

三维非线性对流扩散问题的数值方法 在渗流力学的应用*

袁益让¹, 杜 宁¹, 王文治¹, 程爱杰¹, 韩玉笈²

(1. 山东大学 数学研究所, 济南, 250100;

2. 胜利石油管理局物探研究院, 山东 东营 257022)

(林建忠推荐)

摘要: 对三维非线性对流扩散问题提出一类适合并行计算的二阶迎风分数步差分格式, 采用分数步技术, 将三维问题化为连续解 3 个一维问题计算。利用变分形式、能量方法、差分算子乘积交换性、高阶差分算子的分解、微分方程先验估计的理论和技巧, 得到收敛性的最佳阶的误差估计。该方法已成功的应用油资源运移聚集渗流力学数值模拟计算、海水入侵预测和防治的工程实践中。

关键词: 非线性对流扩散; 渗流力学; 迎风分数步; 差分方法; 收敛性;
油资源数值模拟

中图分类号: O241.82 文献标识码: A

引 言

本文研究三维非线性对流扩散问题的数值方法, 提出一类迎风分数步差分格式, 作出了收敛性分析, 并将其成功应用于油资源运移聚集渗流力学的数值模拟中。我们研究下述一类三维对流扩散的初边值问题^[1~5]:

$$\Phi_1(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a}(x, y, z) \cdot \nabla u - \nabla \cdot (K_1(x, y, z, u) \nabla u) = f(x, y, z, t, u) \quad (x, y, z)^T \in \Omega, t \in J = (0, T], \quad (1)$$

此处 Ω 为三维空间有界区域, $\partial\Omega$ 为 Ω 的边界。

初始条件

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z) \quad (x, y, z)^T \in \Omega \quad (2)$$

边界条件是第一型的(狄义赫利条件)

$$u(x, y, z, t) |_{z=\partial\Omega} = \varphi(x, y, z, t) \quad (x, y, z)^T \in \partial\Omega, t \in J \quad (3)$$

在渗流力学上, 待求函数 $u(x, y, z, t)$ 为位势函数, ∇u 为达西速度, $\Phi(x, y, z)$ 为孔隙度函

* 收稿日期: 2004_10_18; 修订日期: 2006_01_18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10370252; 10271066); 国家重点基础研究专项经费资助项目(G19990328); 国家攻关基金资助项目(20050200069); 国家教育部博士点基金资助项目(20030422047)

作者简介: 袁益让(1935—), 男, 教授(联系人, Tel: + 86_531_88364732; Fax: + 86_531_88564652; E_mail: yryuan@sdu.edu.cn)。

数 $K(x, y, z, u, t)$ 为渗透率函数, $\mathbf{a}(x, y, z, t) = (a_1(x, y, z, t), a_2(x, y, z, t), a_3(x, y, z, t))^T$ 为对流系数, $f(x, y, z, t, u)$ 为产量项。

对于对流扩散问题已有 Douglas 和 Russell 的著名特征差分方法工作^[6, 7], 它克服经典方法可能出现数值解的振荡和失真^{[1], [8, 9]}, 解决了用差分方法处理以对流为主的对流扩散问题。但特征差分方法有着边界条件带来的计算复杂性^{[1], [7]}, Ewing, Lazarov 等提出迎风差分格式来解决这类问题^[10, 11], 但他们仅研究了典型的线性抛物问题。对于三维非线性大规模科学与工程计算(节点个数可多达数万乃至数 10 万个)仍不能解决实际计算问题。本文从地下渗流计算的实际问题出发, 研究三维非线性地下渗流的对流扩散问题的大规模数值模拟计算, 提出适合并行计算的二阶耦合迎风分数步差分格式, 采用分数步技术, 将三维问题化为连续解 3 个一维问题计算^{[8, 9], [12]}, 使得大规模科学与工程实际计算成为可能。我们利用变分形式、能量方法、差分算子乘积交换性、高阶差分算子的分解、微分方程先验估计的理论和技巧, 得到收敛性的最佳阶 l^2 误差估计, 成功的解决这一著名问题。本文的方法已成功应用到三维油资源运移聚集数值模拟计算、海水入侵预测和防治的工程实践中^{①②}。

通常问题是正定的, 即满足

$$0 < \Phi_* \leq \Phi(x, y, z) \leq \Phi^*, \quad 0 < K_* \leq K(x, y, z, t, u) \leq K^*, \quad (4a)$$

$$\left| \frac{\partial K(u)}{\partial u} \right| \leq K^*, \quad (4b)$$

此处 Φ_* 、 Φ^* 、 K_* 、 K^* 均为正常数。

假定问题(1)~(4)的精确解是正则的, 即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^\infty(L^\infty(\Omega)), \quad u \in L^\infty(W^{4,\infty}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(W^{1,\infty}(\Omega)), \quad (5)$$

且 $f(x, y, z, t, u)$ 在解的 ε_0 -邻域满足 Lipschitz 连续条件, 即存在常数 M , 当 $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon_0 (1 \leq i \leq 2)$, 时有

$$|f(u(x, y, z, t) + \varepsilon_1) - f(u(x, y, z, t) + \varepsilon_2)| \leq M |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|, \quad (x, y, z, t) \in \Omega_1 \times J. \quad (6)$$

本文中记号 M 和 ε 分别表示普通的正常数和普通小的正数, 在不同处有不同的含意。

1 迎风分数步差分格式

为了用差分方法求解, 我们用网格区域 Ω_h 代替区域 Ω , 如图 1 所示。在空间 (x, y, z) 取步长 h_1, h_2 和 $h_3, x_i = ih_1, y_j = jh_2, z_k = kh_3$,

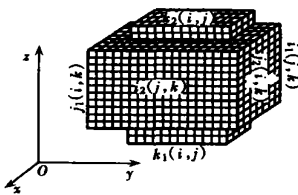


图 1 网格 Ω_h 示意图

$$\Omega_h = \left\{ (x_i, y_j, z_k) \left| \begin{array}{l} i_1(j, k) < i < i_2(j, k) \\ j_1(i, k) < j < j_2(i, k) \\ k_1(i, j) < k < k_2(i, j) \end{array} \right. \right\},$$

