

文章编号: 1000-0887(2006)03-0337-05

弹塑性杆在刚性块轴向撞击下的动力屈曲^{*}

韩志军, 程国强, 马宏伟, 张善元

(太原理工大学 应用力学研究所, 太原 030024)

(王银邦推荐)

摘要: 基于能量原理, 对弹塑性杆在刚性块轴向撞击下的动力屈曲问题进行了讨论。用特征线法分析了刚性块轴向撞击弹塑性直杆时应力波传播的过程。考虑了弹塑性应力波传播对屈曲的影响, 建立了该问题横向扰动方程。用幂级数解法, 理论上给出了该问题的级数解。分析解的性质, 得到了发生屈曲时的临界条件。通过理论分析和数值计算, 得到了临界速度与冲击质量、临界长度及线性强化模量间的关系。

关键词: 动力屈曲; 应力波; 临界条件; 幂级数

中图分类号: O311.2 **文献标识码:** A

引 言

直杆作为工程结构中最常用的基本单元, 其屈曲问题的研究在结构稳定分析中占重要地位。上世纪 60 年代后期开始, 直杆动力屈曲问题引起了许多研究者的关注。早期对这一问题的研究大都假设直杆具有某种形式的初缺陷^[1], 借用放大函数法寻找最优发展模态。这类方法能给出屈曲模态, 但临界载荷的确定带有一定的人为性, 且掩盖了分叉的物理本质, 为了了解在冲击载荷下动态屈曲的实质, 上世纪 80 年代以来, 国内外学者借助应力波的传播理论来讨论发生冲击屈曲的临界条件^[2]。文献[3]和文献[4]的实验研究揭示了屈曲过程中的应力波效应。文献[5]~文献[7]在讨论直杆中应力波传播引起的分叉问题时, 考虑了应力波的传播和反射对屈曲的影响。文献[8]基于能量守恒定律讨论了弹性杆的动力屈曲问题, 也考虑了应力波效应。对于刚性块轴向撞击直杆这一有广泛应用背景的动力屈曲问题, 由于轴向应力波形式复杂, 已有的研究不多。对这一问题文献[9]进行了有限差分计算, 引进了动态放大因子 DLF 这一概念, 并给出了一个近似的弹性动力屈曲准则; 文献[10]在理论上用离散模型的方法建立了弹塑性直杆在刚性块撞击下的动力屈曲问题的控制方程, 借助于有限差分法对其进行了计算, 得到了一些重要的结论, 但其工作仍基于初始几何缺陷的假设。

本文在文献[11]研究的基础上, 基于能量关系, 考虑了弹塑性应力波的传播过程, 建立了杆的扰动方程, 借助幂级数解法, 给出了这问题的级数解。分析解的性质, 得到了发生屈曲时的临界条件。通过理论分析和数值计算, 得到了临界速度与冲击质量及临界长度间的关系及

* 收稿日期: 2004_04_23; 修订日期: 2005_09_12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472076)

作者简介: 韩志军(1964—), 男, 山西人, 副教授, 博士(联系人, Tel: + 86_351_6550743; E-mail: hanzj12@126.com)。

相关结论

1 应力波在直杆中的传播

图1给出了一端固定一端夹支,长为 L 、材料为线性强化的弹塑性直杆,经受一个以速度 v_0 运动的、质量为 M 的刚性体撞击,弹塑性应力波的传播过程。材料的本构关系如图2所示,其中 E 为弹性模量, E_t 为塑性强化模量, σ_s 为材料的屈服极限。由接触条件,在 OB 段内任意点 D 的边界条件为

$$\sigma_D = Mv_0/A \tag{1}$$

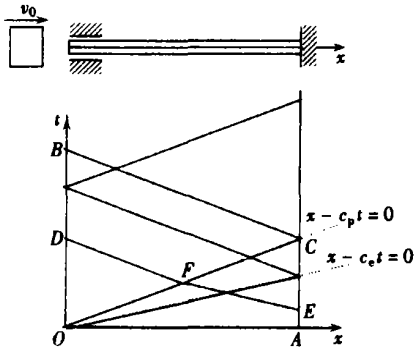


图1 应力波在杆中传播

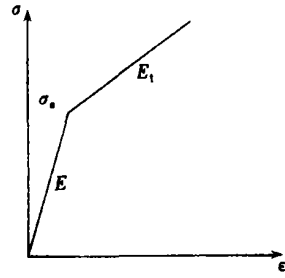


图2 材料的性质

沿左行特征线 DFE 的相容条件给出

$$\sigma_D + \rho c_p v_D = \sigma_E + \rho c_e v_E = 0 \tag{2}$$

利用 $v(x=0, t=0) = v_0$ 处的初始条件求解(1)式、(2)式得

$$\sigma_D = -\rho c_p v_0 e^{-\rho A c_p t/M} \quad (0 \leq t \leq L/c_e + L/c_p), \tag{3}$$

