

文章编号: 1000-0887(2006)03-0372-07

弱粘性流体中垂直激励表面波的阻尼效应*

菅永军¹, 鄂学全², 张杰^{1,3}

(1. 国家海洋局 第一海洋研究所, 山东 青岛 266061;

2. 中国科学院 力学研究所, 北京 100080;

3. 海洋环境科学与数值模拟国家海洋局重点实验室, 山东 青岛 266061)

(戴世强推荐)

摘要: 在竖直振动的圆柱形容器中, 将 Navier-Stokes 方程线性化, 利用两时间尺度奇异摄动展开法研究了弱粘性流体的单一自由面驻波运动。整个流场被分为外部势流区和内部边界层区两部分, 对两部分区域分别求解, 得到包含阻尼项和外驱动影响的线性振幅方程。利用稳定性分析, 得到形成稳定表面波的条件, 给出了临界曲线。此外, 还获得了阻尼系数的解析表达式。最后, 将线性阻尼加到理想流体条件下所得到的色散关系中进行修正, 理论结果证明修正后的驱动频率更加接近实验的结果。通过计算发现, 当驱动的频率较低时, 流体的粘性对表面波模式选择有重要影响, 而表面张力的影响不明显; 但当驱动频率较高时, 流体的表面张力起主要作用, 而流体的粘性影响甚小。

关键词: 垂直强迫振动; 粘性阻尼; 弱粘性流体

中图分类号: O353.2 **文献标识码:** A

引 言

鄂学全等^[1-3]在竖直振动的圆柱形容器中进行了表面波流谱流动显示和实验研究, 获得了非常精美的表面波流谱实验照片。最近, 针对文献[1]~文献[3]的实验结果, 菅永军等^[4-7]在理想流体中对圆柱容器中的非线性 Faraday 波进行了理论分析。他们利用两时间尺度的奇异摄动展开法, 获得了有表面张力和无表面张力时的非线性表面波振幅方程和二阶自由面的解析表达式。由于在理论分析中忽略了粘性耗散, 使得外垂直驱动频率与实验驱动频率的差别较大。Hill^[8]在矩形容器中研究了两层弱粘性流体的 Faraday 界面波问题, 给出了阻尼系数的解析表达式。

本文考虑弱粘性对表面波模式选择的影响, 目的是利用文献[8]的思想确定竖直振动圆柱形容器中阻尼系数的解析表达式, 而不是利用先前的经验方法确定。将流场分为外部势流区和内部的边界层流动, 利用两时间尺度摄动展开分别在这两个区域内求解, 应用高阶解的相容性条件来确定阻尼系数。利用粘性阻尼对文献[6]获得的色散关系进行修正, 使得对出现的同一表面波模式来说, 理论驱动频率更进一步接近实验测量驱动频率。

* 收稿日期: 2004_06_09; 修订日期: 2005_10_16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19772063; 19772068)

作者简介: 菅永军(1974—), 男, 内蒙古巴彦淖尔市人, 博士(联系人, Tel: + 86_532_87105680;

Fax: + 86_532_88897094; E-mail: jianyongjun@yahoo.com.cn)。

1 粘性流体中控制方程和边界条件的描述

考虑文献[4]图1所示的竖直振动圆柱形容器中在弱粘性流体假设下的竖直激励表面波问题,坐标系的选取和文献[4]中的相同。假设流体是不可压缩的,则有

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

这里 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, \theta, z, t)$ 是速度场,且满足 Navier-Stokes 方程

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \nabla \Pi + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \tag{2}$$

其中 $\Pi(r, \theta, z, t) = p(r, \theta, z, t) - p_0 + \rho(g - \ddot{z}_0)z$, ν 是运动学粘性系数,其它参数和文献[4]中的相同。在自由面 $z = \eta(r, \theta, t)$ 上,若不计表面张力的影响,运动学边界条件为

$$w(r, \theta, z, t) |_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \eta, \tag{3}$$

垂直于自由面 $z = \eta(r, \theta, t)$ 的法向和切向动力学边界条件分别是

$$\Pi(r, \theta, z, t) |_{z=\eta} - \rho g(g - \ddot{z}_0)\eta - 2\rho \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

$$\rho \nu (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}) = \rho \nu (1/r \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}) = 0, \tag{5}$$