用整数 $\partial \Omega_h$ 表示 Ω_h 的边界。记 $X_{ijk} = (ih_1, jh_2, kh_3)^T, t^n = n \Delta t, U(X_{ijk}, t^n) = U_{ijk}^n$ 。记 $\delta_x, \delta_y, \delta_z, \delta_x^-, \delta_y^-, \delta_z^-$ 分别为

x, y 和 z 方向的向前、向后差分算子, $d_i U_{ijk}^n$ 为网格函数 U_{ijk}^n 在 $t = t^n$ 的向前差商。

① 山东大学数学研究所, 胜利油田计算中心: 油资源运移聚集定量数值模拟技术研究, 1996, 6

② 山东大学研究所: 防治海水入侵主要工程后效及调控模式研究, 1996, 10

记

$$K(U^n)_{i+1/2,jk} = [K(x_i, y_j, z_k, U_{ijk}^n) + K(x_{i+1}, y_j, z_k, U_{i+1,jk}^n)]/2, \quad (7a)$$

$$K(U^n)_{i,j+1/2,k} = [K(x_i, y_j, z_k, U_{ijk}^n) + K(x_i, y_{j+1}, z_k, U_{i,j+1,k}^n)]/2, \quad (7b)$$

$$K(U^n)_{ij,k+1/2} = [K(x_i, y_j, z_k, U_{ijk}^n) + K(x_i, y_j, z_{k+1}, U_{ij,k+1}^n)]/2. \quad (7c)$$

设

$$\delta_x(K(U^n) \delta_x u^{n+1})_{\bar{y}k} = h_1^{-2} [K(U^n)_{i+1/2,jk} (u_{i+1,jk}^{n+1} - u_{\bar{y}k}^{n+1}) - K(U^n)_{i-1/2,jk} (u_{\bar{y}k}^{n+1} - u_{i-1,jk}^{n+1})], \quad (8a)$$

$$\delta_y(K(U^n) \delta_y u^{n+1})_{\bar{y}k} = h_2^{-2} [K(U^n)_{i,j+1/2,k} (u_{i,j+1,k}^{n+1} - u_{\bar{y}k}^{n+1}) - K(U^n)_{i,j-1/2,k} (u_{\bar{y}k}^{n+1} - u_{i,j-1,k}^{n+1})], \quad (8b)$$

$$\delta_z(K(U^n) \delta_z u^{n+1})_{\bar{y}k} = h_3^{-2} [K(U^n)_{\bar{y},k+1/2} (u_{\bar{y},k+1}^{n+1} - u_{\bar{y}k}^{n+1}) - K(U^n)_{\bar{y},k-1/2} (u_{\bar{y}k}^{n+1} - u_{\bar{y},k-1}^{n+1})], \quad (8c)$$

$$\begin{aligned} \delta_x(K(U^n) \delta_x u^{n+1})_{\bar{y}k} + \delta_y(K(U^n) \delta_y u^{n+1})_{\bar{y}k} + \delta_z(K(U^n) \delta_z u^{n+1})_{\bar{y}k} \\ \delta_x(K(U^n) \delta_x u^{n+1})_{ijk} + \delta_y(K(U^n) \delta_y u^{n+1})_{ijk} + \delta_z(K(U^n) \delta_z u^{n+1})_{ijk} \end{aligned} \quad (8d)$$

1.1 迎风分数步差分格式I

方程(1)可近似分裂为

$$\begin{aligned} \Phi_{ijk} \frac{U_{ijk}^{n+1/3} - U_{ijk}^n}{\Delta t} = \left[1 + \frac{h_1}{2} | a_1^n | K^{-1}(U^n) \right]_{\bar{y}k}^{-1} \delta_x(K(U^n) \delta_x U^{n+1/3})_{\bar{y}k} + \\ \left\{ 1 + \frac{h_2}{2} | a_2^n | K^{-1}(U^n) \right\}_{\bar{y}k}^{-1} \delta_y(K(U^n) \delta_y U^n)_{\bar{y}k} + \\ \left\{ 1 + \frac{h_3}{2} | a_3^n | K^{-1}(U^n) \right\}_{\bar{y}k}^{-1} \delta_z(K(U^n) \delta_z U^n)_{\bar{y}k} - \\ \delta_{a_1^n, U^n, x} U_{ijk}^n - \delta_{a_2^n, U^n, y} U_{ijk}^n - \delta_{a_3^n, U^n, z} U_{ijk}^n + f(X_{ijk}, t^n, U_{ijk}^n), \\ i_1(i, k) < i < i_2(j, k), \end{aligned} \quad (9a)$$

$$U_{ijk}^{n+1/3} = \varphi_{ijk}^{n+1}, \quad X_{\bar{y}k} \in \partial \Omega_h, \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ijk} \frac{U_{ijk}^{n+2/3} - U_{ijk}^{n+1/3}}{\Delta t} = \left[1 + \frac{h_2}{2} | a_2^n | K^{-1}(U^n) \right]_{\bar{y}k}^{-1} \delta_y(K(U^n) \delta_y (U^{n+2/3} - U^n))_{\bar{y}k}, \\ j_1(i, k) < j < j_2(j, k), \end{aligned} \quad (10a)$$

$$U_{ijk}^{n+2/3} = \varphi_{ijk}^{n+1}, \quad X_{\bar{y}k} \in \partial \Omega_h, \quad (10b)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ijk} \frac{U_{ijk}^{n+1} - U_{ijk}^{n+2/3}}{\Delta t} = \left[1 + \frac{h_3}{2} | a_3^n | K^{-1}(U^n) \right]_{\bar{y}k}^{-1} \delta_z(K(U^n) \delta_z (U^{n+1} - U^n))_{\bar{y}k}, \\ k_1(i, j) < k < k_2(i, j), \end{aligned} \quad (11a)$$

$$U_{ijk}^{n+1} = \varphi_{ijk}^{n+1}, \quad X_{\bar{y}k} \in \partial \Omega_h. \quad (11b)$$