其中 ρ 为密度; $c_p = \sqrt{E/\rho}$ 为塑性应力波的波速; A 为横截面面积

因此应力波在杆中的传播过程可表示为

$$\sigma(x, t) = \begin{cases} -\rho c_p v_0 e^{-\rho A c_p t/M + \rho A x/M}, & 0 \leq x \leq c_p t, \\ -\sigma_s, & c_p t < x \leq c_e t, \\ 0, & c_e t < x \leq L, \end{cases} \tag{4}$$

其中 $c_e = \sqrt{E/\rho}$ 为弹性应力波的波速。我们仅在 $0 \leq t \leq L/c_e$ 的范围内讨论杆的动力屈曲问题。

2 屈曲模态和临界条件

当杆受到刚性块轴向撞击时,设弹性应力波波阵面在到达距夹支端为 l 截面、塑性应力波波阵面在到达距夹支端为 l_1 时(应力波未发生反射)杆件的受力段发生突然屈曲,在小变形情况下,据能量原理,则这段杆件的横向微小的摄动 $w(x, t)$ 应满足

$$\rho c_p v_0 A e^{-\rho A c_p t/M} \int_0^{l_1} e^{\rho A x/M} w' u' dx + \sigma_s A \int_{l_1}^l w' u' dx = E I \int_0^l w'' u'' dx + \rho A \int_0^l w \dot{w} dx, \tag{5}$$

式中 I 为截面惯性矩; w 为横向位移, E_t :弹性时为 E ,塑性时为 E_t 。选取 $l_0 = M/\rho A$,得下列无量纲参数

$$w = w/l_0, \quad l = l/l_0, \quad l_1 = c_p l / c_e, \quad x = x/l_0, \quad t = ct/l_0, \quad L = L/l_0, \quad (6)$$

则方程(5)式的无量纲形式为

$$\begin{aligned} \frac{c_p v_0}{c_e^2} e^{-c_p t / c_e} \int_0^{l_1} \dot{e}^x w' \dot{w}' dx + \frac{\sigma_s}{E} \int_{l_1}^l w' \dot{w}' dx = \\ \frac{c_p^2 i^2}{c_e^2 l_0^2} \int_0^{l_1} w'' \dot{w}'' dx + \frac{i^2}{l_0^2} \int_{l_1}^l w'' \dot{w}'' dx + \int_0^l w \dot{w} dx, \end{aligned} \quad (7)$$

式中: $i^2 = I/A$ 。取屈曲模态如下

$$w(x, t) = \sum_n T_n(t) \left[1 - \cos \frac{2n\pi}{l} x \right], \quad (8)$$

(8)式满足边界条件和初始条件

$$w(0, t) = w(l, t) = 0, \quad w(x, 0) = 0 \quad (9)$$

将(8)式代入(7)式,整理得

$$\dot{T}_n + (\alpha - \beta e^{-c_p t / c_e} - \gamma) T_n = 0, \quad (10)$$

式中

$$\alpha = \phi i^2 (2n\pi)^4 / (3l_0^2 l^4), \quad \beta = c_p v_0 e^{-c_p t / c_e} \theta (2n\pi)^2 / (3c_e^2 l^3),$$

$$\gamma = \sigma_s (2n\pi)^2 \varphi / (3l^3 E),$$

$$\theta = e^{l_1} - 1 - \frac{l^2}{l^2 + (4n\pi)^2} \left[e^{l_1} \cos \frac{4n\pi}{l} l_1 - 1 + \frac{4n\pi}{l} e^{l_1} \sin \frac{4n\pi}{l} l_1 \right],$$

$$\varphi = l - l_1 + \frac{l}{4n\pi} \sin \frac{4n\pi}{l} l_1, \quad \phi = \left[\frac{c_p}{c_e} - 1 \right] \left[\frac{l_1}{l} + \frac{1}{4n\pi} \sin \frac{4n\pi}{l} l_1 \right] + 1$$

对二阶非线性方程(10)式采用幂级数解法, 设解为

$$T_n = \sum_{m=1}^n \alpha_m t^m, \quad (11)$$

将(11)式代入(10)式, 结合(9)式可得

$$T_n = (t + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \alpha_5 t^5 + \alpha_6 t^6 + \alpha_7 t^7 + \dots) \alpha_1, \quad (12)$$

