0$, 而$(p(\tau),p^i_j)\in D_1$, 即方程的初始条件必须满足

$$\delta_1 p^1_3+\delta_2 p^3_3-\hat{u}_1(1)-\hat{u}_3(2)=0\cdot$$

当 $k\geqslant 2$ 时, 根据以上的要求, 经计算可得关于 $p^i_{3^k}(i=1\sim 5)$ 的方程组如下

$$\begin{cases}(k_1\delta_1^2+k_2\delta_2^2)p^1_{3^k}=\varphi^{(3)}_{1,k-2}(\tau),\ (k_1\delta_1^2+k_2\delta_2^2)p^2_{3^k}=\varphi^{(3)}_{2,k-2}(\tau),\\ (k_1\delta_1^2+k_2\delta_2^2)p^3_{3^k}=\varphi^{(3)}_{3,k-2}(\tau),\ (k_3\delta_1^2+k_4\delta_2^2)p^4_{3^k}=\varphi^{(3)}_{4,k-2}(\tau),\\ \delta_1 p^1_{3^k}+\delta_2 p^3_{3^k}=\varphi^{(3)}_{5,k-2}(\tau),\\ \delta_1(1-u_1\delta_1-u_3\delta_2)p^1_{3^k}+\delta_2(1-u_1\delta_1-u_3\delta_2)p^3_{3^k}-\\ \qquad(1/\rho_s)(\delta_1^2+\delta_2^2)p^5_{3^k}=\varphi^{(3)}_{k-2}(\tau),\end{cases}\tag{6}$$

其中 $\varphi^{(3)}_{i,k-2}(\tau)$ 的计算公式见附录, $(\hat{\ })$ 表示的是一般拓扑意义下的情况•

方程组(6) 关于 $p^i_{3^k}(i=1\sim 5)$ 可解的充要条件是

1) $\delta_1^2+\delta_2^2\neq 0$, 方程(6) 可解的充要条件是

$$\delta_1\varphi^{(3)}_{1,k-2}(\tau)+\delta_2\varphi^{(3)}_{3,k-2}(\tau)=(k_1\delta_1^2+k_2\delta_2^2)\varphi^{(3)}_{5,k-2}(\tau),$$

2) $\delta_1^2+\delta_2^2=0$, 方程(6) 可解的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{5}(\varphi^{(3)}_{i,k-2}(\tau))^2+(\varphi^{(3)}_{k-2}(\tau))^2=0,$$

其中 1) 表示 $\tau\in U_3\cap S^0_{2,k-1}(D)$, 2) 表示 $\tau\in U_3\cap S^5_{2,k-1}(D)\cdot$

这样, 可得分层的结果如下

$\tau\in U_3\cap S^0_{2,k-1}(D)$ 的充要条件为

$$\delta_1^2+\delta_2^2\neq 0,\ \delta_1\varphi^{(3)}_{1,k-2}(\tau)+\delta_2\varphi^{(3)}_{3,k-2}(\tau)=(k_1\delta_1^2+k_2\delta_2^2)\varphi^{(3)}_{5,k-2}(\tau)\cdot\tag{7}$$

$\tau\in U_3\cap S^5_{2,k-1}(D)$ 的充要条件为

$$\delta_1^2+\delta_2^2=0,\ \sum_{i=1}^{5}(\varphi^{(3)}_{i,k-2}(\tau))^2+(\varphi^{(3)}_{k-2}(\tau))^2=0\cdot\tag{8}$$

2.4 基本定理的证明

通过对下述两类初边值问题的拓扑性质讨论, 对基本定理进行证明•

1) 边值条件 $(\sigma_h,\gamma_h)\in I_\omega(\Delta_2,D)$ 如下定义

$$\sigma_h:\ \Delta_2\to R^3,\ \sigma_h(\zeta)=(x_j(\zeta))=(h(\zeta_2,\zeta_3),\zeta_2,\zeta_3),$$

$$\gamma_h:\ \Delta_2\to J^1(V,Z),\ \gamma_h(\zeta)=(x_j(\zeta),u_i(\zeta),p^i_j(\zeta))\qquad(j=1\sim 3;i=1\sim 5),$$