此处

$$\begin{aligned} \delta_{a_1^n, U^n, x} u_{ijk} = a_1^n |_{ijk} [H(a_1^n |_{ijk}) K_1(U^n)_{ijk}^{-1} \cdot K_1(U^n)_{i-1/2,jk} \delta_x + \\ (1 - H(a_1^n |_{ijk})) K_1(U^n)_{ijk}^{-1} \cdot K_1(U^n)_{i+1/2,jk} \delta_x] u_{ijk}, \end{aligned}$$

$$H(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

$\delta_{a_2^n, U^n, y} u_{ijk}$ 、 $\delta_{a_3^n, U^n, z} u_{ijk}$ 的定义是类似的。

初始逼近

$$U_{ijk}^n = u_0(X_{ijk}), \quad X_{ijk} \in \partial \Omega_h \tag{12}$$

差分格式(9)、(10)和(11)的计算程序是:若已知时刻 $t = t^n$ 的差分解 $\{U_{ijk}^n\}$ 时,寻求下一时刻 $t = t^{n+1}$ 的 $\{U_{ijk}^{n+1}\}$ 。首先由(9a)、(9b)用追赶法求出过渡层的解 $\{U_{ijk}^{n+1/3}\}$,再由(10a)、(10b)求出 $\{U_{ijk}^{n+2/3}\}$,以后再由(11a)、(11b)求出 $\{U_{ijk}^{n+1}\}$ 。由正定性条件(4),此差分解存在且唯一。

1.2 迎风分数步差分格式 II

$$\begin{aligned} \Phi_{ijk} \frac{U_{ijk}^{n+1/3} - U_{ijk}^n}{\Delta t} &= \left[1 + \frac{h_1}{2} | a_1^n | K^{-1}(U^n) \right]_{ijk}^{-1} \delta_x(K(U^n) \delta_x U^{n+1/3})_{ijk} + \\ &\left[1 + \frac{h_2}{2} | a_2^n | K^{-1}(U^n) \right]_{\bar{y}k}^{-1} \delta_y(K(U^n) \delta_y U^n)_{\bar{y}k} + \\ &\left[1 + \frac{h_3}{2} | a_3^n | K^{-1}(U^n) \right]_{\bar{y}k}^{-1} \delta_z(K(U^n) \delta_z U^n)_{ijk} + \\ &f(X_{ijk}, t^n, U_{ijk}^n), \quad i_1(j, k) < i < i_2(j, k), \end{aligned} \tag{13a}$$

$$U_{ijk}^{n+1/3} = \Phi_{ijk}^{n+1}, \quad X_{\bar{y}k} \in \partial \Omega_h, \tag{13b}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ijk} \frac{U_{ijk}^{n+2/3} - U_{ijk}^{n+1/3}}{\Delta t} &= \left[1 + \frac{h_2}{2} | a_2^n | K^{-1}(U^n) \right]_{ijk}^{-1} \delta_y(K(U^n) \delta_y (U^{n+2/3} - U^n))_{ijk}, \\ &j_1(i, k) < j < j_2(i, k), \end{aligned} \tag{14a}$$

$$U_{ijk}^{n+2/3} = \Phi_{ijk}^{n+1}, \quad X_{\bar{y}k} \in \partial \Omega_h. \tag{14b}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ijk} \frac{U_{ijk}^{n+1} - U_{ijk}^{n+2/3}}{\Delta t} &= \left[1 + \frac{h_3}{2} | a_3^n | K^{-1}(U^n) \right]_{\bar{y}k}^{-1} \delta_z(K(U^n) \delta_z (U^{n+1} - U^n))_{ijk} - \\ &\delta_{a_1^n, U^n, x} U_{ijk}^{n+1} - \delta_{a_2^n, U^n, y} U_{ijk}^{n+1} - \delta_{a_3^n, U^n, z} U_{ijk}^{n+1}, \quad k_1(i, j) < k < k_2(i, j), \end{aligned} \tag{15a}$$

$$U_{ijk}^{n+1} = \Phi_{ijk}^{n+1}, \quad X_{ijk} \in \partial \Omega_h. \tag{15b}$$

其计算过程和格式 I 是类似的,不同之处在(13a)的右端没有项 $-\delta_{a_1^n, U^n, x} U_{ijk}^n$ 、 $-\delta_{a_2^n, U^n, y} U_{ijk}^n$ 、 $-\delta_{a_3^n, U^n, z} U_{ijk}^n$,而在(15a)右端,增加了项 $-\delta_{a_1^n, U^n, x} U_{ijk}^{n+1}$ 、 $-\delta_{a_2^n, U^n, y} U_{ijk}^{n+1}$ 、 $-\delta_{a_3^n, U^n, z} U_{ijk}^{n+1}$ 。

2 收敛性分析

为理论分析简便,设 $\Omega = \{(x, y, z) | 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1\}$, $h = 1/N$, $t^n = n \Delta t$ 。定义网络函数空间 H_h 的内积^[13~15]。对三维网格区域

$$\begin{aligned} (\omega, x) &= \sum_{i,j,k=1}^{N-1} \omega_{ijk} x_{ijk} h^3, \quad (\omega, x]_1 = \sum_{j,k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^N \omega_{ijk} x_{ijk} h^3, \\ (\omega, x]_2 &= \sum_{i,k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \omega_{ijk} x_{ijk} h^3, \quad (\omega, x]_3 = \sum_{i,j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^N \omega_{ijk} x_{ijk} h^3, \quad \forall \omega, x \in H_h, \end{aligned}$$

其相应的范数为

$$\begin{aligned} \|\omega^p\| &= \left[\sum_{i,j,k=1}^N (\omega_{ijk}^p)^2 h^3 \right]^{1/2}, \quad \|\delta_x \omega^p\| = \left[\sum_{j,k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^N (\delta_x \omega_{ijk}^p)^2 h^3 \right]^{1/2}, \\ \|\delta_y \omega^p\| &= \left[\sum_{i,k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N (\delta_y \omega_{ijk}^p)^2 h^3 \right]^{1/2}, \quad \|\delta_z \omega^p\| = \left[\sum_{i,j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^N (\delta_z \omega_{ijk}^p)^2 h^3 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

