

线性硬化材料中稳恒扩展裂纹 尖端场的粘塑性解*

贾 斌¹, 王振清², 李永东³, 梁文彦²

- (1. 哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001;
2. 哈尔滨工程大学 建筑工程学院, 哈尔滨 150001;
3. 装甲兵工程学院 机械工程系, 北京 100072)

(王彪推荐)

摘要: 采用弹粘塑性力学模型, 对线性硬化材料中平面应变扩展裂纹尖端场进行了渐近分析. 假设人工粘性系数与等效塑性应变率的幂次成反比, 通过量级匹配表明应力和应变均具有幂奇异性, 奇异性指数由粘性系数中等效塑性应变率的幂指数唯一确定. 通过数值计算讨论了 II 型动态扩展裂纹尖端场的分区构造随各材料参数的变化规律. 结果表明裂尖场构造由硬化系数所控制而与粘性系数基本无关. 弱硬化材料的二次塑性区可以忽略, 而较强硬化材料的二次塑性区和二次弹性区对裂尖场均有重要影响. 当裂纹扩展速度趋于零时, 动态解趋于相应的准静态解; 当硬化系数为零时便退化为 HR(Hui Riedel) 解.

关键词: 准静态扩展; 动态扩展; 线性硬化材料; 弹粘塑性材料; 裂纹尖端场
中图分类号: O346 文献标识码: A

引 言

对含有宏观裂纹固体的应力分析, 最重要的是在裂纹尖端附近, 裂纹扩展与否将取决于裂纹尖端附近高应变区的力学状态. 因此, 为了建立合理的断裂准则, 对于裂纹尖端附近的主奇异渐近场进行研究, 确定裂尖场的奇异属性, 探讨其分区构造, 近年来一直是断裂力学的重要课题.

对于线性硬化材料, Amazigo 和 Hutchinson^[1] 首先得到了 I、II 型准静态扩展裂纹的幂奇异性解, 但是略去了裂纹尖端后方的第二塑性区. Hutchinson^[2] 指出, I 型平面应变问题的第二塑性区不能忽略. 文献[3]的研究结果表明, 对于低硬化材料的 I 型平面应变问题, 第二塑性区对裂纹尖端场有着重要的影响. Castañeda^[4] 进一步考虑了可能存在的二次塑性区, 对反平面问题和平面问题进行了全面的研究, 结果验证了文献[3]的结论, 但对除了 I 型平面应变扩展裂纹以外的其它情况, 二次塑性区对裂尖场的影响不大, 因而文献[1]的近似是比较合理的. 对于动态扩展裂纹, Achenbach 和 Kannicen^[5] 曾研究了 II 型裂纹问题, 裂尖场具有与文献[1]的准静态解类似的幂奇异性. 文献[6]进一步研究了 I 型裂纹问题, 不仅得到了相同的奇异性, 而且

* 收稿日期: 2004_06_23; 修订日期: 2006_01_11

作者简介: 贾斌(1975—), 男, 黑龙江人, 副教授, 博士(联系人. Tel: + 86_451_86417978_12; Fax: + 86_451_86402055; E_mail: jiabin@hit.edu.cn).

当裂纹扩展速度趋于零时, 动态解趋于文献[1]的准静态解. 但是, 文献[5]和[6]同样忽略了二次塑性区的影响. Östlund 和 Gudmundson^[7]进一步对 I、II、III型问题进行了全面分析, 结果表明在较强硬化的情况下, 除 II型裂纹必须考虑二次塑性区才能得到正确的结果外, 其它情况的二次塑性区对渐近场的影响很小, 而对于弱硬化材料, 特别是 I型平面应变问题, 二次塑性区必须考虑; 当裂纹扩展速度趋于零时, 动态解趋于文献[4]的准静态解.