其中 u 和 v 分别为 r 和 θ 方向的速度分量。在容器的侧壁和底部,满足下面的无滑移条件

$$\mathbf{v}(r, \theta, z, t) = \mathbf{0}. \tag{6}$$

在线性、理想流体、无旋运动的情况下,由(2)有 $\Pi(r, \theta, z, t) = -\partial \phi / \partial t$, 其中 $\phi(r, \theta, z, t)$ 是无粘速度势函数。对于线性粘性问题的,将流场分为势流速度和边界层速度(U 为边界层速度)

$$\mathbf{v} = \nabla \phi + \mathbf{U}, \tag{7}$$

将 $\Pi(r, \theta, z, t)$ 和(7)代入(2),忽略非线性项,可得边界层速度满足的扩散方程

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \mathbf{U}, \tag{8}$$

代(7)到(1),边界层速度满足零散度条件

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \tag{9}$$

将(7)代入(1)及(3)~(6),忽略所有的非线性项影响,控制方程和边界条件为

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad -h \leq z \leq \eta(r, \theta, t), \quad 0 < r < R, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = W, \quad z = \eta, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g(1 + 4A \omega_0^2 / g \cos 2\omega_0 t) \eta + 2\nu (\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial W}{\partial z}) = 0, \quad z = \eta, \tag{12}$$

$$\rho \nu (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}) = \rho \nu (1/r \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}) = 0, \quad z = \eta, \tag{13}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad z = -h \text{ 和 } r = R, \tag{14}$$

这里 ∇^2 为柱坐标系下的三维 Laplace 算子, W 为边界层速度 U 在 z 方向的速度分量。

2 弱粘性流体方程的无量纲化及曲线坐标的建立

以容器半径 R 为长度尺度,将相关的独立变量和未知函数进行无量纲化,有

$$\begin{cases} z^* = z/R, \quad r^* = r/R, \quad \eta^* = \eta/R, \\ t^* = t/\sqrt{R/g}, \quad \phi^* = \phi/(R\sqrt{gR}), \quad A^* = A/R, \\ \omega_0^* = \omega_0/\sqrt{g/R}, \quad \varepsilon^* = 4A\omega_0^2/g, \\ v^* = \nu/(\varepsilon^{*2}R\sqrt{gR}), \quad U^* = U/\sqrt{gR}, \end{cases} \tag{15}$$

上式中星号为无量纲变量,在下面的推导过程中将其忽略。参数 ε^* 表示外竖直驱动加速度与重力加速度的比值,假设它是一个小量。为了数学上的方便,在(15)中假设了粘性系数具有 ε^2 的量级,即为弱粘性。将(15)代到(8)~(14)中,得无量纲控制方程和边界条件

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad -h/R \leq z \leq \eta(r, \theta, t), \quad 0 < r < 1, \quad (16)$$

$$\partial \eta / \partial t - \partial \phi / \partial z = W, \quad z = \eta, \quad (17)$$

$$\begin{cases} \varepsilon^2 (2\partial^2 \phi / \partial r \partial z + \partial W / \partial r) + \varepsilon^2 \partial U / \partial z = 0, \\ \varepsilon^2 (2/r \cdot \partial^2 \phi / \partial \theta \partial z + 1/r \cdot \partial W / \partial \theta) + \varepsilon^2 \partial V / \partial z = 0, \end{cases} \quad z = \eta, \quad (18)$$

$$\partial \phi / \partial t + (1 + \varepsilon \cos 2\omega_0 t) \eta + 2\varepsilon^2 (\partial^2 \phi / \partial z^2 + \partial W / \partial z) = 0, \quad z = \eta, \quad (19)$$

$$\nabla \phi + \mathbf{U} = 0, \quad z = -h/R \text{ 和 } r = 1, \quad (20)$$

此外, 边界层方程变为

$$\partial \mathbf{U} / \partial t = \varepsilon^2 \nu \nabla^2 \mathbf{U}, \quad (21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (22)$$