式中

$$\alpha_3 = -(\alpha - \beta - \gamma) / 6, \quad \alpha_4 = -a\beta / 12, \quad \alpha_5 = a^2\beta / 40 + (\alpha - \beta - \gamma)^2 / 120,$$

$$\alpha_6 = [a\beta(\alpha - \beta - \gamma) / 4 - a^3\beta / 3!] / 30,$$

$$\alpha_7 = [a^4\beta / 4! - 13a^2\beta(\alpha - \beta - \gamma) / 120 + a^2\beta^2 / 12 - (\alpha - \beta - \gamma)^3 / 120] / 42,$$

$$a = c_p / c_e,$$

α_1 由非零微小摄动的初始条件确定^[3]。

因此, 屈曲模态可表示为

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \cos \frac{2n\pi}{l} x \right] \sum_{m=1}^n \alpha_m t^m. \quad (13)$$

将方程(10)式变换为一个二元一次方程组, 据解的稳定性, 由此可得屈曲的临界条件为

$$\alpha - \beta e^{-c_p t / c_e} - \gamma = 0, \quad (14)$$

$$\text{即} \quad v_{cr} = \left[\frac{(2n\pi)^2 i^2}{ll_0^2} \phi - \frac{\sigma_s}{E} \varphi \right] \frac{c_e^2}{c_p \theta} e^{c_p t / c_e}. \quad (15)$$

3 计算分析和结论

在讨论屈曲问题时, 临界参量及相互间的关系是非常重要的。下面就一矩形截面杆为例

进行计算,材料参数为:横截面尺寸为 $5.85 \text{ mm} \times 10.1 \text{ mm}$, $\rho = 7.8 \times 10^{-3} \text{ g/mm}^3$, $c_e = 5.06 \times 10^6 \text{ mm/s}$, $c_p = 2.58 \times 10^6 \text{ mm/s}$, $\sigma_s = 200 \text{ MPa}$ 。

据理论分析和数值计算,可得如下结论:

1) 图 3 为应力波未反射时,波前距夹支端分别为 200 mm , 250 mm 的情况下,临界速度与冲击质量间的关系曲线。图示表明:当模态 n 与应力波传播距离 l 一定时,冲击质量越小,临界速度越高;即临界速度随冲击质量的增加而降低。从曲线变化趋势上看,可分为敏感区和非敏感区,在敏感区,冲击质量 M 的微小变化将引起冲击速度 v_{cr} 的巨大变化;但当冲击质量达到某一值时,临界速度将缓慢随冲击质量的增加而减小,称其为非敏感区。当模态 n 和冲击质量一定时,临界速度随应力波传播距离的增大而减小。

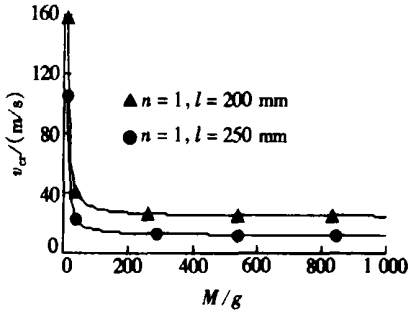


图 3 v_{cr} - M 关系曲线

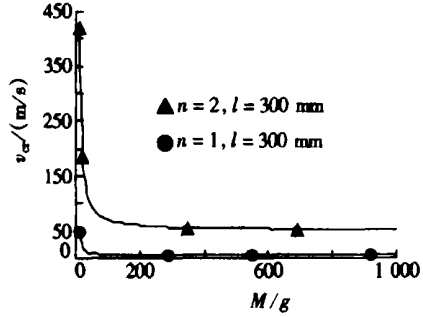


图 4 v_{cr} - M 的关系曲线

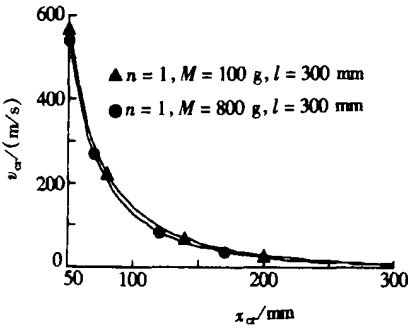


图 5 v_{cr} - x_{cr} 关系曲线

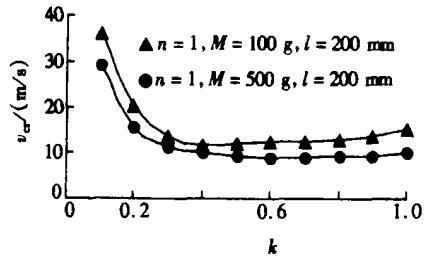


图 6 v_{cr} - k 关系曲线

2) 图 4 为应力波未反射时,不同模态、 l 相同情况下, v_{cr} 与 M 间的关系曲线。图示表明在同样冲击质量和临界长度下,高阶模态下的临界速度明显高于低阶模态下的临界速度。亦即在高速冲击下,易出现高阶模态;反之亦然。