如果考虑材料率敏感性的影响, 渐近场的求解更加困难, 裂尖场的构造也更加复杂. Hui 和 Riedel^[8]采用弹性-非线性粘性本构方程得到了一个幂奇异解, 在文献中称为 HR 场. 贾斌等人^[9-11]采用弹粘塑性模型分别研究了幂硬化材料和理想弹塑性材料中的扩展裂纹尖端场. 在此基础上, 本文对线性硬化材料进行了研究, 探讨了 II型扩展裂纹尖端场的分区构造及其随各参数的变化规律.

1 基本方程

平面坐标系如图 1 所示. 其中 X_α ($\alpha = 1, 2$) 为固定坐标系, o_{xy} 和 $o_r\theta$ 为跟随裂纹尖端以恒定速度 V 沿 X_1 一起移动的随动坐标系.

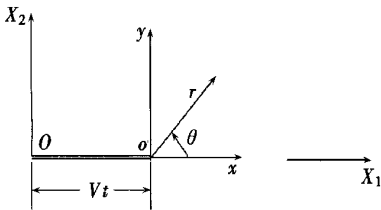


图 1 固定坐标系与随动坐标系

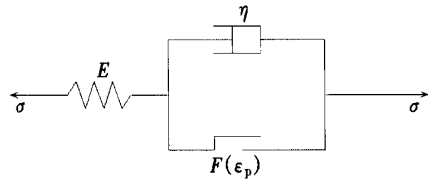


图 2 弹粘塑性力学模型

弹粘塑性力学模型如图 2 所示, 由此可建立如下的联立方程组:

$$\begin{cases} \epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p, \quad \epsilon_e = C : \sigma, \quad \dot{\epsilon}_p = \lambda S_p, \\ S = S_v + S_p, \quad S_v = \eta \dot{\epsilon}_p, \quad S_p = \sigma_p - \sigma_p^m, \end{cases} \quad (1)$$

其中: ϵ, σ, S 分别为总应变、总应力及偏应力张量, 下标 e, p, v 分别表示弹性、塑性和粘性分量, σ_p^m 为平均塑性应力张量, C 为四阶柔度张量, λ 为塑性流动因子, η 为粘性系数; 上标点表示对时间的导数.

定义等效应力 σ 、等效塑性应力 σ_p 和等效塑性应变 ϵ_p 分别为

$$\sigma = \left[\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} \right]^{1/2}, \quad \sigma_p = \left[\frac{3}{2} S_{ij}^p S_{ij}^p \right]^{1/2}, \quad \epsilon_p = \int \left[\frac{3}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p \right]^{1/2} dt, \quad (2)$$

则对于线性硬化材料有

$$\sigma_p - k \epsilon_p = 0, \quad (3)$$

其中硬化系数 k 为一非负常数. 考虑材料的人工粘性系数 η 具有如下形式:

$$\eta = c (\dot{\epsilon}_p)^{-\gamma} \quad (0 < \gamma < 1), \quad (4)$$

式中 c 为非负常数, 并假设在裂纹尖端, 应力和应变均具有 $r^{-\delta}$ ($0 < \delta < 1/2$) 的幂奇异性, 则由式(1)的量级匹配可得:

$$\delta = \frac{1}{\gamma} - 1. \quad (5)$$

把有关的量代入式(1), 经过推导并整理可得分量形式的本构方程为:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \frac{3S_{ij}}{2\sigma} \left[\frac{2}{3c} \right]^{1/(1-\gamma)} H[\sigma - k \epsilon_p] [\sigma - k \epsilon_p]^{1/(1-\gamma)}, \quad (6)$$

其中: E 为弹性模量, ν 为 Poisson 比, δ_{ij} 为 Kroneker 符号, Heaviside 阶跃函数为

$$H[\sigma - k \varepsilon_p] = \begin{cases} 1, & \text{当 } \sigma - k \varepsilon_p > 0, \\ 0, & \text{当 } \sigma - k \varepsilon_p \leq 0. \end{cases} \quad (7)$$

几何方程和运动方程分别为:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (8)$$

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i. \quad (9)$$

2 II型动态扩展裂纹渐近解

在平面应变不可压缩条件下, 引入位移势函数 $U = r^{2-\delta} m(\theta)$, 则极坐标下的位移分量可以表示为

$$u_r = -\frac{\partial U}{r \partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (10)$$