其中 U 和 V 分别是边界层速度在 r 和 θ 方向的分量。

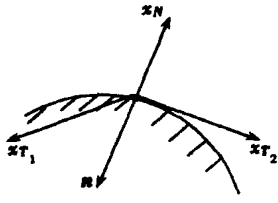


图1 边界层曲线坐标

下面建立边界层坐标系。因为粘性系数的量级为 $O(\varepsilon^2)$, 振动边界层的厚度具有量级 $O\left\{(2\nu/\Omega)^{1/2}\right\}$, 故边界层厚度的量级为 $O(\varepsilon)$ 。图1建立了边界层曲线坐标系, 其中 x_N 为从壁面指向流体的法方向, 即与外法向 \mathbf{n} 相反, x_{T1} 和 x_{T2} 确定了垂直于法方向的切平面。因此 x_N, x_{T1} 、和 x_{T2} 组成了一个局部边界层坐标系。引入一个新的边界层变量 $\zeta = x_N/\varepsilon$, 在边界层坐标系下, 连续性方程(22)成为

$$-\partial \mathbf{n} \cdot \mathbf{U} / \partial \zeta + \varepsilon (\partial U_{T1} / \partial x_{T1} + \partial U_{T2} / \partial x_{T2}) = 0, \quad (23)$$

在弱粘性的假设下, 边界层方程(21)成为

$$\partial \mathbf{U} / \partial t = \nu \partial^2 \mathbf{U} / \partial \zeta^2. \quad (24)$$

3 $O(\varepsilon^0)$ 阶近似解

3.1 $O(\varepsilon^0)$ 阶外势流方程的解

利用两时间变量展开法, 引入一个慢变时间尺度 τ , 使得 $\tau = t\varepsilon$, 将速度势 ϕ , 自由面位移 η 及边界层速度 \mathbf{U} 以小参数 ε 展开, 并将(17)和(19)在 $z = 0$ 处进行泰勒展开, 忽略高阶项 $O(\varepsilon^2)$, 比较方程(16)~(20)两边小参数 ε^0 次幂的项, 得如下 $O(\varepsilon^0)$ 阶势流方程和边界条件

$$\nabla^2 \phi_0 = 0, \quad -h/R \leq z \leq \eta(r, \theta, t), \quad 0 < r < 1, \quad (25)$$

$$\partial \eta_0 / \partial t - \partial \phi_0 / \partial z = 0, \quad z = 0, \quad (26)$$

$$\partial \phi_0 / \partial t + \eta_0 = 0, \quad z = 0, \quad (27)$$

$$\partial \phi_0 / \partial r = 0, \quad r = 1, \quad (28)$$

$$\partial \phi_0 / \partial z = 0, \quad z = -h/R, \quad (29)$$

边界条件(26)忽略了边界层法向速度 W , 因为它只有在自由面和侧壁相交处很窄区域(称为弯月面)内起作用, 在求 $O(\varepsilon^1)$ 势流解时对其进行修正。边界条件(28)、(29)假定了侧壁和底部边界层法向速度为0。利用分离变量法可得 $O(\varepsilon^0)$ 阶速度势和自由面位移表达式

$$\phi_0 = J_m(\lambda r) \cosh[\lambda(z + h/R)] [p(\tau) e^{i\Omega\tau} - p(\tau) e^{-i\Omega\tau}] \cos m\theta, \quad (30)$$

$$\eta_0 = -i\Omega J_m(\lambda r) \cosh \lambda [p(\tau) e^{i\Omega\tau} - p(\tau) e^{-i\Omega\tau}] \cos m\theta, \quad (31)$$

这里 $p(\tau)$ 为慢变复振幅, i 为虚数单位, $J_m(r)$ 为 m 阶第一类贝赛尔函数。波数 $\lambda = \lambda_{mn}$ 为满足 $dJ_m(\lambda_{mn}r)/dr|_{r=1} = 0$ 的第 n 个实数根。代(30)、(31)到(26), 得下列色散关系

$$\Omega^2 = \lambda_{mn} \tanh(\lambda_{mn} h/R) = \lambda \tanh(\lambda h/R). \quad (32)$$