3) 图 5 为应力波未反射时,模态、冲击质量一定情况下, v_{cr} 与 x_{cr} 间的关系曲线。图示表明当冲击质量一定时,屈曲的临界速度随临界长度的增长而降低,且冲击质量越大临界速度降低的幅值越大。

4) 图 6 为应力波未反射时,模态以及 l 相同、冲击质量不同情况, v_{cr} 与线性强化模量同弹性模量的比值 k 的关系曲线。图示表明屈曲的临界速度随 k 的增大而减小,即线性强化模量越大,临界速度越小。

5) (13) 式为应力纵波未反射时的屈曲模态; (15) 式为应力纵波未反射时的临界条件,值得注意的是这个临界条件是建立在线性强化及小变形假设基础上的,更复杂情况下的及应力波发生反射时的临界条件和屈曲模态有待今后进一步探讨。

[参 考 文 献]

- [1] Lindberg H E. Impact buckling of a thin bar[J]. Journal of Applied Mechanics, 1965, **32**(2): 315—322.
- [2] 朱兆祥. 应力波引起的弹性结构屈曲准则[A]. 见: 余同希, 王大钧 编. 塑性力学和地球动力学文集[C]. 北京: 北京大学出版社, 1990, 56—70.
- [3] 魏勇, 朱兆祥, 李永池. 轴向冲击下载荷作用下直杆弹性动态屈曲研究[J]. 实验力学, 1988, **3**(3): 258—263.
- [4] 汤立群, 朱兆祥. 弹性直杆动态屈曲和后屈曲的实验研究[J]. 爆炸与冲击, 1998, **18**(2): 97—102.
- [5] 马宏伟, 韩强, 张善元, 等. 受轴向冲击有限长弹性直杆中应用波引起的分叉问题[J]. 爆炸与冲击, 1995, **15**(4): 300—305.
- [6] 韩强, 武际可, 张善元, 等. 直杆中应力波传播引起分叉问题[J]. 力学学报, 1998, **30**(4): 414—422.
- [7] 韩强, 胡海岩, 杨桂通. 轴向弹塑性应力波作用下直杆中的分叉问题[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(6): 569—578.
- [8] 王安稳. 弹性压应力波下直杆动力失稳的机理和判据[J]. 力学学报, 2001, **33**(6): 812—820.
- [9] Ari_Cur J, Weller T, Singer J. Experimental and theoretical studies of columns under axial impact[J]. Int J Solids Structures, 1982, **18**(7): 619—641.
- [10] Karagiozova D, Jones N. Dynamic elastic-plastic buckling phenomena in a rod due to axial impact [J]. Int J Impact Engng, 1996, **18**(7/8): 919—947.
- [11] HAN Zhi_jun, WANG Jing_chao, CHENG Guo_qiang, et al. The dynamic buckling of elastic bar impacted by a rigid body[A]. In: CHIEN Wei_zang Ed. Proc of Icnm_IV[C]. Shanghai: Shanghai University Press, 2002: 576—579.

Dynamic Buckling of Elastic-Plastic Column Impacted by a Rigid Body

HAN Zhi_jun, CHENG Guo_qiang, MA Hong_wei, ZHANG Shan_yuan

(Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology,

Taiyuan 030024, P. R. China)

Abstract: The dynamic buckling of an elastic-plastic column subjected to an axial impact by a rigid body is discussed by using the energy law. The traveling process of elastic-plastic waves under impact action was analyzed by characteristics method. The equation of lateral disturbance used to analyze the problem is developed by taking into account the effect of elastic-plastic stress wave. The power series solution of this problem has been reached in theory with the power series approach. The buckling criterion of this problem is proposed by analyzing the characteristics of the solution. The relationship among critical velocity and impact mass, critical buckling length, hardening modulus is given by using theoretical analysis and numerical computation.

Key words: dynamic buckling; stress wave; critical criterion; power series