做出如下变换:

$$\alpha = r^{-\delta} [F(\theta) + G(\theta)], \quad \alpha_\theta = r^{-\delta} [F(\theta) - G(\theta)], \quad \alpha_0 = r^{-\delta} I(\theta), \quad (11)$$

$$\sigma = \Xi(\theta) r^{-\delta}, \quad \varepsilon_p = r^{-\delta} Q(\theta), \quad (12)$$

并引入下列无量纲量:

$$\begin{cases} R = \frac{1}{V} \left(\frac{2\mu}{3c} \right)^{1/(1-\nu)}, \quad \lambda = \frac{3R}{2\Xi} H(\Xi - hQ) (\Xi - hQ)^{1/(1-\nu)}, \\ n(\theta) = \sin \theta m'(\theta) - (2 - \delta) \cos \theta m(\theta), \\ F = \frac{F}{\mu}, \quad G = \frac{G}{\mu}, \quad I = \frac{I}{\mu}, \quad \Xi = \frac{\Xi}{\mu}, \quad M^2 = \frac{\rho V^2}{\mu}, \quad h = \frac{k}{\mu}, \end{cases} \quad (13)$$

其中 μ 为剪切模量, 且

$$H(\Xi - hQ) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \Xi - hQ > 0, \\ 0, & \text{当 } \Xi - hQ \leq 0. \end{cases} \quad (14)$$

把各相关量分别代入几何方程式(8)、运动方程式(9)和本构方程式(6), 经无量纲化并整理得控制方程为:

$$Q' = -\delta Q \cot \theta + \frac{R}{\sin \theta} (\Xi - hQ)^{1/(1-\nu)}, \quad (15)$$

$$G' = \frac{2\delta n'}{\sin \theta} - \frac{3RG}{\Xi \sin \theta} (\Xi - hQ)^{1/(1-\nu)} - \delta Q \cot \theta + 2I, \quad (16)$$

$$F' = \frac{2\delta n'}{\sin \theta} - \frac{3RG}{\Xi \sin \theta} (\Xi - hQ)^{1/(1-\nu)} - \delta Q \cot \theta + \delta - \delta M^2 [n' \sin \theta - (1 - \delta) n \cos \theta], \quad (17)$$

$$(1 - M^2 \sin^2 \theta) I' = M^2 \sin \theta \left[2G \sin \theta + \delta \cos \theta + \frac{3RI}{\Xi} (\Xi - hQ)^{1/(1-\nu)} + (1 - \delta^2) n \right] - M^2 [(1 - \delta) n \sin \theta + \delta n' \cos \theta] + \delta(F + G) - 2G, \quad (18)$$

$$(1 - M^2 \sin^2 \theta) n'' = - (1 - \delta^2) n - \delta \cos \theta - \frac{3RI}{\Xi} (\Xi - hQ)^{1/(1-\nu)} - \delta(F + G) \sin \theta + M^2 \sin \theta [(1 - \delta) n \sin \theta + \delta n' \cos \theta], \quad (19)$$

其中撇号代表对坐标 θ 的导数.

边界条件为:

$$\begin{cases} F(0) = G(0) = n'(0) = 0, I(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \left[\frac{\delta Q(0)}{R} \right]^{1-\gamma} + hQ(0) \right\}, \\ F(\pi) - G(\pi) = I(\pi) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

以 $Q(0)$ 和 $n(0)$ 为未知量进行双参数打靶, 对各参数分别取可能的数值进行了大量计算, 结果表明裂尖场是连续的, 不存在间断线. 解随单参数的变化规律为:

1) 随 M 单调递减, 即裂纹扩展速度减小, 各分区与解的变化都很小, 并且裂尖场的分区构造并不发生变化. 当 $M \rightarrow 0$ 时趋于下文的准静态解.