并满足

$$\alpha^1_{-1}\circ\gamma_h=\sigma_h,\ \gamma_h^*\omega=0,\ \forall\omega\in I_1(V,Z),\ \mathrm{Im}\,\gamma_h\subseteq D_1,$$

其中 $h: R^2\to R$, $h\in C^\omega$, 满足 $h(0,0)=0$, $\zeta=(\zeta_2,\zeta_3)\in\Delta_2$ 为重心坐标•

2) 初始条件 $(\sigma_g,\gamma_g)\in I_\omega(\Delta_2,D)$ 如下定义

$$\sigma_g:\ \Delta_2\to R^3,\ \sigma_g(\xi)=(x_j(\xi))=(\xi_1,\xi_2,g(\xi_1,\xi_2)),$$

$$\gamma_g:\quad \Delta_2 \to J^0(V, Z),\quad \gamma_g(\xi) = (x_j(\xi), u_i(\xi))\qquad (j = 1\sim 3;\ i = 1\sim 5),$$

其中 $g: R^2 \to R$, $g \in C^\omega$, 满足 $g(0, 0)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \Delta_2$ 为重心坐标•

根据引理 2, 对任何 $k \geqslant 2$, $S^t_{2, k-1}(\mathrm{D}) = \varnothing$, 并由 $S^0_{2, k-1}(\mathrm{D})$ 和 $S^5_{2, k-1}(\mathrm{D})$ 的末方程(5)、(7)、(8) 可知, D 不存在 $C^k(k \geqslant 2)$ 适定的初始条件或混合(边界) 条件, 因而其相应问题也不存在 $C^k(k \geqslant 2)$ 稳定解• 根据定义, D 是一个 $C^k(k \geqslant 2)$ 不稳定方程•

3　相关推论

根据前面的引理 2, 可得如下两个推论•

推论 1　在 $\Sigma_1: \{x = h(z, t)\} \subset R^3$ 上的边值问题

$$\begin{cases} \mathrm{D}, \\ u_i \mid_{\Sigma_1} = u_i^0,\ \partial u_i \mid_{\Sigma_1} = \partial u_i^0 \qquad (i = 1\sim 5), \end{cases}$$

存在 $C^k(k \geqslant 2)$ 形式解的充要条件为

$$\begin{cases} p_1^1 + u_3(2) - \alpha_2 p_1^3 = 0, \\ \varphi^{(1)}_{1, k-2}(\tau) - \alpha_2 \varphi^{(1)}_{3, k-2}(\tau) - (k_1 + k_2 \alpha_2^2)\varphi^{(1)}_{5, k-2}(\tau) = 0, \end{cases}$$

其中 $\alpha_j = \partial h / \partial \zeta_j (j = 2, 3)$, $\varphi^{(1)}_{i, k-2}$ 的计算见附录•

推论 2　在 $\Sigma_3: \{t = g(x, z)\} \subset R^3$ 上的初值问题

$$\begin{cases} \mathrm{D}, \\ u_i \mid_{\Sigma_3} = u_i^0 \qquad (i = 1\sim 5), \end{cases}$$

存在 $C^k(k \geqslant 2)$ 形式解的充要条件为

$$\begin{cases} \delta_1 p_3^1 + \delta_2 p_3^3 - u_1(1) - u_3(2) = 0, \\ \delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0, \\ \delta_1 \varphi^{(3)}_{1, k-2}(\tau) + \delta_2 \varphi^{(3)}_{3, k-2}(\tau) - (k_1 \delta_1^2 + k_2 \delta_2^2)\varphi^{(3)}_{5, k-2}(\tau) = 0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \delta_1 p_3^1 + \delta_2 p_3^3 - u_1(1) - u_3(2) = 0, \\ \delta_1^2 + \delta_2^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^{5} (\varphi^{(3)}_{i, k-2}(\tau))^2 + (\varphi^{(3)}_{k-2}(\tau))^2 = 0, \end{cases}$$

