

# 压电压磁复合材料中一对平行 裂纹对弹性波的散射

周振功<sup>1</sup>, 王彪<sup>2</sup>

(1. 哈尔滨工业大学 复合材料研究所, 哈尔滨 150001;

2. 中山大学 物理与工程学院, 广州 510275)

(我刊编委王彪来稿)

**摘要:** 利用 Schmidt 方法对压电压磁复合材料中一对平行对称裂纹对反平面简谐波的散射问题进行了分析, 借助富里叶变换得到了以裂纹面上的间断位移为未知变量的对偶积分方程。在求解对偶积分方程的过程中, 裂纹面上的间断位移被展开成雅可比多项式的形式, 最终获得了应力强度因子、电位移强度因子、磁通量强度因子三者之间的关系。结果表明, 压电压磁复合材料中平行裂纹动态反平面断裂问题的应力奇异性与一般弹性材料中的动态反平面断裂问题的应力奇异性相同, 同时讨论了裂纹间的屏蔽效应。

**关键词:** 压电压磁复合材料; 裂纹; 简谐波; 对偶积分方程; 强度因子

**中图分类号:** O346.58 **文献标识码:** A

## 引言

由于具有两种或更多压电压磁耦合特性, 压电压磁复合材料要比单一的压电材料或压磁材料具有更高的磁电耦合性能。在某些情况下, 压电压磁复合材料的耦合特性比单相磁电材料高出上百倍。因此, 压电压磁复合材料所独有的磁\_电\_机械能的相互转换功能<sup>[1]</sup>已广泛用于磁场探测器、电子封装、声学装置、声纳设备、医学超声成像、传感器和作动器等设备中。但由于在压电压磁复合材料制备过程中会存在一些缺陷, 如裂纹、空洞, 因此会在使用过程中失效。所以对压电压磁复合材料的磁\_电\_弹性之间的相互作用及其断裂特性研究是重要的<sup>[2-4]</sup>。最近, 刘金喜<sup>[5]</sup>研究了含有椭圆洞或裂纹压电压磁复合材料的平面断裂问题。高存发<sup>[6]</sup>和王保林等<sup>[7]</sup>采用不同方法研究了压电压磁复合材料的断裂问题。Van Suchtelen<sup>[8]</sup>提出了压电和压磁材料的结合可以导致出现新的材料特性即磁电耦合效应。此后许多研究者分析了 BaTiO<sub>3</sub>-CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> 复合材料的磁电耦合特性, 而研究压电压磁复合材料磁电耦合特性的理论工作也只是近期进行的<sup>[1-7]</sup>, 然而对于动态断裂问题的研究就更少了。据了解对于压电压磁复合材料中平行裂纹对弹性波的散射问题研究的还没有进行过。

**收稿日期:** 2004\_07\_31; **修订日期:** 2006\_01\_10

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(50232030; 10172030; 10572043); 黑龙江省杰出青年基金资助项目(JC04-08); 黑龙江省自然科学基金资助项目(A0301)

**作者简介:** 周振功(1963), 河南省镇平县人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人: Tel: + 86\_451\_86402396; Fax: + 86\_451\_86402386; E\_mail: zhouzhg@hit.edu.cn)

本文将利用 Schmidt<sup>[9]</sup>方法分析了压电压磁复合材料中一对平行对称裂纹对简谐弹性波的散射问题,经过富里叶变换,问题的求解可以转化为一对对偶积分方程的求解。为了求解对偶积分方程,裂纹面上的间断位移被展开成雅可比多项式的形式,这一求解过程与文献[2]~文献[7]中的求解过程不同,最终给出了动应力强度因子的数值解。

## 1 基本问题和方程的解

设有位于压电压磁复合材料平面中一对平行对称裂纹,长度为 $2l$ ,平行裂纹间距为 $h$ ,如图1所示。设其受与裂纹面垂直的反平面简谐波入射,

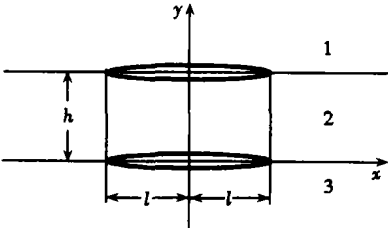


图1 压电压磁复合材料中一对平行对称裂纹的几何图形

是入射波频率,  $-a_0$  是入射波幅值。如公认采取的技术一样,在以下的有关变量中舍去简谐时间项  $e^{-i\omega t}$ 。这里仅考虑反平面机械位移、平面电位移和平面磁场的情况。如文献[10]讨论的那样,对于 I 型裂纹的断裂问题,由于没有裂纹面张开位移的存在,电势、法向电位移、磁势、法向磁通量在裂纹面上将连续,从而本问题的边界条件可表示为(本文只考虑扰动场)