2) 随 h 单调递增, 即材料的硬化程度增加, 应力幅值和塑性应变单调递增, 裂尖场的构造呈现复杂的变化(参见表 1, 其中 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 分别表示弹性卸载区、第二塑性区、第二弹性区的起始边界线角度): 当 $\gamma = 0.8, R = 1.1, M = 0.1$ 时, 裂尖场由 $h = 0$ 时的弹粘性_理想塑性无卸载区状态变为出现弹性卸载区和第二塑性区, 随后第二塑性区消失, 此后第二塑性区又和第二弹性区共同出现. 并且只要裂尖场不是满塑性, 则随着 h 的增大, 塑性区必减小而弹性区必增大.

表 1 解随 h 的变化 ($\gamma = 0.8, R = 1.1, M = 0.1$)

h	$-n(0)$	$Q(0)$	$\theta_1(^{\circ})$	$\theta_2(^{\circ})$	$\theta_3(^{\circ})$
0.5	6.836 9E- 1	1.514 7E+ 1	67.201 4	112.817 3	150.947 9
0.4	1.582 7E- 1	2.328 7E+ 0	169.907 0	—	—
0.3	1.043 5E- 1	1.326 2E+ 0	174.443 5	179.994 3	—
0.2	7.907 1E- 2	9.292 9E- 1	176.556 3	179.907 8	—
0.1	6.346 8E- 2	7.137 9E- 1	178.080 4	179.601 4	—
0.0	5.259 7E- 2	5.780 4E- 1	—	—	—

3) 随 R 单调递减(相当于 c 递增), 此时材料的粘性增加, 应力幅值和塑性应变单调递增, 解的变化非常显著, 但塑性流动因子以及裂尖场的各个分区大小不随 R 变化, 这表明粘性系数中的常数 c 对裂尖场的构造没有任何影响, 它只影响裂尖场的应力和应变的强度. 当 $R = 0$ 时, 方程组无解.

4) 随 γ 单调递减(相当于 δ 递增), 此时材料的粘性和裂尖场的奇异性都增加, 应力幅值和塑性应变都单调递减. 裂尖场构造随 γ 的增加发生小范围的变化: 当 $h = 0.01, R = 1.1, M = 0.1$ 时, 裂尖场由满塑性变为出现弹性卸载区和第二塑性区(构造变化与 h 的取值有关), 但由于这两个区都很小相应的分区大小变化也很小. 因此, γ 对裂尖场构造的影响可以忽略不计.

3 II型准静态扩展裂纹渐近解

引入 Airy 应力函数 $\phi(x, y)$ 或 $\phi(r, \theta)$, 使得应力表达式自动满足静平衡方程

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{\phi}{r} \right), \quad (21)$$

应变率协调方程为

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \epsilon_{\theta}}{\partial r} \right) - r \frac{\partial \epsilon_{\theta}}{\partial r} = 2 \frac{\partial^2 (r \epsilon_{r\theta})}{\partial r \partial \theta}. \quad (22)$$

由量级分析, 设应力函数 ϕ 的表达式为:

$$\phi = r^{2-\delta} b(\theta). \quad (23)$$

引入无量纲量

$$b = \frac{b}{\mu}. \quad (24)$$

把相关量代入式(22), 经无量纲化并整理得控制方程:

$$Z' \sin \theta + (2 + \delta) Z \cos \theta - 3R[(\delta^2 - 1)\phi_1 - \phi_1'' + 4\delta\phi_2'] = 0, \quad (25)$$

式中

$$\begin{cases} Z(\theta) = b'''' + 2(\delta^2 - 2\delta + 2)b'' + \delta^2(2 - \delta)^2 b, \\ \Pi(\theta) = \frac{(\Xi - hQ)^{1/(1-\nu)}}{\Xi}, \\ \phi_1(\theta) = \Pi(\theta)[b'' + \delta(2 - \delta)b], \\ \phi_2(\theta) = \Pi(\theta)[(1 - \delta)b'], \end{cases} \quad (26)$$

其它各无量纲量的含义与动态问题相同. 所需的另一方程与式(15)相同.