首先对格式(9)~(11)进行收敛性分析,记 u 为问题(1)~(3)的精确解, U 为格式(9)~(11)差分解。记误差函数 $\xi = u - U$, 方程式(9)~(11)消去 $U^{n+1/3}$, $U^{n+2/3}$ 可得下述等价方程

$$\Phi_{ijk} \frac{U_{ijk}^{n+1} - U_{ijk}^n}{\Delta t} - \left\{ \left[1 + \frac{h}{2} | a_1^n | K^{-1}(U^n) \right]_{ijk}^{-1} \delta_x(K(U^n) \delta_x)_{ijk} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ 1 + \frac{h}{2} \frac{|a_2^n|}{K(U^n)} \right\}_{\bar{y}k}^{-1} \delta_y(K(U^n) \delta_y)_{\bar{y}k} + \left\{ 1 + \frac{h}{2} \frac{|a_3^n|}{K(U^n)} \right\}_{\bar{y}k}^{-1} \delta_z(K(U^n) \delta_z)_{\bar{y}k} \Big\} U_{ijk}^{n+1} = \\
 & - \delta_{a_1^n, U^n, x} U_{ijk}^n - \delta_{a_2^n, U^n, y} U_{ijk}^n - \delta_{a_3^n, U^n, z} U_{ijk}^n + f(X_{ijk}, t^n, U_{ijk}^n) - \\
 & (\Delta t)^2 \left\{ \left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_1^n|}{K(U^n)} \right]_{ijk}^{-1} \delta_x(K(U^n) \delta_x) \left[\Phi^1 \left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_2^n|}{K(U^n)} \right]^{-1} \delta_y(K(U^n) \delta_y d_t U^n) \cdot \right]_{ijk} + \right. \\
 & \left. \left\{ 1 + \frac{h}{2} \frac{|a_1^n|}{K(U^n)} \right\}_{\bar{y}k}^{-1} \delta_x(K(U^n) \delta_x) \left[\Phi^1 \left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_3^n|}{K(U^n)} \right]^{-1} \delta_z(K(U^n) \delta_z d_t U^n) \cdot \right]_{\bar{y}k} + \right. \\
 & \left. \left\{ 1 + \frac{h}{2} \frac{|a_2^n|}{K(U^n)} \right\}_{\bar{y}k}^{-1} \delta_y(K(U^n) \delta_y) \left[\Phi^1 \left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_3^n|}{K(U^n)} \right]^{-1} \delta_z(K(U^n) \delta_z d_t U^n) \cdot \right]_{\bar{y}k} \right\} + \\
 & (\Delta t)^3 \left\{ 1 + \frac{h}{2} \frac{|a_1^n|}{K(U^n)} \right\}_{ijk}^{-1} \delta_x(K(U^n) \delta_x) \left[\Phi^1 \left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_2^n|}{K(U^n)} \right]^{-1} \delta_y(K(U^n) \times \right. \\
 & \left. \delta_y \left[\Phi^1 \left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_3^n|}{K(U^n)} \right]^{-1} \delta_z(K(U^n) \delta_z d_t U^n) \dots \right]_{ijk} \right], \quad i \leq i, j, k \leq N-1, \quad (16a)
 \end{aligned}$$

$$U_{ijk}^{n+1} = \varphi_{ijk}^{n+1}, \quad X_{ijk} \in \partial \Omega. \quad (16b)$$

由方程(1) ($t = t^{n+1}$) 和(16), 可得下述误差方程

$$\begin{aligned}
 \Phi_{ijk} \frac{\xi_{ijk}^{n+1} - \xi_{ijk}^n}{\Delta t} - & \left\{ \left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_1^n|}{K(U^n)} \right]_{\bar{y}k}^{-1} \delta_x(K(U^n) \delta_x \xi^{n+1})_{\bar{y}k} + \right. \\
 & \left. \left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_1^n|}{K(U^n)} \right]_{\bar{y}k}^{-1} \delta_x([K(u^{n+1}) - K(U^n)] \delta_x u^{n+1})_{\bar{y}k} + \right. \\
 & \left. \left[\left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_1^{n+1}|}{K(u^{n+1})} \right]_{\bar{y}k}^{-1} - \left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_1^n|}{K(U^n)} \right]_{\bar{y}k}^{-1} \right] \delta_x(K(u^{n+1}) \delta_x u^{n+1})_{\bar{y}k} \right\} - \\
 & \left\{ \left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_2^n|}{K(U^n)} \right]_{ijk}^{-1} \delta_y(K(U^n) \delta_y \xi^{n+1})_{ijk} + \dots \right\} - \\
 & \left\{ \left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_3^n|}{K(U^n)} \right]_{ijk}^{-1} \delta_z(K(U^n) \delta_z \xi^{n+1})_{ijk} + \dots \right\} = \\
 & [\delta_{a_1^n, U^n, x} U_{ijk}^n - \delta_{a_1^{n+1}, u^{n+1}, x} u_{ijk}^{n+1}] + [\delta_{a_2^n, U^n, y} U_{ijk}^n - \delta_{a_2^{n+1}, u^{n+1}, y} u_{ijk}^{n+1}] + \\
 & [\delta_{a_3^n, U^n, z} U_{ijk}^n - \delta_{a_3^{n+1}, u^{n+1}, z} u_{ijk}^{n+1}] + f(X_{ijk}, t^{n+1}, u_{ijk}^{n+1}) - f(X_{ijk}, t^n, U_{ijk}^n) - \\
 & (\Delta t)^2 \left\{ \left[\left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_1^{n+1}|}{K(u^{n+1})} \right]_{\bar{y}k}^{-1} \delta_x(K(u^{n+1}) \delta_x) \left[\Phi^1 \left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_2^{n+1}|}{K(u^{n+1})} \right]^{-1} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \delta_y(K(u^{n+1}) \delta_y d_t u^n) \right]_{ijk} - \left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_1^n|}{K(U^n)} \right]_{ijk}^{-1} \delta_x(K(U^n) \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \delta_x \left[\Phi^1 \left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_2^n|}{K(U^n)} \right]^{-1} \delta_y(K(U^n) \delta_y d_t U^n) \cdot \right]_{ijk} \right] \right\} + \\
 & \left[\left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_2^{n+1}|}{K(u^{n+1})} \right]_{\bar{y}k}^{-1} \delta_x(K(u^{n+1}) \delta_x) \left[\Phi^1 \left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_3^{n+1}|}{K(u^{n+1})} \right]^{-1} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \delta_z(K(u^{n+1}) \delta_z d_t u^n) \right]_{\bar{y}k} - \dots \right] + \left[\left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_2^n|}{K(U^n)} \right]_{\bar{y}k}^{-1} \delta_y(K(U^n) \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \delta_y \left[\Phi^1 \left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_3^n|}{K(U^n)} \right]^{-1} \delta_z(K(U^n) \delta_z d_t U^n) \cdot \right]_{\bar{y}k} - \dots \right] \right\} + \\
 & (\Delta t)^3 \left\{ \left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_1^{n+1}|}{K(u^{n+1})} \right]_{ijk}^{-1} \delta_x(K(u^{n+1}) \delta_x) \left[\Phi^1 \left[1 + \frac{h}{2} \frac{|a_2^{n+1}|}{K(u^{n+1})} \right]^{-1} \times \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta_y(K(u^{n+1})) \Big\} \delta_x \left[\Phi^{-1} \left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_3^{n+1}|}{K(u^{n+1})} \right)^{-1} \delta_x(K(u^{n+1}) \delta_x u^n) \cdot \right]_{ijk} - \\ & \left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_1^n|}{K(U^n)} \right)^{-1} \delta_x(K(U^n)) \delta_x \left[\Phi^{-1} \left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_2^n|}{K(U^n)} \right)^{-1} \delta_y(K(U^n)) \cdot \right] \times \\ & \delta_y \left[\Phi^{-1} \left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_3^n|}{K(U^n)} \right)^{-1} \delta_x(K(U^n)) \delta_x d_t U^n \right]_{ijk} \Big\} + \varepsilon_{ijk}^{n+1}, \\ & 1 \leq i, j, k \leq N-1, \end{aligned} \tag{17a}$$

