

柔性杆柔性铰机器人动力学分析*

章定国, 周胜丰

(南京理工大学 理学院, 南京 210094)

(傅衣铭推荐)

摘要: 研究由 N 柔性杆和 N 柔性铰组成的空间机器人的动力学问题。把柔性铰简化成一个线性扭转弹簧, 采用假设模态法表示杆件的弹性变形, 运用 Kane 方法对全柔机器人进行动力学建模, 推导出完整的系统动力学方程组。通过一个数值仿真算例, 验证所做工作的可行性, 并分析了柔性效应对机器人动力学响应的影响。

关键词: 柔性机器人; 动力学; 数值模拟; 建模

中图分类号: O313.7 **文献标识码:** A

引 言

在机器人动力学特性分析中通常将机器人系统模化为由刚性杆和刚性铰组成的多刚体系统^[1,2], 然而, 随着机器人朝着高速、轻质方向发展, 机器人各部件的弹性变形对机器人末端的运动精度和系统振动等产生了不可忽视的影响。传统的多刚体系统模型已经无法正确描述实际的机器人系统的动力学问题, 柔性效应对机器人动力学特性的影响受到了各国学者的高度重视。机器人系统的柔性主要包括臂杆的柔性和铰的柔性, 文献[3]至文献[10]研究了臂杆柔性铰为刚性情形, 而文献[11]至文献[15]研究了刚性杆柔性铰情形。少数研究者还研究了柔性杆和柔性铰并存情形^[16~18], 然而从其给出的算例看, 只停留在单杆的模型上, 少见多杆情形。本文研究了由 N 柔性杆和 N 柔性铰连接而成的全柔空间机器人的动力学问题, 采用 Kane 方法推导全柔机器人的动力学方程, 并研制了相应的动力学仿真软件。文末通过一个算例说明了本文所作的工作, 并分析了柔性效应对机器人动力学响应的影响。

1 柔性机器人的物理模型

考虑具有 N 个柔性铰和 N 个柔性杆的空间开链式机器人, 驱动器是直流发动机, 安装在臂杆上。

1.1 柔性铰的模型简化

考虑转动柔性铰的情形, 在小变形的情况下, 柔性铰可以简化为一个刚度系数为 k_i 的线性扭转弹簧, k_i 综合考虑了驱动器和传动系统的刚度, 设 q_i 为杆 i 的理论转角, ε_i 为扭转弹簧

* 收稿日期: 2004_09_16; 修订日期: 2005_12_27

基金项目: 教育部留学回国人员科研启动基金

作者简介: 章定国(1967—), 男, 浙江嘉善人, 教授, 博士(联系人, Tel: + 86_25_84315639; E_mail: zhangdg419@163.com)。

所引起的变形转角, θ_i 为杆 i 的实际转角, 则 $\theta_i = q_i + \varepsilon \cdot \phi_i$ 是第 i 个驱动转子的转角, N_i 为传动系统的传动比, 则有 $\phi_i = N_i q_i$ 。

1.2 柔性杆件的简化模型

假设所研究的机器人的臂杆为长形杆, 且每个臂杆的长细比很大, 故可把杆件视为 Euler-Bernoulli 梁, 忽略剪切变形和微元转动惯量的影响。臂杆作大范围刚性运动, 而由杆件变形引起的弹性位移很小。

2 柔性机器人的运动学

2.1 坐标系的建立和坐标系变换

对于第 i 杆件, 建立 4 个正交坐标系, 坐标系 $(X_b Y_b Z_b)_i$ 固定在第 i 杆件的近端(在铰 i 处), X_b 沿杆件 i 未变形时的中心轴, 这个坐标系作为第 i 杆件的基础参考系。坐标系 $(X_d Y_d Z_d)_i$ 固定在杆件 i 的远端(在铰 $i+1$ 处)。在杆件 i 未变形时, $(X_d Y_d Z_d)_i$ 看作是 $(X_b Y_b Z_b)_i$ 沿杆件 i 的轴线方向平移杆件 i 的长度 L_i 而成。坐标系 $(H_x H_y H_z)_i$ 是杆件 i 的 Denavit-Hartenberg^[1] 坐标系, 固定在第 i 杆件的远端。坐标系 $(X_d Y_d Z_d)_i$ 与坐标系 $(H_x H_y H_z)_i$ 之间的 4×4 齐次变换矩阵 dH_i 是一个常数阵, 坐标系 $(H_x H_y H_z)_i$ 固定在第 i 杆件的近端, 铰 i 未动作时, $(H_x H_y H_z)_i$ 与 $(H_x H_y H_z)_{i-1}$ 重合, 它们之间的变换矩阵 HH_i^{i-1} 只是 θ_i 的函数。坐标系 $(H_x H_y H_z)_i$ 与 $(X_b Y_b Z_b)_i$ 之间的变换矩阵 Hb_i 也是一个常数阵。定义铰 i 变换矩阵 T_i 为从坐标系 $(X_d Y_d Z_d)_{i-1}$ 到坐标系 $(X_b Y_b Z_b)_i$ 的变换矩阵, 则