边界条件为:

$$\begin{cases} b(\pi) = b'(0) = b(0) = b''(0) = b'''(0) = 0, \\ b'(0) = - \left[\left[\frac{\delta Q(0)}{R} \right]^{1-\nu} + hQ(0) \right] \sqrt{\sqrt{3}(1 - \delta)}. \end{cases} \quad (27)$$

以 $Q(0)$ 和 $b(0)$ 为未知量进行双参数打靶, 计算结果与动态结果 ($M = 0.001$) 相对比如图3所示, 两者吻合得非常好, 并且裂尖场的构造也是完全一致的. 这表明当 $M \rightarrow 0$ 时, 本文的动态解能够退化为准静态解.

进一步考虑当硬化系数 $h = 0$ 时, 即可退化为 HR 解^[8] 的模型, 两者的本构方程形式完全相同, 数值计算结果也表明两者均不含弹性卸载区, 即裂尖场的构造相同, 归一化的应力角分布曲线如图4所示(文[8]中的 $n = 6$ 对应于本文中的 $\nu = 0.8333$). 这进一步反映了本文中模型的合理性.

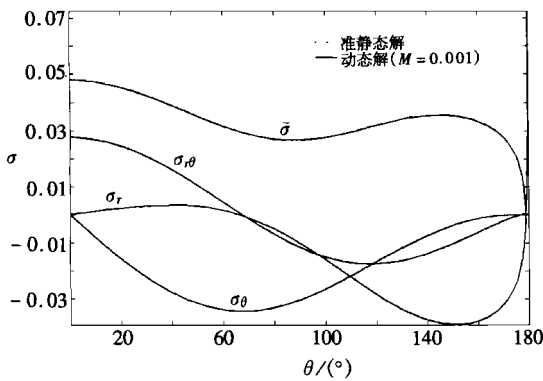


图3 准静态解与 $M \rightarrow 0$ 时动态解的比较 ($\nu = 0.75$)

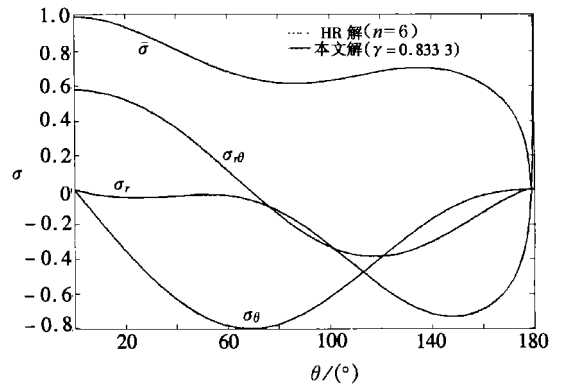


图4 与 HR 解的比较

4 结 论

1) 采用弹粘塑性力学模型, 并假设人工粘性系数 $\eta = c(\dot{\epsilon}_p)^{-\nu}$ ($0 < \nu < 1$), 通过渐近分析表明裂纹尖端的应力和应变均具有形如 $r^{-\delta}$ ($0 < \delta < 1/2$) 的幂奇异性, 奇异性指数 δ 由粘性系数中等效塑性应变率的幂指数 ν 唯一确定.

2) 对不可压缩条件下的平面应变 II 型动态扩展裂纹问题, 裂尖场分区构造的控制参数是

材料的硬化系数 h , 分区构造随 h 的变化呈现复杂的变化规律. 在弱硬化情况下, 二次塑性区可以忽略; 而在较强硬化时, 不仅不能忽略二次塑性区, 而且还要考虑二次弹性区, 才能得到正确的裂尖场构造.

3) 在粘性系数表达式所含的两个材料参数中, 系数 c 对裂尖场的构造没有任何影响, 它只影响裂尖场的应力和应变的强度; 而幂指数 ν 的影响则可以忽略不计, 即认为它只影响裂尖场的奇异性程度. 因此, 可以认为材料的粘性不影响裂尖场的分区构造.

4) 当裂纹扩展速度趋于零时, 本文的粘塑性动态解可以还原为相应的准静态解; 并且当硬化系数为零时, 本文的弹粘塑性解能够退化为文献[8]的弹性_非线性粘性 HR 解. 因此, 本文的解具有良好的包容性与合理性.