$$\xi^{n+1} = 0, \quad X_{ijk} \in \partial \Omega, \tag{17b}$$

此处 $|\varepsilon_{ijk}^{n+1}| \leq M(\Delta t + h^2)$.

对误差方程(17)乘以 $2\Delta t \xi_{ijk}^{n+1}$ 在 Ω_i 上作内积, 并分步求和可得

$$\begin{aligned} & \left\{ \|\Phi^{1/2} \xi^{n+1}\|^2 - \|\Phi^{1/2} \xi^n\|^2 \right\} + (\Delta t)^2 \|\Phi^{1/2} d_t \xi^n\|^2 + \\ & 2\Delta t \left\{ \langle K(U^n) \delta_x \xi^{n+1}, \delta_x \left[\left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_1^n|}{K(U^n)} \right)^{-1} \xi^{n+1} \right] \rangle + \right. \\ & \left. \langle [K(u^{n+1}) - K(U^n)] \delta_x u^{n+1}, \delta_x \left[\left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_1^n|}{K(U^n)} \right)^{-1} \xi^{n+1} \right] \rangle + \right. \\ & \left. \left\langle \left[\left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_1^{n+1}|}{K(u^{n+1})} \right)^{-1} - \left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_1^n|}{K(U^n)} \right)^{-1} \right] \delta_x(K(u^{n+1}) \delta_x u^{n+1}), \xi^{n+1} \right\rangle \right\} + \\ & 2\Delta t \left\{ \langle K(U^n) \delta_y \xi^{n+1}, \delta_y \left[\left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_2^n|}{K(U^n)} \right)^{-1} \xi^{n+1} \right] \rangle + \dots \right\} + \\ & 2\Delta t \left\{ \langle K(U^n) \delta_x \xi^{n+1}, \delta_x \left[\left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_3^n|}{K(U^n)} \right)^{-1} \xi^{n+1} \right] \rangle + \dots \right\} = \\ & - 2\Delta t \left\{ \langle \delta_{a_1^n, u^n, x} \xi^n, \xi^{n+1} \rangle + \langle [\delta_{a_1^{n+1}, u^{n+1}, x} - \delta_{a_1^n, u^n, x}] u^{n+1}, \xi^{n+1} \rangle + \right. \\ & \left. \langle \delta_{a_1^n, u^n, x} [u^{n+1} - u^n], \xi^{n+1} \rangle \right\} - 2\Delta t \left\{ \langle \delta_{a_2^n, u^n, y} \xi^n, \xi^{n+1} \rangle + \dots \right\} - \\ & 2\Delta t \left\{ \langle \delta_{a_3^n, u^n, z} \xi^n, \xi^{n+1} \rangle + \dots \right\} + 2\Delta t \langle f(X, t^{n+1}, u^{n+1}) - f(X, t^n, U^n), \xi^{n+1} \rangle - \\ & 2(\Delta t)^2 \left\{ \left\langle \left[\left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_1^{n+1}|}{K(u^{n+1})} \right)^{-1} \delta_x(K(u^{n+1})) \delta_x \left[\Phi^{-1} \left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_2^{n+1}|}{K(u^{n+1})} \right)^{-1} \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \delta_y(K(u^{n+1}) \delta_x d_t u^n) \cdot \right] - \left[\left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_1^n|}{K(U^n)} \right)^{-1} \delta_x(K(U^n)) \delta_x \left[\Phi^{-1} \left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_2^n|}{K(U^n)} \right)^{-1} \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \delta_y(K(U^n) \delta_x d_t u^n) \cdot \right] \right], \xi^{n+1} \right\rangle + \left\langle \left[\left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_2^{n+1}|}{K(u^{n+1})} \right)^{-1} \delta_x(K(u^{n+1})) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \delta_x \left[\Phi^{-1} \left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_3^{n+1}|}{K(u^{n+1})} \right)^{-1} \delta_x(K(u^{n+1}) \delta_x d_t u^n) \cdot \right] - \dots \right], \xi^{n+1} \right\rangle + \\ & \left\langle \left[\left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_2^{n+1}|}{K(u^{n+1})} \right)^{-1} \delta_y(K(u^{n+1})) \delta_y \left[\Phi^{-1} \left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_3^{n+1}|}{K(u^{n+1})} \right)^{-1} \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \delta_x(K(u^{n+1}) \delta_x d_t u^n) \cdot \right] - \dots \right], \xi^{n+1} \right\rangle + 2(\Delta t)^3 \left\langle \left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_1^{n+1}|}{K(u^{n+1})} \right)^{-1} \times \right. \\ & \left. \delta_x(K(u^{n+1})) \delta_x \left[\Phi^{-1} \left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_2^{n+1}|}{K(u^{n+1})} \right)^{-1} \delta_y(K(u^{n+1})) \delta_y \left[\Phi^{-1} \left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_3^{n+1}|}{K(u^{n+1})} \right)^{-1} \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \delta_x(K(u^{n+1}) \delta_x d_t u^n) \cdot \right] - \left[\left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_1^n|}{K(U^n)} \right)^{-1} \delta_x(K(U^n)) \delta_x \left[\Phi^{-1} \left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_2^n|}{K(U^n)} \right)^{-1} \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \delta_y(K(U^n)) \delta_y \left[\Phi^{-1} \left(1 + \frac{h}{2} \frac{|a_3^n|}{K(U^n)} \right)^{-1} \delta_x(K(U^n) \delta_x d_t U^n) \cdot \right] \right], \xi^{n+1} \right\rangle + \end{aligned}$$