3.2 $O(\varepsilon^0)$ 阶边界层方程的解

边界层区域包括侧壁边界层和底部边界层,且每个边界层都有3个速度分量.令 U_{0W} 、 V_{0W} 和 W_{0W} 分别为侧壁边界层的3个速度分量,由(20)和(28)知 U_{0W} 为0.引入一个快变坐标 $\zeta_W = (r-1)/\varepsilon$,则 θ 方向的速度分量 V_{0W} 满足下列修正方程及对应的边界条件

$$\partial V_{0W}/\partial t = \mathcal{V}^2 V_{0W}/\partial \zeta_W^2, \tag{33}$$

$$V_{0W} = -1/r \cdot \partial \phi_0/\partial \theta |_{r=1}, \quad \zeta_W = 0, \tag{34}$$

$$V_{0W} \rightarrow 0, \quad \zeta_W \rightarrow \infty, \tag{35}$$

再利用分离变量法,代(30)到(34),则(33)~(35)的解可以写为

$$V_{0W} = m J_m(\lambda) \cosh \lambda(z+h/R) \sin m\theta \times [p(\tau) e^{i\Omega\tau} e^{-(1+i)\sqrt{(\Omega/(2\mathcal{V}))}\zeta_W} + p(\tau) e^{-i\Omega\tau} e^{-(1-i)\sqrt{(\Omega/(2\mathcal{V}))}\zeta_W}], \tag{36}$$

同样 z 方向的速度分量 W_{0W} 的表达式为

$$W_{0W} = -\lambda J_m(\lambda) \sinh \lambda(z+h/R) \cos m\theta \times [p(\tau) e^{i\Omega\tau} e^{-(1+i)\sqrt{(\Omega/(2\mathcal{V}))}\zeta_W} + p(\tau) e^{-i\Omega\tau} e^{-(1-i)\sqrt{(\Omega/(2\mathcal{V}))}\zeta_W}], \tag{37}$$

类似地,通过坐标变换 $\zeta_B = (z+h/R)/\varepsilon$,可求得底部边界层的3个速度分量 U_{0B} 、 V_{0B} 和 W_{0B} 的解.由(20)和(28)知 $W_{0B} = 0$, U_{0B} 和 V_{0B} 分别为

$$U_{0B} = -\left[\frac{m}{r} J_m(\lambda) - \lambda J_{m+1}(\lambda) \right] \cos m\theta \times [p(\tau) e^{i\Omega\tau} e^{-(1+i)\sqrt{(\Omega/(2\mathcal{V}))}\zeta_B} + p(\tau) e^{-i\Omega\tau} e^{-(1-i)\sqrt{(\Omega/(2\mathcal{V}))}\zeta_B}], \tag{38}$$

$$V_{0B} = \frac{m}{r} J_m(\lambda) \sin m\theta \times [p(\tau) e^{i\Omega\tau} e^{-(1+i)\sqrt{(\Omega/(2\mathcal{V}))}\zeta_B} + p(\tau) e^{-i\Omega\tau} e^{-(1-i)\sqrt{(\Omega/(2\mathcal{V}))}\zeta_B}]. \tag{39}$$

4 $O(\varepsilon^1)$ 阶修正方程、振幅方程及阻尼系数的推导

比较方程(16)~(20)两边的 ε^1 系数,得 $O(\varepsilon^1)$ 控制方程和边界条件

$$\mathcal{V}^2 \phi_1 = 0, \quad -h/R < z < 0, \quad 0 < r < 1, \tag{40}$$

$$\partial \eta_1/\partial t - \partial \phi_1/\partial z = -\partial \eta_0/\partial \tau + W_{0W} |_{z=0}/\varepsilon, \quad z = 0, \tag{41}$$

$$\partial \phi_1/\partial t + \eta_1 = -\partial \phi_0/\partial \tau - \cos(2\omega_0 t) \eta_0, \quad z = 0, \tag{42}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial r} = -U_{1W} = -\int_{\infty}^{\zeta_W} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_{0W}}{\partial \theta} + \frac{\partial V_{0W}}{\partial z} \right] |_{r=1} d\zeta_W, \quad \zeta_W = 0, \tag{43}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = -W_{1B} = -\int_{\infty}^{\zeta_B} \left[\frac{\partial U_{0B}}{\partial r} + \frac{U_{0B}}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_{0B}}{\partial \theta} \right] |_{z=-h/R} d\zeta_B, \quad \zeta_B = 0, \tag{44}$$