$$T_i = dH_{i-1} HH_i^{i-1} Hb_i, \quad (1)$$

显然 T_i 只是变量 θ_i 的函数。定义 E_i 是杆件 i 的变形变换矩阵, 即从坐标系 $(X_b Y_b Z_b)_i$ 到杆件 i 变形后坐标系 $(X_d Y_d Z_d)_i$ 的变换矩阵。由于杆件 i 的变形是微变形, 故 E_i 可以近似表达为

$$E_i = E_{i1} + E_{i2} \quad (2)$$

其中

$$E_{i1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{i2} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 & \delta_1^i \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 & \delta_2^i \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 & \delta_3^i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中 $\varphi^i = (\varphi_1^i \ \varphi_2^i \ \varphi_3^i)^T$ 和 $\delta^i = (\delta_1^i \ \delta_2^i \ \delta_3^i)^T$ 分别是杆件 i 在坐标系 $(X_d Y_d Z_d)_i$ 处的弹性变形角位移和弹性变形线位移。

令 A_i^{i-1} 是坐标系 $(X_b Y_b Z_b)_{i-1}$ 到 $(X_b Y_b Z_b)_i$ 之间的 4×4 齐次变换矩阵, 则

$$A_i^{i-1} = E_{i-1} T_i = \begin{bmatrix} R_i^{i-1} & p_i^{i-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其中 R_i^{i-1} 是 3×3 方向余弦矩阵, $\mathbf{0}$ 是 1×3 零矩阵, p_i^{i-1} 是从 $(X_b Y_b Z_b)_{i-1}$ 的原点指向 $(X_b Y_b Z_b)_i$ 的原点的矢量在坐标系 $(X_b Y_b Z_b)_{i-1}$ 中的坐标列阵。

2.2 广义速率的选取

采用假设模态法描述杆件的变形, 则杆件 i 上在 x 处微元的变形角位移和变形线位移分别可以表示为

$$\varphi^i = \sum_{k=1}^{n_i} \varphi_k^i(x) e_k^i(t), \quad (5)$$

$$\delta^i = \sum_{k=1}^{n_i} \delta_k^i(x) e_k^i(t), \tag{6}$$

其中, e_k^i 是杆件 i 的第 k 个模态坐标, 是时间 t 的函数; n_i 为臂杆 i 的模态数; φ_k^i 、 δ_k^i 是杆件 i 的第 k 个模态矢量, 是位置 x 的函数, 各含有 3 个分量 φ_{kj}^i 、 δ_{kj}^i ($j = 1, 2, 3$)。

按照文献[18]的方法, 选取广义速率 U_j ($j = 1, \dots, 2N + \sum_{i=1}^N n_i$)

$$U_j = \varphi_j, \quad j = 1, \dots, N, \tag{7}$$

$$U_j = \vartheta_{j-N}, \quad j = N + 1, \dots, 2N, \tag{8}$$

$$U_j = \dot{e}_k^i(t), \quad j = 2N + \sum_{r=1}^{i-1} n_r + k; \quad 1 \leq k \leq n_i; \quad i = 1, \dots, N. \tag{9}$$

2.3 运动学分析

下面采用文献[10]和文献[18]给出的思路对机器人系统进行运动学分析。定义杆件 $i-1$ 近端坐标系 $(X_b Y_b Z_b)_{i-1}$ 的角速度为 ω^{i-1} , 远端坐标系 $(X_d Y_d Z_d)_{i-1}$ 的角速度为 ${}^* \omega^{i-1}$, 则

$${}^* \omega^{i-1} = \omega^{i-1} + \mathfrak{S}^{-1}, \tag{10}$$

上式递推初始条件是: $\omega^0 = \mathbf{0}$, $\mathfrak{S}^0 = \mathbf{0}$, ${}^* \omega^0 = \mathbf{0}$ 。