其中 $\delta_j = \partial g / \partial \xi_j (j = 1, 2)$, $\varphi^{(3)}_{i, k-2}(\tau)$ 的计算见附录•

4　小　结

二维非静力 Boussinesq 近似的旋转流体方程组是大气动力学中的一个应用广泛的模式• 本文应用分层理论所提供的方法, 证明了它是一个不稳定性的方程, 即它的任何初边值问题均是不适定的• 其根本原因是因为方程组中运动方程的粘性项系数 $(K_\mathrm{M}^\mathrm{H}$、$K_\mathrm{M}^\mathrm{V})$ 与连续方程中的不可压假设($\rho = \mathrm{const}$) 相互“匹配”而导致的结果•

附　录

$\varphi^{(1)}_{i, k-2}(\tau)$ 和 $\varphi^{(3)}_{i, k-2}(\tau)$ 的计算公式

① 当 $k = 2$ 时, $\varphi^{(1)}_{i, 0}(\tau)$ 的表达式为

$$\varphi^{(1)}_{1, 0}(\tau) = k_2(\alpha_2 \hat{p}_1^1(2) - \hat{p}_2^1(2)) - \Phi_1,\quad \varphi^{(1)}_{2, 0}(\tau) = k_2(\alpha_2 \hat{p}_1^2(2) - \hat{p}_2^2(2)) - \Phi_2,$$

$\varphi^{(1)}_{3,0}(\tau) = k_2(\alpha_2\hat p^3_1(2) - \hat p^3_2(2)) - \Phi_3,\ \varphi^{(1)}_{4,0}(\tau) = k_4(\alpha_2\hat p^4_1(2) - \hat p^4_2(2)) - \Phi_4,\ \varphi^{(1)}_{5,0}(\tau) = -\hat p^3_1(2),$

$\varphi^{(1)}_0(\tau) = \hat p^1_1(3) + u_3\hat p^1_1(2) - (\alpha_2/\rho_s)\hat p^5_1(2) + (1/\rho_s)\hat p^5_2(2) + \hat p^3_2(3) -$

$\alpha_3\hat p^3_1(2) + u_3\hat p^3_1(2) - \alpha_2 u_3\hat p^3_1(2) + u_3\hat p^3_2(2) - \Phi.$

② 当 $k \geqslant 3$ 时，$\varphi^{(1)}_{i,k-2}$ 的表达式为

$$\varphi^{(1)}_{1,k-2}(\tau) = k_2(\alpha_2\hat p^1_{1^{k-1}}(2) - \hat p^1_{1^{k-2}2}(2)) - \frac{\partial^{k-2}\Phi_1}{\partial x_1^{k-2}},$$

$$\varphi^{(1)}_{2,k-2}(\tau) = k_2(\alpha_2\hat p^2_{1^{k-1}}(2) - \hat p^2_{1^{k-2}2}(2)) - \frac{\partial^{k-2}\Phi_2}{\partial x_1^{k-2}},$$

$$\varphi^{(1)}_{3,k-2}(\tau) = k_2(\alpha_2\hat p^3_{1^{k-1}}(2) - \hat p^3_{1^{k-2}2}(2)) - \frac{\partial^{k-2}\Phi_3}{\partial x_1^{k-2}},$$

$$\varphi^{(1)}_{4,k-2}(\tau) = k_4(\alpha_2\hat p^4_{1^{k-1}}(2) - \hat p^4_{1^{k-2}2}(2)) - \frac{\partial^{k-2}\Phi_4}{\partial x_1^{k-2}},\quad \varphi^{(1)}_{5,k-2}(\tau) = -\hat p^3_{1^{k-1}}(2),$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)}_{k-2}(\tau) = {} & \sum_{i=1}^{k-2} C^i_{k-2}(\hat p^1_{1^i}\hat p^1_{1^{k-i}} + \hat p^3_{1^i}\hat p^1_{1^{k-1-i}2} + \hat p^1_{1^i}\hat p^3_{1^{k-1-i}2} + \hat p^3_{1^i}\hat p^3_{1^{k-2-i}2^2}) + \hat p^1_{1^{k-1}}(3) + u_3\hat p^1_{1^{k-1}}(2) + \\ & \hat p^3_{1^{k-2}2}(3) - \alpha_3\hat p^3_{1^{k-1}}(2) + u_1\hat p^3_{1^{k-1}}(2) + u_3(\hat p^3_{1^{k-2}2}(2) - \alpha_2\hat p^3_{1^{k-1}}(2)) + \\ & \frac{1}{\rho_s}(\hat p^5_{1^{k-2}2}(2) - \alpha_2\hat p^5_{1^{k-1}}(2)) - \frac{\partial^{k-2}\Phi}{\partial x_1^{k-2}}.\end{aligned}$$