$$\begin{cases} \sigma_{yz}^{(1)}(x, h^+) = \sigma_{yz}^{(2)}(x, h^-) = 0, & |x| < l, \\ w^{(1)}(x, h^+) = w^{(2)}(x, h^-), & |x| > l, \\ \sigma_{yz}^{(2)}(x, 0^+) = \sigma_{yz}^{(3)}(x, 0^-) = 0, & |x| < l, \\ w^{(2)}(x, 0^+) = w^{(3)}(x, 0^-), & |x| > l, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sigma_{yz}^{(1)}(x, h^+) = \sigma_{yz}^{(2)}(x, h^-), D_y^{(1)}(x, h^+) = D_y^{(2)}(x, h^-), & |x| < l, \\ \sigma_{yz}^{(1)}(x, h^+) = \sigma_{yz}^{(2)}(x, h^-), B_y^{(1)}(x, h^+) = B_y^{(2)}(x, h^-), & |x| < l, \\ \sigma_{yz}^{(2)}(x, 0^+) = \sigma_{yz}^{(3)}(x, 0^-), D_y^{(2)}(x, 0^+) = D_y^{(3)}(x, 0^-), & |x| < l, \\ \sigma_{yz}^{(2)}(x, 0^+) = \sigma_{yz}^{(3)}(x, 0^-), B_y^{(2)}(x, 0^+) = B_y^{(3)}(x, 0^-), & |x| < l, \end{cases} \quad (2)$$

$$w^{(1)}(x, y) = w^{(2)}(x, y) = w^{(3)}(x, y) = 0, \quad (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty, \quad (3)$$

这里  $\sigma_{yz}^{(i)}$ 、 $D_k^{(i)}$  和  $B_k^{(i)}$  ( $k = x, y; i = 1, 2, 3$ ) 分别是反平面剪切应力、平面电位移和平面磁通量。 $w^{(i)}$ 、 $\phi^{(i)}$  和  $\psi^{(i)}$  分别是机械位移、电势和磁势。上标  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 分别对应上半平面1、夹层2和下半平面3,如图1所示。这里我们仅考虑  $\omega$  为正值的情况。

这里假定压电压磁复合材料为横观各向同性,从而本构方程可表示为

$$\sigma_{zk}^{(i)} = c_{44} w_{,k}^{(i)} + e_{15} \phi_{,k}^{(i)} + q_{15} \psi_{,k}^{(i)} \quad (k = x, y; i = 1, 2, 3), \quad (4)$$

$$D_k^{(i)} = e_{15} w_{,k}^{(i)} - \epsilon_{11} \phi_{,k}^{(i)} - d_{11} \psi_{,k}^{(i)} \quad (k = x, y; i = 1, 2, 3), \quad (5)$$

$$B_k^{(i)} = q_{15} w_{,k}^{(i)} - d_{11} \phi_{,k}^{(i)} - \mu_{11} \psi_{,k}^{(i)} \quad (k = x, y; i = 1, 2, 3), \quad (6)$$

这里  $c_{44}$  是剪切模量,  $e_{15}$  是压电系数,  $\epsilon_{11}$  是介电参数,  $q_{15}$  是压磁耦合系数,  $d_{11}$  是电磁耦合系数,  $\mu_{11}$  是磁通率。

控制方程可表示为

$$c_{44} \nabla^2 w^{(i)} + e_{15} \nabla^2 \phi^{(i)} + q_{15} \nabla^2 \psi^{(i)} = \frac{2w}{t} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (7)$$

$$e_{15} \nabla^2 w^{(i)} - \epsilon_{11} \nabla^2 \phi^{(i)} - d_{11} \nabla^2 \psi^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (8)$$

$$q_{15}^2 w^{(i)} - d_{11}^2 w^{(i)} - \Delta w^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \tag{10}$$