$(X_b Y_b Z_b)_i$ 的角速度为

$$\omega^i = \mathbf{R}_{i-1}^i {}^* \omega^{i-1} + \mathbf{H}_z^i \mathfrak{S} = \mathbf{R}_{i-1}^i {}^* \omega^{i-1} + \mathbf{H}_z^i U_{N+i}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{11}$$

ω^i 的第 j 个偏角速度 ω_j^i 为

$$\omega_j^i = \begin{cases} \mathbf{0} & (1 \leq j \leq N), \\ \mathbf{R}_{i-1}^i \omega_j^{i-1} = \mathbf{R}_{j-N}^i \mathbf{H}_z^{i-N} & (N < j < N + i), \\ \mathbf{H}_z^i & (j = N + i), \\ \mathbf{0} & (N + i < j \leq 2N), \\ \mathbf{R}_m^i \varphi_k^m & \left[j = 2N + \sum_{r=1}^{m-1} n_r + k; \quad 1 \leq k \leq n_m; \quad 1 \leq m \leq i-1 \right], \\ \mathbf{0} & \left[j > 2N + \sum_{r=1}^{m-1} n_r; \quad m \geq i \right], \end{cases} \tag{12}$$

对 ω^i 求一次时间导数得杆件 i 的近端坐标系 $(X_b Y_b Z_b)_i$ 的角加速度 ε^i 为

$$\varepsilon^i = \mathbf{R}_{i-1}^i \varepsilon^{i-1} + (\mathbf{R}_{i-1}^i {}^* \omega^{i-1}) \times (U_{N+i} \mathbf{H}_z^i) + U_{N+i} \mathbf{H}_z^i + \mathbf{R}_{i-1}^i ({}^* \omega^{i-1} \times \mathfrak{S}^i + \dot{\varphi}^{i-1}), \tag{13}$$

定义坐标系 $(X_b Y_b Z_b)_i$ 的原点速度为 v^i , 则

$$v^i = \mathbf{R}_{i-1}^i (v^{i-1} + \omega^{i-1} \times p_i^{i-1} + \mathfrak{S}^{i-1}), \tag{14}$$

于是 v^i 的第 j 个偏速度 v_j^i 为

$$v_j^i = \begin{cases} \mathbf{0} & (1 \leq j \leq N), \\ \mathbf{R}_{i-1}^i (v_j^{i-1} + \omega_j^{i-1} \times p_i^{i-1}) & (N < j < N + i), \\ \mathbf{0} & (N + i \leq j \leq 2N), \\ \mathbf{R}_{i-1}^i (v_j^{i-1} + \omega_j^{i-1} \times p_i^{i-1}) & \left[2N < j \leq 2N + \sum_{r=1}^{i-2} n_r \right], \\ \mathbf{R}_{i-1}^i \dot{\delta}_k^{i-1} & \left[j = 2N + \sum_{r=1}^{i-2} n_r + k; \quad 1 \leq k \leq n_{i-1} \right], \\ \mathbf{0} & \left[j > 2N + \sum_{r=1}^{i-1} n_r \right], \end{cases} \tag{15}$$

对 v^i 求一次时间导数得坐标系 $(X_b Y_b Z_b)_i$ 的原点的加速度 a^i 为

$$a^i = R_{i-1}^i [a^{i-1} + \dot{\varepsilon}^{i-1} \times p^{i-1} + \omega^{i-1} \times (\omega^{i-1} \times p^{i-1}) + 2\omega^{i-1} \times \dot{\delta}^{i-1} + \dot{\delta}^{i-1}]. \quad (16)$$

递推初始条件: $a^0 = -g^0$, 其中 g^0 为重力加速度。

设杆件 i 任一点 p 变形前的位矢为 r_p^i , 变形量为 δ_p^i , 则其速度 v_p^i 和第 j 个偏速度 v_{pj}^i 分别为

$$v_p^i = v^i + \omega^i \times (r_p^i + \delta_p^i) + \sum_{k=1}^{n_i} \dot{\delta}_{p,k}^i e_k^i(t), \quad (17)$$

$$v_{pj}^i = \begin{cases} v^i + \omega^i \times (r_p^i + \delta_p^i) & \left[j \leq 2N + \sum_{r=1}^{i-1} n_r \right], \\ \dot{\delta}_{p,k}^i & \left[j = 2N + \sum_{r=1}^{i-1} n_r + k; 1 \leq k \leq n_i \right], \\ 0 & \left[j > 2N + \sum_{r=1}^i n_r \right], \end{cases} \quad (18)$$

p 点的加速度 a_p^i 为

$$a_p^i = a^i + \dot{\varepsilon}^i \times (r_p^i + \delta_p^i) + \omega^i \times [\omega^i \times (r_p^i + \delta_p^i)] + 2\omega^i \times \dot{\delta}_p^i + \ddot{\delta}_p^i. \quad (19)$$