③ 当 $k = 2$ 时，$\varphi^{(3)}_{i,0}$ 的表达式为

$\varphi^{(3)}_{1,0}(\tau) = k_1(\delta_1\hat p^1_3(1) - \hat p^1_1(1)) + k_2(\delta_2\hat p^1_3(2) - \hat p^1_2(2)) - \Phi_1,$

$\varphi^{(3)}_{2,0}(\tau) = k_1(\delta_1\hat p^2_3(1) - \hat p^2_1(1)) + k_2(\delta_2\hat p^2_3(2) - \hat p^2_2(2)) - \Phi_2,$

$\varphi^{(3)}_{3,0}(\tau) = k_1(\delta_1\hat p^3_3(1) - \hat p^3_1(1)) + k_2(\delta_2\hat p^3_3(2) - \hat p^3_2(2)) - \Phi_3,$

$\varphi^{(3)}_{4,0}(\tau) = k_3(\delta_1\hat p^4_3(1) - \hat p^4_1(1)) + k_4(\delta_2\hat p^4_3(2) - \hat p^4_2(2)) - \Phi_4,$

$\varphi^{(3)}_{5,0}(\tau) = \hat p^1_3(1) + \hat p^3_3(2),$

$$\begin{aligned}\varphi^{(3)}_0(\tau) = {} & \hat p^1_3(1) + u_1(\hat p^1_1(1) - \delta_1\hat p^1_3(1)) + u_3(\hat p^1_2(1) - \delta_1\hat p^1_3(2)) + \hat p^3_3(2) + \\ & u_1(\hat p^3_2(1) - \delta_1\hat p^3_3(2)) + u_3(\hat p^3_2(2) - \delta_2\hat p^3_3(2)) + (1/\rho_s)(\hat p^5_1(1) - \delta_1\hat p^5_3(1)) + \\ & (1/\rho_s)(\hat p^5_2(2) - \delta_2\hat p^5_3(2)) - \Phi.\end{aligned}$$

④ 当 $k \geqslant 3$ 时，$\varphi^{(3)}_{i,k-2}$ 的表达式为

$$\varphi^{(3)}_{1,k-2}(\tau) = k_1(\delta_1\hat p^1_{3^{k-1}}(1) - \hat p^1_{13^{k-2}}(1)) + k_2(\delta_2\hat p^1_{3^{k-1}}(2) - \hat p^1_{23^{k-2}}(2)) - \frac{\partial^{k-2}\Phi_1}{\partial x_3^{k-2}},$$

$$\varphi^{(3)}_{2,k-2}(\tau) = k_1(\delta_1\hat p^2_{3^{k-1}}(1) - \hat p^2_{13^{k-2}}(1)) + k_2(\delta_2\hat p^2_{3^{k-1}}(2) - \hat p^2_{23^{k-2}}(2)) - \frac{\partial^{k-2}\Phi_2}{\partial x_3^{k-2}},$$

$$\varphi^{(3)}_{3,k-2}(\tau) = k_1(\delta_1\hat p^3_{3^{k-1}}(1) - \hat p^3_{13^{k-2}}(1)) + k_2(\delta_2\hat p^3_{3^{k-1}}(2) - \hat p^3_{23^{k-2}}(2)) - \frac{\partial^{k-2}\Phi_3}{\partial x_3^{k-2}},$$