这里  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  是二维拉普拉斯算子  $\rho$  是压电压磁复合材料密度

由于本问题几何和载荷的对称性, 只需考虑右半平面  $0 \leq x < \infty, -\infty < y < \infty$  就可以  
 方程(8)~ 方程(10) 经富里叶变换后, 其解可假设为

$$\begin{cases} w^{(1)}(x, y) = \int_0^{\infty} A_1(s) e^{-y} \cos(sx) ds, \\ w_x^{(1)}(x, y) = \frac{a_1}{a_0} w^{(1)}(x, y) + \int_0^{\infty} B_1(s) e^{-sy} \cos(sx) ds \quad (y = h), \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} w_x^{(1)}(x, y) = \frac{a_2}{a_0} w^{(1)}(x, y) + \int_0^{\infty} C_1(s) e^{-sy} \cos(sx) ds, \\ w^{(2)}(x, y) = \int_0^{\infty} [A_2(s) e^{-y} + B_2(s) e^y] \cos(sx) ds, \\ w_x^{(2)}(x, y) = \frac{a_1}{a_0} w^{(2)}(x, y) + \int_0^{\infty} [C_2(s) e^{-sy} + D_2(s) e^{sy}] \cos(sx) ds \end{cases} \tag{12}$$

(0 < y < h),

$$\begin{cases} w_x^{(3)}(x, y) = \frac{a_2}{a_0} w^{(2)}(x, y) + \int_0^{\infty} [E_2(s) e^{-sy} + F_2(s) e^{sy}] \cos(sx) ds, \\ w^{(3)}(x, y) = \int_0^{\infty} A_3(s) e^y \cos(sx) ds, \\ w_x^{(3)}(x, y) = \frac{a_1}{a_0} w^{(3)}(x, y) + \int_0^{\infty} B_3(s) e^{sy} \cos(sx) ds \quad (y = 0), \\ w_x^{(3)}(x, y) = \frac{a_2}{a_0} w^{(3)}(x, y) + \int_0^{\infty} C_3(s) e^{sy} \cos(sx) ds, \end{cases} \tag{13}$$

这里,  $A_1(s), B_1(s), C_1(s), A_2(s), B_2(s), C_2(s), D_2(s), E_2(s), F_2(s), A_3(s), B_3(s), C_3(s)$  是未知函数,  $\Delta = s^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}, c^2 = \frac{1}{\rho}, \rho = c_{44} + a_1 e_{15}/a_0 + a_2 q_{15}/a_0, a_0 = d_{11} d_{11} - d_{11}^2, a_1 = d_{11} e_{15} - d_{11} q_{15}, a_2 = q_{15} d_{11} - d_{11} e_{15}$

从而由方程(5)~ 方程(7) 可得

$$w_x^{(1)}(x, y) = - \int_0^{\infty} \left\{ A_1(s) e^{-y} + s[e_{15} B_1(s) + q_{15} C_1(s)] e^{-sy} \right\} \cos(sx) ds, \tag{14}$$

$$D_y^{(1)}(x, y) = \int_0^{\infty} s[d_{11} B_1(s) + d_{11} C_1(s)] e^{-sy} \cos(sx) ds, \tag{15}$$

$$B_y^{(1)}(x, y) = \int_0^{\infty} s[d_{11} B_1(s) + d_{11} C_1(s)] e^{-sy} \cos(sx) ds, \tag{16}$$

$$w_x^{(2)}(x, y) = - \int_0^{\infty} \left\{ A_2(s) e^{-y} + s[e_{15} C_2(s) + q_{15} E_2(s)] e^{-sy} - B_2(s) e^y - s[e_{15} D_2(s) + q_{15} F_2(s)] e^{sy} \right\} \cos(sx) ds, \tag{17}$$

$$D_y^{(2)}(x, y) = \int_0^{\infty} s \left\{ [d_{11} C_2(s) + d_{11} E_2(s)] e^{-sy} - [d_{11} D_2(s) + d_{11} F_2(s)] e^{sy} \right\} \cos(sx) ds, \tag{18}$$

$$B_y^{(2)}(x, y) = \int_0^{\infty} s \left\{ [d_{11} C_2(s) + d_{11} E_2(s)] e^{-sy} - [d_{11} D_2(s) + d_{11} F_2(s)] e^{sy} \right\} \cos(sx) ds, \tag{19}$$