因 $O(\varepsilon^1)$ 问题是非齐次的,而齐次问题 $O(\varepsilon^0)$ 有非平凡解,要使得 $O(\varepsilon^1)$ 问题有解,它必须满足所谓的相容性条件.方法是(40)乘以 ϕ_0 的复共轭减去(25)的复共轭乘以 ϕ_1 ,然后在所考虑的区域积分.利用 Green 定理,将体积分转化为面积分,进而可得 $p(\tau)$ 的振幅方程

$$\frac{dp(\tau)}{dt} = -i\alpha p(\tau) + \beta p(\tau), \tag{45}$$

这里 α 为正实数,它表示竖直激励的影响; β 表示复值阻尼系数, α 和 β 的详细表达式为

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\Omega}{4}, \quad \beta = \beta_W + \beta_B + \beta_M, \\ \beta_W = \frac{N \sinh(2\lambda h/R) + 2\lambda h/R}{8\Omega \cosh^2(\lambda h/R)} \sqrt{\frac{2\mathcal{V}}{\Omega}}(1+i), \\ \beta_B = \lambda^2/[4\Omega \cosh^2(\lambda h/R)] \cdot \sqrt{2\mathcal{V}\Omega}(1+i), \\ \beta_M = \lambda^2 \Omega/[2(\lambda^2 - m^2)] \cdot \sqrt{2\mathcal{V}\Omega}(1+i), \end{cases} \tag{46}$$

其中 β_W 、 β_B 和 β_M 分别表示侧壁、底部和弯月面边界层的阻尼。Henderson^[9] 指出, (46) 中阻尼系数的实部和虚部分别表示阻尼的大小和频率漂移。阻尼实部将使得表面波衰减, 而虚部会使得表面波的自然频率发生改变。

5 出现稳定表面波的临界条件

将(45)的实部和虚部分开, 令 $p(\tau) = p_1(\tau) + ip_2(\tau)$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, 则(45)可化为

$$dp_1(\tau)/d\tau = \beta_1 p_1(\tau) - (\alpha + \beta_2) p_2(\tau), \quad (47)$$

$$dp_2(\tau)/d\tau = -(\alpha - \beta_2) p_1(\tau) + \beta_1 p_2(\tau), \quad (48)$$

常微分方程组(47)、(48)是线性的, 它们的不稳定性条件很容易求得, 即

$$\alpha^2 > |\beta|^2, \quad (49)$$

其中 $|\beta|$ 表示复系数 β 的模。(49)的物理意义是如果表面波出现, 由外垂直激励而进入系统的能量不得小于系统由于阻尼的存在而产生的能量耗散。通过引入粘性阻尼系数的虚部 β_2 可对菅永军等^[6] 考虑表面张力的自然频率进行修正, 其中 β_2 为 β_W 、 β_B 和 β_M 的和的虚部, 有

$$\Omega = \sqrt{\lambda \tanh(\lambda h/R) (1 + \Gamma/\rho \cdot \lambda^2)} - \beta_2. \quad (50)$$

6 计算结果

6.1 临界曲线的确定

利用色散关系(32)和不稳定条件(49), 图2给出由有量纲驱动振幅和驱动频率确定的临界曲线, 不稳定区域在曲线的上方。在图2中, 当驱动频率较低时, 驱动振幅必须足够大来确保表面波的出现; 相反, 当驱动频率较高, 则驱动振幅必须非常小。如果驱动频率较高, 而驱动振幅也较大, 则由小参数 ε 的定义知它不是小量, 则此理论假设不成立。

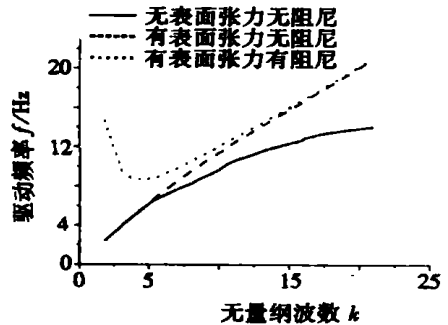
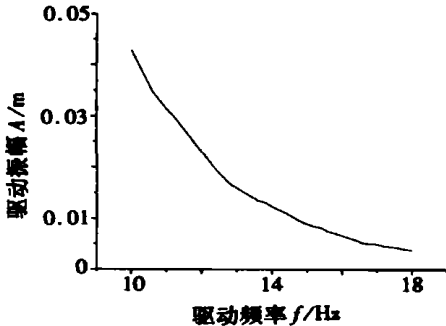