3 柔性机器人的动力学方程

下面我们运用 Kane 法来推导系统的动力学方程, 并遵循文献[10]和文献[18]给出的推导过程。

3.1 系统的广义主动力

在用 Kane 法时, 不仅要考虑全部主动力对广义主动力的贡献, 同时还必须考虑柔性杆件的內力和柔性铰的內力对系统广义主动力所作的贡献。

① 相邻杆件之间的理想约束力对系统广义主动力的贡献为 0。

② 重力对系统广义主动力的贡献实际上已经由公式(16)的初始条件考虑了, 不用另求。

③ 施加在铰 i 处的驱动力矩为 τ_i , 它对应的第 j 个广义主动力为

$$(F_A)_j^i = \begin{cases} \tau_i, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (20)$$

所有驱动力矩 $\tau_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 所对应的第 j 个广义主动力为

$$(F_A)_j = \sum_{i=1}^N (F_A)_j^i = \begin{cases} \tau_j, & 1 \leq j \leq N, \\ 0, & j > N. \end{cases} \quad (21)$$

④ 柔性杆的內力对系统广义主动力的贡献

柔性杆 i 的內力对第 j 个广义主动力的贡献为(忽略柔性杆件的拉压和扭转)

$$(F_L)_j^i = - \int_0^{l_i} E_i I_i \frac{\partial^2 \delta_p^i}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta_{pj}^i) dx, \quad (22)$$

其中, x 为变形前微元 p 沿梁长度方向离 $(X_b Y_b Z_b)_i$ 坐标原点的距离, $E_i I_i$ 为截面的弯曲刚度。

所有柔性杆的內力对第 j 个广义主动力的贡献为

$$(F_L)_j = \sum_{i=1}^N (F_L)_j^i = \begin{cases} 0, & j \leq N, \\ 0, & N < j \leq 2N, \\ \sum_{i=m}^N (F_L)_j^i, & 2N + \sum_{r=1}^{m-1} n_r < j \leq 2N + \sum_{r=1}^m n_r; 1 \leq m \leq N. \end{cases} \quad (23)$$

⑤柔性铰的内力对广义主动力的贡献

根据文献[18]得,第*i*柔性铰的内力对第*j*个广义主动力的贡献 $(F_J)_j^i$ 为

$$(F_J)_j^i = \begin{cases} k_i \varepsilon, & j = i, \\ -k_i \varepsilon_i, & j = N + i, \\ 0, & j \neq i; j \neq N + i, \end{cases} \quad (24)$$

于是所有柔性铰的内力对第*j*个广义主动力的贡献 $(F_J)_j$ 为

$$(F_J)_j = \sum_{i=1}^N (F_J)_j^i = \begin{cases} k_j \varepsilon_j, & j \leq N, \\ -k_{j-N} \varepsilon_{j-N}, & N < j \leq 2N, \\ 0, & j > 2N. \end{cases} \quad (25)$$

3.2 系统的广义惯性力

系统的广义惯性力由杆件的广义惯性力和驱动转子的广义惯性力构成,下面分别求出这两部分的广义惯性力。

①柔性杆对广义惯性力的贡献

设第*i*柔性杆上*p*处微元的质量为*dm*,则其第*j*个广义惯性力为

$$d(F_L^*)_j^i = -v_{pj}^i \cdot a_p^i dm, \quad (26)$$

于是整个杆件*i*的第*j*个广义惯性力为

$$(F_L^*)_j^i = \iiint_i d(F_L^*)_j^i = - \iiint_i v_{pj}^i \cdot a_p^i dm, \quad (27)$$

将公式(18)代入公式(27)得

$$(F_L^*)_j^i = \begin{cases} - \iiint_i (v_j^i + \omega_j^i \times r_p^i) \cdot a_p^i dm & \left[j \leq 2N + \sum_{r=1}^{i-1} n_r \right], \\ - \iiint_i \xi_{pk}^i \cdot a_p^i dm & \left[j = 2N + \sum_{r=1}^{i-1} n_r + k; 1 \leq k \leq n_i \right], \\ \mathbf{0} & \left[j > 2N + \sum_{r=1}^i n_r \right], \end{cases} \quad (28)$$