$$w_x^{(3)}(x, y) = \int_0^{\infty} \left\{ A_3(s) e^y + s[e_{15} B_3(s) + q_{15} C_3(s)] e^{sy} \right\} \cos(sx) ds, \tag{20}$$

$$D_y^{(3)}(x, y) = - \frac{2}{0} s [ {}_{11}B_2(s) + d_{11}C_3(s) ] e^{sy} \cos(sx) ds, \quad (21)$$

$$B_y^{(3)}(x, y) = - \frac{2}{0} s [ d_{11}B_3(s) + {}_{11}C_3(s) ] e^{sy} \cos(sx) ds \quad (22)$$

为了求解问题, 裂纹面上的位移之差分别定义为

$$f_1(x) = w^{(1)}(x, h^+) - w^{(2)}(x, h^-), \quad (23)$$

$$f_2(x) = w^{(2)}(x, 0^+) - w^{(3)}(x, 0^-) \quad (24)$$

把方程(11)~ 方程(13)代入到方程(23)、(24), 并利用富里叶变换和边界条件可得

$$\begin{cases} A_1(s)e^{-h} - A_2(s)e^{-h} - B_2(s)e^h = f_1(s), \\ A_2(s) + B_2(s) - A_3(s) = f_2(s), \end{cases} \quad (25)$$

$$\frac{a_1}{a_0} [ A_1(s)e^{-h} - A_2(s)e^{-h} - B_2(s)e^h ] + B_1(s)e^{-sh} - C_2(s)e^{-sh} - D_2(s)e^{sh} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{a_1}{a_0} [ A_2(s) + B_2(s) - A_3(s) ] + C_2(s) + D_2(s) - B_3(s) = 0, \quad (27)$$

$$\frac{a_2}{a_0} [ A_1(s)e^{-h} - A_2(s)e^{-h} - B_2(s)e^h ] + C_1(s)e^{-sh} - E_2(s)e^{-sh} - F_2(s)e^{sh} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{a_2}{a_0} [ A_2(s) + B_2(s) - A_3(s) ] + E_2(s) + F_2(s) - C_3(s) = 0, \quad (29)$$

这里变量符号上的横杠表示经过富里叶变换后的变量 把方程(14)~ 方程(22)代入到方程(1)~ 方程(3)中可得

$$\begin{aligned} & A_1(s)e^{-h} + s[e_{15}B_1(s) + q_{15}C_1(s)]e^{-sh} - A_2(s)e^{-h} - \\ & s[e_{15}C_2(s) + q_{15}E_2(s)]e^{-sh} + B_2(s)e^y + \\ & s[e_{15}D_2(s) + q_{15}F_2(s)]e^{sh} = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & A_2(s) + s[e_{15}C_2(s) + q_{15}E_2(s)] - B_2(s) - s[e_{15}D_2(s) + q_{15}F_2(s)] + \\ & A_3(s) + s[e_{15}B_3(s) + q_{15}C_3(s)] = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & - [ {}_{11}B_1(s) + d_{11}C_1(s) ] e^{-sh} + [ {}_{11}C_2(s) + d_{11}E_2(s) ] e^{-sh} - \\ & [ {}_{11}D_2(s) + d_{11}F_2(s) ] e^{sh} = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

$$- {}_{11}C_2(s) - d_{11}E_2(s) + {}_{11}D_2(s) + d_{11}F_2(s) - {}_{11}B_3(s) - d_{11}C_3(s) = 0, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & [- d_{11}B_1(s) - {}_{11}C_1(s) ] e^{-sh} + [ d_{11}C_2(s) + {}_{11}E_2(s) ] e^{-sh} - \\ & [ d_{11}D_2(s) + {}_{11}F_2(s) ] e^{sh} = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & - d_{11}C_2(s) - {}_{11}E_2(s) + d_{11}D_2(s) + {}_{11}F_2(s) - \\ & d_{11}B_3(s) - {}_{11}C_3(s) = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