$$\varphi^{(3)}_{4,k-2}(\tau) = k_3(\delta_1\hat p^4_{3^{k-1}}(1) - \hat p^4_{13^{k-2}}(1)) + k_4(\delta_2\hat p^4_{3^{k-1}}(2) - \hat p^4_{23^{k-2}}(2)) - \frac{\partial^{k-2}\Phi_4}{\partial x_3^{k-2}},$$

$$\varphi^{(3)}_{5,k-2}(\tau) = \hat p^1_{3^{k-1}}(1) + \hat p^3_{3^{k-1}}(2),$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(3)}_{k-2}(\tau) = {} & \sum_{i=1}^{k-2} C^i_{k-2}(\hat p^1_{3^i}\hat p^1_{1^2 3^{k-2-i}} + \hat p^3_{3^i}\hat p^1_{123^{k-2-i}} + \hat p^1_{3^i}\hat p^3_{123^{k-2-i}} + \hat p^3_{3^i}\hat p^3_{2^2 3^{k-2-i}}) + \hat p^1_{3^{k-1}}(1) + \hat p^3_{3^{k-1}}(2) + \\ & u_1(\hat p^1_{13^{k-2}}(1) - \delta_1\hat p^1_{3^{k-1}}(1)) + u_3(\hat p^1_{23^{k-2}}(1) - \delta_1\hat p^1_{3^{k-1}}(2)) + u_1(\hat p^3_{23^{k-2}}(1) - \delta_1\hat p^3_{3^{k-1}}(2)) + \\ & u_3(\hat p^3_{23^{k-2}}(2) - \delta_2\hat p^3_{3^{k-1}}(2)) + (1/\rho_s)(\hat p^5_{13^{k-2}}(1) - \delta_1\hat p^5_{3^{k-1}}(1)) + \\ & (1/\rho_s)(\hat p^5_{23^{k-2}}(2) - \delta_2\hat p^5_{3^{k-1}}(2)) - \frac{\partial^{k-2}\Phi}{\partial x_3^{k-2}}.\end{aligned}$$

[参 考 文 献]

[1] Hoskins B J, Bentherton F P. Atmospheric frontogenesis models: mathematical formulation and solu-

tion[J]. J Atmos Sci, 1972, **29**(1): 11—37.
[2] 季仲贞,杨宏伟,王斌.两类差分格式在锋生数值模拟中的应用比较[J].计算物理, 2003, **20**(4): 311—314.
[3] Simpson J E, Linden P F. Frontogenesis in a fluid with horizontal density gradients[J]. J Fluid Mech, 1989, **202**(1): 1—16.
[4] 肖庆农,伍荣生,张颖.地形的动力作用与冷锋锋生研究[J].大气科学, 1997, **21**(3): 283—296.
[5] 王兴宝,伍荣生.地面锋附近重力流的产生及其锋生作用[J].气象科学, 1998, **18**(4): 305—315.
[6] 施惟慧,陈达段,何幼桦.分层理论与非线性偏微分方程基础[M].上海:上海大学出版社, 2001, 10—52.
[7] CHEN Da_duan, HE You_hua. Stabilities of Boussinesq approximate equations for non_static rotating fluids[J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences, 2002, **26**(3): 293—298.
[8] 陈达段,何幼桦.非静力旋转流体方程初值问题的适定性[J].应用数学和力学, 2004, **25**(3): 262—270.
[9] SHEN Chun, SUN Mei_na. Initial and boundary value problems for two_dimensional non_hydrostatic Boussinesq equations[J]. Journal of Shanghai University, 2005, **9**(2): 114—119.

Stability of System of Two_Dimensional Non_Hydrostatic Revolving Fluids

SHEN Chun[1], WANG Yue_peng[1], SHI Wei_hui[2]
(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P.R.China;
2. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, P.R.China)

Abstract: Applying the theory of stratification, it was proved that the system of the two_dimensional non_hydrostatic revolving fluids is unstable in the two_order continuous function class. The construe-tion of solution space was given and the solution approach was offered. The sufficient and necessary conditions of the existence of formal solutions were expressed for some typical initial and boundary value problems and the calculating formulae to formal solutions were presented in detail.

Key words: Boussinesq equation; stability; initial or boundary value problem; stratification