$$2\Delta t \langle \varepsilon^{n+1}, \xi^{n+1} \rangle, \tag{18}$$

现估计(18)左端的第3项, 因为 $K(u)$ 是正定的, 当 h 适当小时有

$$\begin{aligned} & 2\Delta t \left\{ \langle K(U^n) \delta_x \xi^{n+1}, \delta_x \left[\left(1 + \frac{h |a_1^n|}{2K(U^n)} \right)^{-1} \xi^{n+1} \right] \rangle + \right. \\ & \quad \langle [K(u^{n+1}) - K(U^n)] \delta_x u^{n+1}, \delta_x \left[\left(1 + \frac{h |a_1^n|}{2K(U^n)} \right)^{-1} \xi^{n+1} \right] \rangle + \\ & \quad \left. \left\langle \left[\left(1 + \frac{h |a_1^{n+1}|}{2K(u^{n+1})} \right)^{-1} - \left(1 + \frac{h |a_1^n|}{2K(U^n)} \right)^{-1} \right] \delta_x (K(u^{n+1}) \delta_x u^{n+1}), \xi^{n+1} \right\rangle \right\} \geq \\ & \Delta t \|K^{n, V/2} \delta_x \xi^{n+1}\|^2 - M \left\{ \|\xi^{n+1}\|^2 + \|\xi^n\|^2 + (\Delta t)^2 \right\} \Delta t, \end{aligned} \tag{19a}$$

此处 $K^{n, V/2} = K^{V/2}(U^n)$. 对于其余2项亦有类似的估计

$$\begin{aligned} & 2\Delta t \left\{ \langle K(U^n) \delta_y \xi^{n+1}, \delta_y \left[\left(1 + \frac{h |a_2^n|}{2K(U^n)} \right)^{-1} \xi^{n+1} \right] \rangle + \right. \\ & \quad \left. \langle K(U^n) \delta_z \xi^{n+1}, \delta_z \left[\left(1 + \frac{h |a_3^n|}{2K(U^n)} \right)^{-1} \xi^{n+1} \right] \rangle \dots \right\} \geq \\ & \Delta t \left\{ \|K^{n, V/2} \delta_y \xi^{n+1}\|^2 + \|K^{n, V/2} \delta_z \xi^{n+1}\|^2 \right\} - \\ & M \left\{ \|\xi^{n+1}\|^2 + \|\xi^n\|^2 + (\Delta t)^2 \right\} \Delta t. \end{aligned} \tag{19b}$$

对(18)右端诸项有

$$\begin{aligned} & - 2\Delta t \left\{ \langle \delta_{a_1^n, U^n, x} \xi^n, \xi^{n+1} \rangle + \langle \delta_{a_2^n, U^n, y} \xi^n, \xi^{n+1} \rangle + \langle \delta_{a_3^n, U^n, z} \xi^n, \xi^{n+1} \rangle + \dots \right\} \leq \\ & \left\{ \|\delta_x \xi^n\|^2 + \|\delta_y \xi^n\|^2 + \|\delta_z \xi^n\|^2 \right\} \Delta t + \\ & M \left\{ \|\xi^{n+1}\|^2 + \|\xi^n\|^2 + (\Delta t)^2 \right\}, \end{aligned} \tag{20a}$$

$$\begin{aligned} & 2\Delta t \left\{ \langle f(X, t^{n+1}, u^{n+1}) - f(X, t^n, U^n), \xi^{n+1} \rangle + \langle \varepsilon^{n+1}, \xi^{n+1} \rangle \right\} \leq \\ & M \Delta t \left\{ \|\xi^{n+1}\|^2 + \|\xi^n\|^2 + (\Delta t)^2 \right\}. \end{aligned} \tag{20b}$$

对于(18)右端第5项有

$$\begin{aligned} & - 2(\Delta t)^2 \left\{ \left\langle \left[\left(1 + \frac{h |a_1^{n+1}|}{2K(u^{n+1})} \right)^{-1} \delta_x (K(u^{n+1})) \delta_x \left[\Phi^{-1} \left(1 + \frac{h |a_2^{n+1}|}{2K(u^{n+1})} \right)^{-1} \times \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \delta_y (K(u^{n+1}) \delta_y d_t u^n) \right] - \left[\left(1 + \frac{h |a_1^n|}{2K(U^n)} \right)^{-1} \delta_x (K(U^n)) \times \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \delta_x \left[\Phi^{-1} \left(1 + \frac{h |a_2^n|}{2K(U^n)} \right)^{-1} \delta_y (K(U^n) \delta_y d_t U^n) \right] \right] \right\rangle + \dots \right\} \leq \\ & M (\Delta t)^2 \left\{ \|\delta_x \xi^{n+1}\|^2 + \|\delta_y \xi^{n+1}\|^2 + \|\delta_z \xi^{n+1}\|^2 + \right. \\ & \quad \left. \|\xi^{n+1}\|^2 + \|\xi^n\|^2 + (\Delta t)^2 \right\}. \end{aligned} \tag{21a}$$