其中

$${}^* r_p^i = r_p^i + \xi_p^i = r_c^i + r_{cp}^i + \xi_p^i, \quad (29)$$

公式(29)中的 r_c^i 是杆件*i*的质心位置矢量, r_{cp}^i 是质心到*p*点的矢量。

公式(28)中的第1行还可以进一步表达成

$$(F_L^*)_j^i = -v_j^i \cdot \iiint_i a_p^i dm - \omega_j^i \cdot \iiint_i ({}^* r_p^i \times a_p^i) dm = -v_j^i \cdot F_i^* - \omega_j^i \cdot T_i^*, \quad (30)$$

公式(30)中的 F_i^* 和 T_i^* 分别表示为

$$F_i^* = \iiint_i a_p^i dm = M_i [a^i + \varepsilon^i \times r_c^i + \omega^i \times (\omega^i \times r_c^i)] + \varepsilon^i \times E^i + \omega^i \times (\omega^i \times E^i) + 2\omega^i \times B^i + \dot{E}^i, \quad (31)$$

其中

$$\mathbf{E}^i = \iiint_i \mathcal{G}_p^i dm = \iiint_i \sum_{k=1}^{n_i} \mathcal{G}_{pk}^i e_k^i(t) dm = \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{E}_k^i e_k^i(t), \quad \mathbf{E}_k^i = \iiint_i \mathcal{G}_{pk}^i dm,$$

和

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i^* &= \iiint_i ({}^* \mathbf{r}_p^i \times \mathbf{a}_p^i) dm = \\ &= (M \dot{\mathbf{r}}_c^i + \mathbf{E}^i) \times \mathbf{a}^i + {}^* \mathbf{I}^i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^i + \boldsymbol{\omega}^i \times ({}^* \mathbf{I}^i \cdot \boldsymbol{\omega}^i) + 2\mathbf{A}^i + \mathbf{B}^i, \end{aligned} \quad (32)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^i &= \iiint_i {}^* \mathbf{r}_p^i \times (\boldsymbol{\omega}^i \times \mathcal{G}_p^i) dm = \iiint_i [({}^* \mathbf{r}_p^i \cdot \mathcal{G}_p^i) \boldsymbol{\omega}^i - ({}^* \mathbf{r}_p^i \cdot \boldsymbol{\omega}^i) \mathcal{G}_p^i] dm = \\ &= \iiint_i \left[{}^* \mathbf{r}_p^i \cdot \sum_{k=1}^{n_i} \mathcal{G}_{pk}^i e_k^i(t) \right] \boldsymbol{\omega}^i dm - \iiint_i [({}^* \mathbf{r}_p^i \cdot \boldsymbol{\omega}^i) \mathcal{G}_p^i] dm = \\ &= \left[\sum_{k=1}^{n_i} h_k^i e_k^i(t) \right] \boldsymbol{\omega}^i - \iiint_i (\boldsymbol{\omega}^i \cdot {}^* \mathbf{r}_p^i) \mathcal{G}_p^i dm, \\ h_k^i &= \iiint_i ({}^* \mathbf{r}_p^i \cdot \mathcal{G}_{pk}^i) dm, \\ \mathbf{B}^i &= \iiint_i {}^* \mathbf{r}_p^i \times \dot{\mathcal{G}}_p^i dm = \iiint_i {}^* \mathbf{r}_p^i \times \sum_{k=1}^{n_i} \mathcal{G}_{pk}^i \dot{e}_k^i(t) dm = \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{H}_k^i \dot{e}_k^i(t), \\ \mathbf{H}_k^i &= \iiint_i ({}^* \mathbf{r}_p^i \times \mathcal{G}_{pk}^i) dm, \end{aligned}$$

M_i 为杆件的质量, ${}^* \mathbf{I}^i$ 为杆件 i 变形后关于坐标系 $(X_b Y_b Z_b)_i$ 原点的惯量张量, 微变形时, ${}^* \mathbf{I}^i$ 近似等于杆件 i 变形前惯量张量。