利用 12 个方程(25)~ 方程(35)求解 12 个未知数,  $A_1(s)$ 、 $B_1(s)$ 、 $C_1(s)$ 、 $A_2(s)$ 、 $B_2(s)$ 、 $C_2(s)$ 、 $D_2(s)$ 、 $E_2(s)$ 、 $F_2(s)$ 、 $A_3(s)$ 、 $B_3(s)$ 、 $C_3(s)$ , 并利用边界条件(1)可得

$$\begin{cases} \frac{2}{0} f_1(s) \cos(sx) ds = 0, & |x| > l, \\ \frac{2}{0} f_2(s) \cos(sx) ds = 0, & |x| > l, \end{cases} \quad (36)$$

$$\frac{1}{0} [ g_1(s)f_1(s) + g_2(s)f_2(s) ] \cos(sx) ds = 0, \quad |x| = l, \quad (37)$$

$$\frac{1}{l} \int_0^l s [g_2(s)f_1(s) + g_1(s)f_2(s)] \cos(sx) ds = - \quad 0, \quad |x| < l \quad (38)$$

从而由方程(36)~ 方程(38)可得

$$\begin{cases} f_1(s) = f_2(s) & f_1(x) = f_2(x), \\ \begin{matrix} (1) \\ yz \end{matrix} (x, h) = \begin{matrix} (2) \\ yz \end{matrix} (x, h) = \begin{matrix} (2) \\ yz \end{matrix} (x, 0) = \begin{matrix} (3) \\ yz \end{matrix} (x, 0), \end{cases} \quad (39)$$

$$D_y^{(1)}(x, h) = D_y^{(2)}(x, h) = D_y^{(2)}(x, 0) = D_y^{(3)}(x, 0), \quad (40)$$

$$B_y^{(1)}(x, h) = B_y^{(2)}(x, h) = B_y^{(2)}(x, 0) = B_y^{(3)}(x, 0), \quad (41)$$

这里  $g_1(s) = -c_{44} - (-s)(e_{15}a_1 + q_{15}a_2)/a_0$  和  $g_2(s) = -c_{44} e^{-sh} - (e^{-sh} - se^{-h})[(e_{15}a_1 + q_{15}a_2)/a_0]$   $\lim_{s \rightarrow 0} g_1(s)/s = -c_{44}$  和  $\lim_{s \rightarrow 0} g_2(s)/s = 0$  为了确定未知函数  $f_i(s)$  ( $i = 1, 2$ ), 必须求解上述对偶积分方程(36)~ 方程(38)

### 2 对偶积分方程的求解

由裂纹面上的位移性质, 裂纹面上位移差是连续、可导、有限的, 从而, 未知函数可以展开成如下级数形式

$$f_1(x) = f_2(x) = \sum_{n=1} b_n P_{2n-2}^{(1/2, 1/2)} \left( \frac{x}{l} \right) \left[ 1 - \frac{x^2}{l^2} \right]^{1/2}, \quad 0 < x < l; y = 0, \quad (42)$$

$$f_1(x) = f_2(x) = w^{(1)}(x, h^+) - w^{(2)}(x, h^-) = 0, \quad x > l; y = 0, \quad (43)$$

这里  $b_n$  是未知系数,  $P_n^{(1/2, 1/2)}(x)$  是雅可比多项式<sup>[11]</sup> 方程(42)、(43)经富立叶变换后为<sup>[12]</sup>

$$f_1(s) = \sum_{n=1} b_n G_n \frac{1}{s} J_{2n-1}(sl), \quad G_n = 2\sqrt{(-1)^{n-1}} \frac{(2n-1/2)!}{(2n-2)!}, \quad (44)$$

这里  $J_n(x)$  和  $J_n(x)$  分别是伽玛函数和贝赛尔函数

把方程(44)代入到方程(36)~ 方程(38)中, 方程(36)能够自动满足, 方程(37)、(38)经过在区间  $[0, x]$  上对  $x$  积分后变为

$$\frac{1}{l} \sum_{n=1} b_n G_n \int_0^l \left[ \frac{g_1(s) + g_2(s)}{s} \right] J_{2n-1}(sl) \sin(sx) ds = - \quad 0x \quad (45)$$