致谢: 作者感谢哈尔滨工业大学博士科研启动基金的资助(01502485)

[参 考 文 献]

- [1] Amazigo J C, Hutchinson J W. Crack tip fields in steady crack growth with linear strain hardening [J]. *J. Mech Phys Solid*, 1977, **25**(2): 81—97.
- [2] Hutchinson J W. Crack tip singularity fields in nonlinear fracture mechanics[A]. In: Francois D Ed. *Advances in Fracture Research [C]*. Vol 6. Oxford: Pergamon Press, 1981, 1847—1872.
- [3] Zhang R F, Zhang X T, Hwang K C. Near tip fields for plane strain mode I steady crack growth in linear hardening material with Bauschinger effect[A]. In: Hwang K C Ed. *Proceedings of International Fracture Mechanics Academic Congress [C]*. Beijing: Science Press, 1983, 283—290.
- [4] Castañeda P P. Asymptotic fields in steady crack growth with linear strain hardening[J]. *J Mech Phys Solid*, 1987, **35**(2): 227—268.
- [5] Achenbach J D, Kannicen M F. Crack tip plasticity in dynamic fracture mechanics[A]. In: Perrone N Ed. *Fracture Mechanics [C]*. Virginia: University Press of Virginia, 1978, 649—670.
- [6] Achenbach J D, Kannicen M F, Popelar C H. Crack tip fields for fast fracture of an elastic plastic material[J]. *J Mech Phys Solid*, 1981, **29**(3): 211—225.
- [7] Östlund S, Gudmundson P. Asymptotic crack tip fields for dynamic fracture of linear strain hardening solids[J]. *Internat J Solid Structure*, 1988, **24**(11): 1141—1158.
- [8] Hui C Y, Riedel H. The asymptotic stress and strain field near the tip of a growing crack under creep conditions[J]. *Internat J Fracture*, 1981, **17**(4): 409—425.
- [9] 贾斌, 唐立强, 王振清, 等. 幂硬化材料中扩展裂纹尖端场的弹粘塑性分析[J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2002, **23**(5): 74—79.
- [10] 贾斌, 王振清, 李永东, 等. 稳恒扩展裂纹尖端的弹粘塑性场[J]. *应用力学学报*, 2003, **20**(1): 64—69.
- [11] 贾斌, 唐婧, 王振清. III型定常扩展裂纹尖端的粘弹性_理想塑性场[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2004, **36**(6): 718—721.

Viscoplastic Solution to the Field at Steadily Propagating Crack Tip in Linear Hardening Materials

JIA Bin¹, WANG Zhen_qing², LI Yong_dong³, LIANG Wen_yan²

(1. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology,
Harbin 150001, P. R. China;

2. Architectural Engineering College, Harbin Engineering University,
Harbin 150001, P. R. China;

3. Mechanical Engineering Department, Armored Forces Engineering Institute,
Beijing 100072, P. R. China)

Abstract: An elastic-viscoplastic constitutive model was adopted to analyze asymptotically the tip field of moving crack in linear hardening materials under plane strain condition. Under the assumption that the artificial viscosity coefficient was in inverse proportion to power law of the rate of effective plastic strain, it is obtained that stress and strain both possess power law singularity and the singularity exponent is uniquely determined by the power law exponent of the rate of effective plastic strain. Variations of zoning structure according to each material parameter were discussed by means of numerical computation for the tip field of mode II dynamic propagating crack, which show that the structure of crack tip field is dominated by hardening coefficient rather than viscosity coefficient. The secondary plastic zone can be ignored for weak hardening materials while the secondary plastic zone and the secondary elastic zone both have important influence on crack tip field for strong hardening materials. The dynamic solution approaches to the corresponding quasi-static solution when the crack moving speed goes to zero, and further approaches to the HR(Hui_Riedel) solution when the hardening coefficient is equal to zero.

Key words: quasi-static propagation; dynamic propagation; linear hardening material; elastic-viscoplastic material; crack tip field