图2 由驱动振幅和驱动频率确定的临界曲线
($h = 1.0 \text{ cm}$, $R = 7.5 \text{ cm}$, $\nu = 10^{-6} \text{ (m}^2/\text{s)}$)

图3 有量纲的自然频率和修正频率随波数的变化
($h = 1.0 \text{ cm}$, $R = 7.5 \text{ cm}$, $\nu = 10^{-6} \text{ (m}^2/\text{s)}$,
 $\Gamma = 0.0727 \text{ (N/m)}$, $\rho = 10^3 \text{ (kg/m}^3)$)

6.2 粘性阻尼和表面张力对模式选择的影响

为了描述表面张力和粘性阻尼对表面波模式选择的影响, 图3给出了频率对波数的色散关系曲线。从图3中可以看出, 当驱动频率较低时, 流体的粘性对模式选择的影响非常重要; 然而, 当驱动频率较高时, 表面张力的影响非常重要。

6.3 理论与实验的比较

图4给出考虑了表面张力和粘性影响的情况下在不同的驱动频率下所得的理论等高线和实验等高线的比较图。从图4可以发现, 当波数较小时, 如(3, 3)模式, 理论驱动频率与实验驱

动频率符合的非常好;但当波数较大时,如(7,6)模式,理论和实验的驱动频率有较大差别。其原因可能是这里没有考虑接触线效应和模式竞争等的影响造成的。

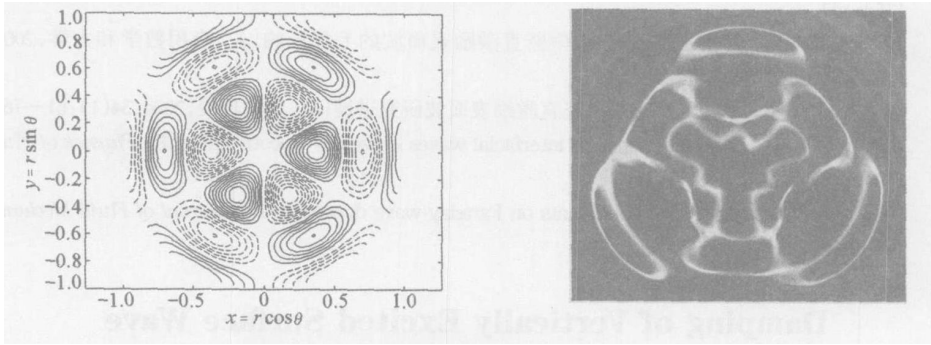


图 4(a) (3,3) 模式, (左) 驱动频率 $f = 19.9 \text{ Hz}$, (右) 驱动频率 $f = 20 \text{ Hz}$

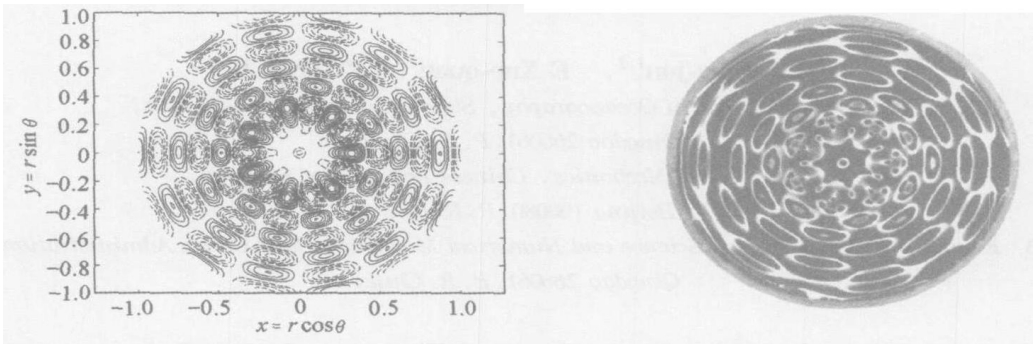


图 4(b) (7,6) 模式, (左) 驱动频率 $f = 26.7 \text{ Hz}$, (右) 驱动频率 $f = 52 \text{ Hz}$

图 4 考虑了表面张力和弱粘性影响的表面波模式的理论等高线(左)和实验等高线(右)的比较
($h = 1.0 \text{ cm}$, $R = 7.5 \text{ cm}$, $A = 11.4 \mu\text{m}$, $\nu = 10^6 (\text{m}^2/\text{s})$, $\Gamma = 0.0727 (\text{N/m})$, $\rho = 10^3 (\text{kg/m}^3)$)

7 结 论

通过以上的分析,可得如下的结论

- 1) 两时间尺度展开法对于求解弱粘性流体的竖直激励表面波问题是有效的。
- 2) 获得了阻尼系数的解析表达式及出现稳定表面波的临界条件。
- 3) 当驱动频率较低时,流体的粘性对模式选择的影响非常重要;然而,当驱动频率较高时,表面张力的影响非常重要。
- 4) 包含粘性和表面张力的理论结果比不考虑二者影响的理论更加接近于实验测量结果。

[参 考 文 献]

[1] E Xue_quan, GAO Yu_xin. Ordered and chaotic modes of surface wave patterns in a vertically oscillating fluid[J]. Communications in Nonlinear Sciences & Numerical Simulation, 1996, 1(2): 1—6.

[2] E Xue_quan, GAO Yu_xin. Visualization of surface wave patterns of a fluid in vertical vibration[A]. In: Proceedings of the Fourth Asian Symposium on Visualization [C]. Beijing: International Academic Publishers, 1996, 653—658.

[3] 高宇欣, 鄂学全. 微幅振荡流体表面波图谱显示方法[J]. 实验力学, 1998, 13(3): 326—333.

[4] 菅永军, 鄂学全, 柏威. 参数激励圆柱形容器中的非线性 Faraday 波[J]. 应用数学和力学, 2003, 24

- (10): 1057—1068.
- [5] 菅永军, 鄂学全. 垂直激励圆柱容器中的表面波结构[J]. 水动力学研究与进展, 2003, **18**(2): 135—147.
- [6] 菅永军, 鄂学全, 张杰. 圆柱容器中垂直激励表面波的毛细影响[J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(2): 204—210.