方程(45)可以利用 Schmidt<sup>[9]</sup> 方法求解未知系数  $b_n$  具体过程可参见文献[13]和文献[14], 这里省略

### 3 强度因子

若未知系数  $b_n$  获得, 整个扰动应力场、扰动电位移场和磁场就可以获得 但对于断裂力学, 重要的是确定裂纹尖端附近的扰动应力场、扰动电位移场和磁场 沿裂纹面的应力  $\begin{matrix} (1) \\ yz \end{matrix}$ 、 $\begin{matrix} (2) \\ yz \end{matrix}$ 、 $\begin{matrix} (3) \\ yz \end{matrix}$ 、电位移  $D_y^{(1)}$ 、 $D_y^{(2)}$ 、 $D_y^{(3)}$  和磁通量  $B_y^{(1)}$ 、 $B_y^{(2)}$ 、 $B_y^{(3)}$  可分别表示为

$$\begin{matrix} (1) \\ yz \end{matrix} (x, h) = \begin{matrix} (2) \\ yz \end{matrix} (x, h) = \begin{matrix} (2) \\ yz \end{matrix} (x, 0) = \begin{matrix} (3) \\ yz \end{matrix} (x, 0) = \quad x = \frac{1}{l} \sum_{n=1} b_n G_n \int_0^l \left[ \frac{g_1(s) + g_2(s)}{s} \right] J_{2n-1}(sl) \cos(xs) ds, \quad (46)$$

$$\begin{aligned} D_y^{(1)}(x, h) &= D_y^{(2)}(x, h) = D_y^{(2)}(x, 0) = D_y^{(3)}(x, 0) = D_y = \\ &- \frac{e_{15}}{l} \sum_{n=1} b_n G_n \int_0^l [1 + e^{-sh}] J_{2n-1}(sl) \cos(xs) ds, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} B_y^{(1)}(x, h) &= B_y^{(2)}(x, h) = B_y^{(2)}(x, 0) = B_y^{(3)}(x, 0) = B_y = \\ &- \frac{q_{15}}{l} \sum_{n=1} b_n G_n \int_0^l [1 + e^{-sh}] J_{2n-1}(sl) \cos(xs) ds \end{aligned} \quad (48)$$

通过观察方程(46)~方程(48),应力场、电位移场和磁通量的奇异部分可分别表示为( $x < l$ )

$$\begin{cases} = -\frac{c_{44}}{n=1} b_n G_n H_n(x), & D = -\frac{e_{15}}{n=1} b_n G_n H_n(x), \\ B = -\frac{q_{15}}{n=1} b_n G_n H_n(x), \end{cases} \quad (49)$$

这里  $H_n(x) = (-1)^{n-1} l^{2n-1} \sqrt{x^2 - l^2} [x + \sqrt{x^2 - l^2}]^{2n-1}$   
 可得应力强度因子  $K$  为

$$K = \lim_{x \rightarrow l^-} \sqrt{2(x-l)} = -\frac{2c_{44}}{\sqrt{l}} \frac{J}{6} b_n \frac{\#(2n-1/2)\#}{(2n-2)!} \quad (50)$$

可得电位移强度因子  $K^D$  为

$$K^D = \lim_{xy \rightarrow l^+} \sqrt{2(x-l)} \#D = -\frac{2e_{15}}{\sqrt{pl}} \frac{J}{6} b_n \frac{\#(2n-1/2)\#}{(2n-2)!} = \frac{e_{15}}{c_{44}} K \# \quad (51)$$

可得磁通量强度因子  $K^B$  为

$$K^B = \lim_{xy \rightarrow l^+} \sqrt{2(x-l)} \#B = -\frac{2q_{15}}{\sqrt{pl}} \frac{J}{6} b_n \frac{\#(2n-1/2)\#}{(2n-2)!} = \frac{q_{15}}{c_{44}} K \# \quad (52)$$

#### 4 数值计算和讨论

从文献[13]和文献[14]中的研究结果可知,可以利用 Schmidt 方法来求解方程(45),且选取级数的前10项就可以满足有关精度,在  $-l \leq x \leq l, y=0$  上,  $S_y^{(1)}/S_0$  非常接近于  $-1$ ,这也证明了本文的解满足边界条件# 有关材料性质假设为  $c_{44} = 44.0 \text{ GPa}$ ,  $e_{15} = 5.8 \text{ C/m}^2$ ,  $E_{11} = 5.64 \times 10^9 \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ ,  $q_{15} = 275.0 \text{ N/Am}$ ,  $d_{11} = 0.005 \times 10^{-9} \text{ Ns/VC}$ ,  $L_{11} = -297.0 \times 10^{-6} \text{ Ns}^2/\text{C}^2$ ,  $Q = 1500 \text{ kg/m}^3$  有关数值结果由图2至图6表示出来#