对于(18)右端第6项同样有

$$\begin{aligned} & 2(\Delta t)^3 \left\{ \left(1 + \frac{h |a_1^{n+1}|}{2K(u^{n+1})} \right)^{-1} \delta_x (K(u^{n+1})) \delta_x \left[\Phi^{-1} \left(1 + \frac{h |a_2^{n+1}|}{2K(u^{n+1})} \right)^{-1} \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \delta_y (K(u^{n+1}) \delta_y \left[\Phi^{-1} \left(1 + \frac{h |a_3^{n+1}|}{2K(u^{n+1})} \right)^{-1} \delta_z (K(u^{n+1}) \delta_z d_t u^n) \right] \right) \right] - \right. \\ & \quad \left. \left[\left(1 + \frac{h |a_1^n|}{2K(U^n)} \right)^{-1} \delta_x (K(U^n)) \delta_x \left[\Phi^{-1} \left(1 + \frac{h |a_2^n|}{2K(U^n)} \right)^{-1} \delta_y (K(U^n) \times \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \delta_z \left[\Phi^{-1} \left(1 + \frac{h |a_3^n|}{2K(U^n)} \right)^{-1} \delta_z (K(U^n) \delta_z d_t U^n) \right] \right) \right] \right] \right\rangle, \xi^{n+1} \right\} \leq \\ & M (\Delta t)^2 \left\{ \|\delta_x \xi^{n+1}\|^2 + \|\delta_y \xi^{n+1}\|^2 + \|\delta_z \xi^{n+1}\|^2 + \right. \\ & \quad \left. \|\xi^{n+1}\|^2 + \|\xi^n\|^2 + (\Delta t)^2 \right\}, \end{aligned} \tag{21b}$$

组合(18) ~ (21), 并对时间 t 求和 $0 \leq n \leq L$, 注意到 $\xi^0 = 0$, 故有

$$\begin{aligned} & \|\Phi^{1/2}\xi^{L+1}\|^2 + \sum_{n=0}^L \|\Phi^{1/2}d_t\xi^n\|^2 \Delta t + \sum_{n=0}^L \|K^{n,1/2} \delta \xi^{n+1}\|^2 + \\ & \|K^{n,1/2} \delta \xi^{n+1}\|^2 + \|K^{n,1/2} \delta \xi^{n+1}\|^2 \Delta t \leq \\ & M \left\{ \sum_{n=0}^L \|\xi^{n+1}\|^2 \Delta t + (\Delta t)^2 + h^4 \right\}. \end{aligned} \tag{22}$$

应用 Gronwall 引理可得

$$\begin{aligned} & \|\Phi^{1/2}\xi^{L+1}\|^2 + \sum_{n=0}^L \|\Phi^{1/2}d_t\xi^n\|^2 \Delta t + \sum_{n=0}^L \|K^{n,1/2} \delta \xi^{n+1}\|^2 + \\ & \|K^{n,1/2} \delta \xi^{n+1}\|^2 + \|K^{n,1/2} \delta \xi^{n+1}\|^2 \Delta t \leq \\ & M \left\{ (\Delta t)^2 + h^4 \right\}. \end{aligned} \tag{23}$$

定理 假定问题(1) ~ (4) 的精确解满足光滑性条件: $(\partial^2 u / \partial t^2) \in L^\infty(L^\infty(\Omega))$, $u \in L^\infty(W^4, \infty(\Omega)) \cap W^{1, \infty}(W^{1, \infty})$. 采用迎风差分格式(9) ~ (12) 逐层计算, 则下述误差估计式成立

$$\|u - U\|_{L^\infty(J, L^2)} + \|u - U\|_{L^2(J, h^1)} \leq M^* \left\{ \Delta t + h^2 \right\}, \tag{24}$$

此处

$$\|g\|_{L^\infty(J; X)} = \sup_{n \Delta t \in T} \|f^n\|_X, \quad \|g\|_{L^2(J; X)} = \left(\sum_{n=0}^L \|g^n\|_X^2 \Delta t \right)^{1/2},$$

M^* 依赖函数 u 及其导函数.

对于差分格式 II 的分析是类似的, 同样可得误差估计式(24).

3 油资源运移聚集数值模拟的应用

本文所提出的方法, 已成功应用于三维油资源运移聚集数值模拟的生产实践中, 问题的数学模型可写为

$$\dots \left\{ K \frac{kr_o}{\mu_o} \dots \phi_o \right\} + B_o q = - \Phi' \left(\frac{\partial \phi_o}{\partial t} - \frac{\partial \phi_w}{\partial t} \right), \quad X = (x, y, z)^T \in \Omega, t \in J, \tag{25a}$$

$$\dots \left\{ K \frac{kr_w}{\mu_w} \dots \phi_w \right\} + B_w q = \Phi' \left(\frac{\partial \phi_o}{\partial t} - \frac{\partial \phi_w}{\partial t} \right), \quad X \in \Omega, t \in J, \tag{25b}$$

此处 ϕ_o 、 ϕ_w 分别为油水流动位势, 为待求的函数, K 为地层的绝对渗透率, kr_o 、 kr_w 分别为油相、水相渗透率, μ_o 、 μ_w 分别为油水粘度, Φ 为地层孔隙度, B_o 、 B_w 为流动系数, $q(x, t)$ 为源汇函数, $s' = ds/dp_c$, s 为含水饱和度, p_c 为毛细管压力函数. 此外还必须给出初始和边界条件.

3.1 模型问题的数值结果和分析

Hubbert, Dembicki, Calalan 等学者做过的油水二次运移聚集的著名石油地质水动力学实验, 在实验室理想条件下显示了油水运移、聚集、分离的过程^[16~18]. 我们以胜利油田提供的地质参数, 模仿 Hubbert 等到的著名实验进行数值模拟, 模拟结果和实验结果基本吻合, 且有很强的物理力学特性, 十分清晰地看到油水运移、分离、聚集的全过程. 同时得知计算格式具有很强的稳定性和收敛性.