- [7] 菅永军, 鄂学全. 刚性充液容器内垂直激励表面波研究进展[J]. 力学进展, 2004, **34**(1): 61—76.
- [8] Hill D F. The Faraday resonance of interfacial waves in weakly viscous fluids[J]. Physics of Fluids, 2002, **14**(1): 158—169.
- [9] Henderson D M. Effects of surfactants on Faraday_wave dynamics[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1998, **365**(12): 89—107.

Damping of Vertically Excited Surface Wave in a Weakly Viscous Fluid

JIAN Yong_jun^{1,2}, E Xue_quan², ZHANG Jie^{1,3}

(1. First Institute of Oceanography, State Oceanic Administration,

Qingdao 266061, P. R. China;

2. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences,

Beijing 100080, P. R. China;

3. Key Laboratory of Marine Science and Numerical Modeling, State Ocean Administration,

Qingdao 266061, P. R. China)

Abstract: In a vertically oscillating circular cylindrical container, singular perturbation theory of two-time scale expansions was developed in weakly viscous fluids to investigate the motion of single free surface standing wave by linearizing the Navier-Stokes equation. The fluid field was divided into an outer potential flow region and an inner boundary layer region. The solutions of both two regions were obtained and a linear amplitude equation incorporating damping term and external excitation was derived. The condition to appear stable surface wave was obtained and the critical curve was determined. In addition, an analytical expression of damping coefficient was determined. Finally, the dispersion relation, which has been derived from the inviscid fluid approximation, is modified by adding linear damping. It is found that the modified results are more reasonably close to experimental results. Result shows that when forcing frequency is low, the viscosity of the fluid is prominent for the mode selection. However, when forcing frequency is high, the surface tension of the fluid is prominent.

Key words: vertically forced oscillation; viscous damping; weakly viscous fluid