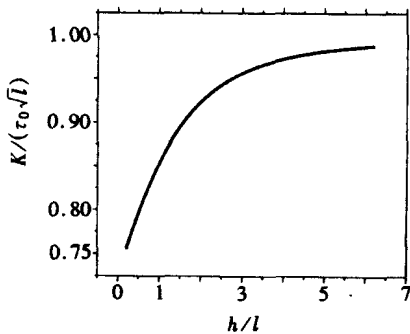


图2 应力强度因子随  $h/l$  的变化情况 ( $Xl/c = 0$ )

从这些图中结果可以得出如下结论

( ) 动应力强度因子、电位移强度因子和磁通量强度因子,不仅与裂纹长度、平行裂纹间距、波速和入射波频率有关,而且还与材料性质有关# 对于压电磁复合材料中裂纹对反平面剪切简谐波的散射问题,其动应力奇异性与一般的弹性材料中裂纹对反平面剪切简谐波的散射问题的动应力奇异性相同,其电、磁、力耦合性能可以从方程(50)~方程(52)看出#

( ) 如图2~图5所示,两平行裂纹之间的相互作用随裂纹间的距离增加而减小,这是通称的屏蔽效应<sup>[15]</sup>,而对于电位移和磁通量强度因子,如图3~图5所示,它们有与应力相同的变化趋势,只是数值不同,

且他们的幅值非常小#

( ) 如图6所示,动应力强度因子将随着入射波频率的增加而增加,进而在  $Xl/c = 0.6$  时,达到最大值,随后随入射波频率的增加而减小# 但当  $Xl/c > 2.0$  时,动应力强度因子又将随着入射波频率的增加而缓慢增加,这可能是由于电、磁、力的耦合作用或高的入射波频率作用的结果#

( ) 当  $Xl/c = 0$  时,本文的解可以返回到静态问题的解,从图2中的结果中可以看出,应

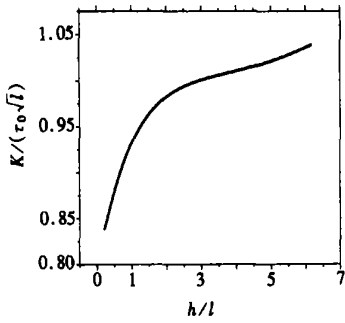


图3 应力强度因子随  $h/l$  的变化情况 ( $\omega l/c = 0.4$ )

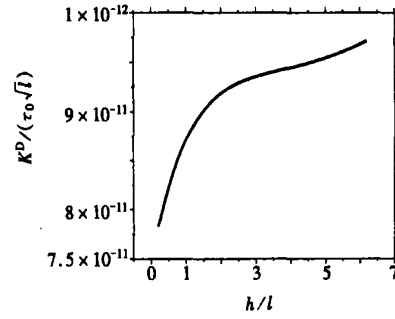


图4 电位移强度因子随  $h/l$  的变化情况 ( $\omega l/c = 0.4$ )

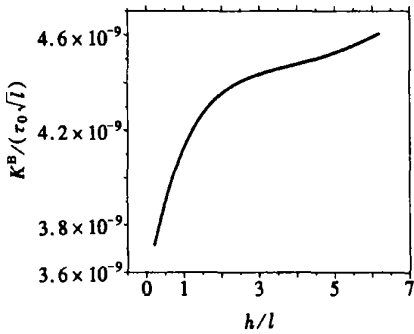


图5 磁通量强度因子随  $h/l$  的变化情况 ( $\omega l/c = 0.4$ )

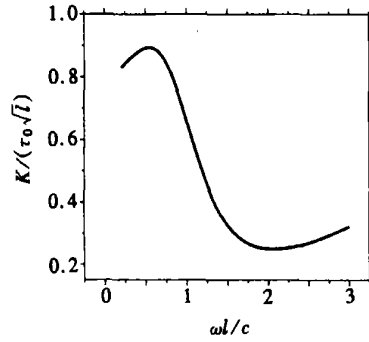


图6 应力强度因子随  $\omega l/c$  的变化情况 ( $h/l = 0.5$ )

力强度因子的静态解当  $h/l > 5.5$  时趋于  $1\#$  这与一般弹性材料中的反平面剪切断裂问题的结果一样#

[参 考 文 献]

[1] Wu T L, Huang J H. Closed\_form solutions for the magnetolectric coupling coefficients in fibrous composites with piezoelectric and piezomagnetic phases[J]. International Journal of Solids and Structures, 2000, 37(21): 2981) 3009.