数值试验包括不同形状的模拟区域以及源汇项(流入、流出量)在边界上不同的分布等情形. 模拟时间均为 300 万年, 模拟区域的水平尺度为 $400 \text{ m} \times 400 \text{ m}$, 厚度为 400 m , 计算网格为 $8 \times 8 \times 8$, 模拟时间为 300 万年. 计算结果表明油聚集到一定的浓度后在浮力和动力作用下向

上运移,在顶部聚集,随着油浓度的增加(水浓度的减少),油沿顶部边界运移,且向纵深扩展。

3.2 东营凹陷实际问题的大规模数值模拟

选择整个东营凹陷沙四上进行运移聚集三维数值模拟。其特点是

i) 模拟区域面积大,为 $142 \times 84 \text{ km}^2$ 。 ii) 沙四上的生烃、排烃强度大。 iii) 运移聚集时间长达 3 000 多万年。

因此选择东营凹陷沙四上进行二次运移聚集三维数值模拟具有特殊重要的意义,一方面可以考验该软件对大规模区域数值模拟的适应性,另一方面可以考察该系统在长达数千万年模拟过程中的稳定性,模拟最终结果将为石油地质专家对这一区块含油潜力及分布情况进行合理评价提供重要依据。

模拟区域:大地坐标(m) (20 552 246.00, 20 694 246.00)和(4 090 110.00, 4 174 110.00),水平网格数为 71×42 ,将沙四上沿地层走向分成 5 层,自上而下排序,网格步长 $\Delta x = \Delta y = 2\ 000 \text{ m}$, $\Delta z = 100 \text{ m}$ 。为了使计算适应各地质年代排烃排液量的差异并保持稳定,我们采用时间变步长技术,选取的时间步长在 200~1 000 年之间。

数值模拟结果指明

i) 渗流力学三维数值模拟过程可再现油水在真实的三维空间中二次运移聚集的演化全过程。模拟结果符合油水运移聚集的渗流力学特征。油聚集到一定饱和度后,在油水位势综合作用下,油在三维空间中从高位势向低位势方向运移,在油的局部低位势区,发生聚集,并可能成藏;时间越长,排烃量越大,聚集的油越多,最后聚集到油位势低的区域,形成油藏。

ii) 渗流力学数值模拟结果与东营凹陷的实际油田分布情况对比,模拟结果成藏位置与实际纯化等油田的位置基本吻合。

iii) 数千万年的超长时间的成功数值模拟表明我们的数值模拟方法是强稳定的,高效率的,高精度的。

[参 考 文 献]

- [1] Ewing R E. The Mathematics of Reservoir Simulation [M]. Philadelphia: SIAM, 1983.
- [2] Bredehoeft J D, Pinder G F. Digital analysis of areal flow in multiaquifer groundwater systems: a quasi_three_dimensional model[J]. Water Resources Research, 1970, 6(3): 893—888.
- [3] Don W, Emil O F. An iterative quasi_three_dimensional finite element model for heterogeneous multi-aquifer systems[J]. Water Resources Research, 1978, 14(5): 943—952.
- [4] Ungerer P, Burous J, Doligez B, et al. A 2_D model of basin petroleum by two_phase fluid flow, application to some case studies [A]. In: Doligez Ed Migration of Hydrocarbon in Sedimentary Basins [C]. Paris: Editions Techniq, 1987, 414—455.
- [5] Ungerer P. Fluid flow, hydrocarbon generation and migration[J]. AAPG Bull, 1990, 74(3): 309—335.
- [6] Douglas Jr J, Russell T F. Numerical method for convection_dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures[J]. SIAM J Numer Anal, 1982, 19(5): 871—885.
- [7] Douglas Jr J. Finite difference methods for two_phase incompressible flow in porous media[J]. SIAM J Numer Anal, 1983, 20(4): 681—696.
- [8] Peaceman D W. Fundamental of Numerical Reservoir Simulation [M]. Amsterdam: Elsevier, 1980.
- [9] Marchuk G I. Splitting and alternating direction method[A]. In: Ciarlet P G, Lions J L Eds. Handbook of Numerical Analysis [C]. Paris: Elsevier Science Publishers, B V, 1990, 197—460.
- [10] Ewing R E, Lazarov R D, Vassilev A T. Finite difference scheme for parabolic problems on a composite grids with refinement in time and space[J]. SIAM J Numer Anal, 1994, 31(6): 1605—1622.

- [11] Lazarov R D, Mischev I D, Vassilevski P S. Finite volume methods for convection_diffusion problems [J]. SIAM J Numer Anal, 1996, **33**(1): 31—55.
- [12] 袁益让. 可压缩两相驱动问题的分数步长特征差分格式[J]. 中国科学, A 辑, 1998, **28**(10): 893—902.
- [13] 萨马尔斯基 A A, 安德烈耶夫 B B. 椭圆型方程差分方法[M]. 北京: 科学出版社, 1994.
- [14] 袁益让. 油藏数值模拟中动边值问题的特征差分方法[J]. 中国科学, A 辑, 1994, **24**(10): 1029—1036.
- [15] 袁益让. 强化采油数值模拟的特征差分方法和 l^2 估计[J]. 中国科学, A 辑, 1993, **23**(8): 801—810.
- [16] Hubbert M K. Entrapment of petroleum under hydrodynamic conditions[J]. AAPG Bull, 1953, **37**(8): 1954—2026.
- [17] Dembicki H, Jr. Secondary migration of oil experiments supporting efficient movement of separate, buoyant oil phase along limited conduits[J]. AAPG Bull, 1989, **73**(8): 1018—1021.
- [18] Calalan L. An experimental study of secondary oil migration[J]. AAPG Bull, 1992, **76**(5): 638—650.

Numerical Method for the Three Dimensional Nonlinear Convection_Dominated Problem of Dynamics of Fluids in Porous Media

YUAN Yi_rang¹, DU Ning¹, WANG Wen_qia¹,
CHENG Ai_jie¹, HAN Yu_ji²

(1. Institute of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, P. R. China;

2. Physical Exploration Institute of Shengli Petroleum Administration,
Dongying, Shandong 257022, P. R. China)

Abstract: For the three_dimensional convection_dominated problem of dynamics of fluids in porous media, the second order upwind finite difference fractional steps schemes applicable to parallel arithmetic were put forward. Fractional steps techniques were needed to convert a multi_dimensional problem into a series of successive one_dimensional problems. Some techniques, such as calculus of variations, energy method, multiplicative commutation rule of difference operators, decomposition of high order difference operators, and the theory of prior estimates were adopted. Optimal order estimates are derived to determine the error in the second order approximate solution. These methods have already been applied to the numerical simulation of migration_accumulation of oil resources and predicting the consequences of seawater intrusion and protection projects.

Key words: nonlinear convection_dominated; dynamics of fluids; upwind fractional steps; finite difference method; convergence; numerical simulation