[2] Sih G C, Song Z F, Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO<sub>3</sub>-CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> composite[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2003, 39(3):209) 227.

[3] Wang B L, Mai Y W. Crack tip field in piezoelectric/ piezomagnetic media[J]. European Journal of Mechanics A/Solid, 2003, 22(4): 591) 602.

[4] Gao C F, Tong P, Zhang T Y. Interfacial crack problems in magneto\_electroelastic solids[J]. International Journal of Engineering Science, 2003, 41(18): 2105) 2121.

[5] Liu J X, Liu X L, Zhao YB. Green's functions for anisotropic magnetoelastoelectric solids with an elliptical cavity or a crack[J]. International Journal of Engineering Science, 2001, 39(12): 1405) 1418.

[6] Gao C F, Kessler H, Balke H. Crack problems in magnetoelastoelectric solids, Part : exact solution of a crack[J]. International Journal of Engineering Science, 2003, 41(9): 969) 981.

[7] Wang B L, Mai Y W. Fracture of piezoelectromagnetic materials[J]. Mechanics Research Communications, 2004, 31(1): 65) 73.

- [8] Van Suchtelen J. Product properties: a new application of composite materials[J]. Phillips Research Reports, 1972, 27(1): 28) 37.
- [9] Morse P M, Feshbach H. Methods of Theoretical Physics [M]. New York: McGraw\_Hill, 1958, 926) 940.
- [10] Soh A K, Fang D N, Lee K L. Analysis of a bi\_piezoelectric ceramic layer with an interfacial crack subjected to anti\_plane shear and in\_plane electric loading[J]. European Journal of Mechanics. A/ Solid, 2000, 19(10): 961) 977.
- [11] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integrals, Series and Products[M]. New York: Academic Press, 1980, 1035) 1037.
- [12] Erdelyi A. Tables of Integral Transforms [M]. New York: McGraw\_Hill, 1954, 34) 89.
- [13] 周振功, 王彪. 双N\_型裂纹断裂动力学问题的非局部理论解[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(7): 682) 690.
- [14] 周振功, 王彪. 压电材料中两平行对称可导通裂纹断裂性能分析[J]. 应用数学和力学, 2002, 23(12): 1211) 1219.
- [15] Ratwani M, Gupta G D. Interaction between parallel cracks in layered composites[J]. International Journal of Solids and Structures, 1974, 10(7): 701) 708.

D y n a m i c B e h a v i o r o f T w o P a r a l l e l S y m m e t r y C r a c k s i n  
M a g n e t o \_ E l e c t r o \_ E l a s t i c C o m p o s i t e s U n d e r H a r m o n i c  
A n t i \_ P l a n e W a v e s

ZHOU Zhen\_gong<sup>1</sup>, WANG Biao<sup>2</sup>

(1. Center for Composite Materials, Harbin Institute of Technology,  
Harbin 150001, P. R. China;  
2. School of Physics and Engineering, Sun Yat\_Sen University,  
Guangzhou 510275, P. R. China)

Abstract: The dynamic behavior of two parallel symmetry cracks in magneto\_electro\_elastic composites under harmonic anti\_plane shear waves is studied by Schmidt method. By using the Fourier transform, the problem can be solved with a pair of dual integral equations in which the unknown variable is the jumps of the displacements across the crack surfaces. To solve the dual integral equations, the jumps of the displacements across the crack surface were expanded in a series of Jacobi polynomials. The relations among the electric field, the magnetic flux and the stress field were obtained. From the results, it can be obtained that the singular stresses in piezoelectric/ piezomagnetic materials carry the same forms as those in a general elastic material for the dynamic anti\_plane shear fracture problem. The shielding effect of two parallel cracks was also discussed.

Key words: magneto\_electro\_elastic composites; crack; harmonic waves; dual integral equations; intensity factor