公式(28)中的第2行可表达为

$$\begin{aligned} (F_L^*)_j^i &= - \left[\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{E}_k^i + \boldsymbol{\varepsilon}^i \cdot \mathbf{H}_k^i + \boldsymbol{\omega}^i \cdot (\mathbf{Q}_k^i - h_k^i \boldsymbol{\omega}^i) + \right. \\ &\quad \left. 2 \boldsymbol{\omega}^i \cdot \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{R}_{jk}^i e_j^i(t) + \sum_{j=1}^{n_i} j_k \dot{e}_j^i(t) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

其中

$$r_{jk}^i = \iiint_i (\mathcal{G}_{pj}^i \cdot \mathcal{G}_{pk}^i) dm, \quad \mathbf{R}_{jk}^i = \iiint_i (\mathcal{G}_{pj}^i \times \mathcal{G}_{pk}^i) dm, \quad \mathbf{Q}_k^i = \iiint_i (\mathcal{G}_{pk}^i \cdot \boldsymbol{\omega}^i) {}^* \mathbf{r}_p^i dm.$$

整个机器人的所有杆件所对应的广义惯性力 $(F_L^*)_j$ 为

$$(F_L^*)_j = \sum_{i=1}^N (F_L^*)_j^i = \begin{cases} 0 & (j \leq N), \\ \sum_{i=j-N}^N (F_L^*)_j^i & (N < j \leq 2N), \\ \sum_{i=m}^N (F_L^*)_j^i, & \\ \left(2N + \sum_{r=1}^{m-1} n_r < j \leq 2N + \sum_{r=1}^m n_r; 1 \leq m \leq N \right), & \end{cases} \quad (34)$$

② 转子对广义惯性力的贡献

由文献[18]得, 系统转子对广义惯性力的贡献 $(F_r^*)_j$ 为

$$(F_r^*)_j = \sum_{i=1}^N (F_r^*)_j^i = \begin{cases} -\dot{I}_r N_j^2 \ddot{q}_j, & 1 \leq j \leq N, \\ 0, & j > N, \end{cases} \quad (35)$$

其中 I_r^j 是第 j 个转子沿自转轴的转动惯量。

3.3 柔性机器人动力学方程

将式(21)、(23)、(25)、(34)、(35)代入 Kane 方程

$$(F_A)_j + (F_L)_j + (F_J)_j + (F_L^*)_j + (F_r^*)_j = 0, \quad (36)$$

得到柔性机器人动力学方程为

$$I_r^j N_j^2 \ddot{q}_j - k_j \xi_j = \tau_j, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (37)$$

$$\sum_{i=j-N}^N (F_L^*)_j^i - k_{j-N} \xi_{j-N} = 0, \quad N < j \leq 2N, \quad (38)$$

$$\sum_{i=m}^N (F_L^*)_j^i + \sum_{i=m}^N (F_L)_j^i = 0, \quad 2N + \sum_{r=1}^{m-1} n_r < j \leq 2N + \sum_{r=1}^m n_r; 1 \leq m \leq N, \quad (39)$$

上述方程(37)~(39)共有 $2N + \sum_{i=1}^N n_i$ 个方程, 含有 $2N + \sum_{i=1}^N n_i$ 个未知数, 动力学方程自行封闭, 能积分求解。

4 数值仿真实例

本实例是由 2 柔性杆和 1 刚性杆连接而成的 3 杆件机器人及其对应的刚性机器人的数值仿真, 图 1 和图 2 分别是该机器人简化模型的正视图 and 俯视图。柔性杆件的长细比很大, 可视为 Euler-Bernoulli 梁, 3 个铰都为柔性转动铰。柔性杆长 $L_1 = L_2 = 7.11 \text{ m}$, 刚性杆长 $L_3 = 1.3589 \text{ m}$, 3 杆件的质量分别为 $M_1 = 314.88 \text{ kg}$, $M_2 = 279.2 \text{ kg}$, $M_3 = 455.62 \text{ kg}$ 。铰的柔性简化弹簧刚度系数 $k_1 = k_2 = k_3 = 1.33 \times 10^6 \text{ Nm/rad}$, $E_1 I_1 = E_2 I_2 = 3.8 \times 10^6 \text{ Nm}^2$ 。由图示位置静止释放下落。

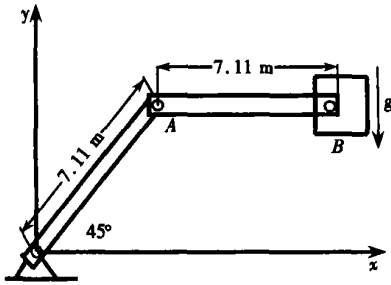


图 1 3 杆柔性机器人正视图

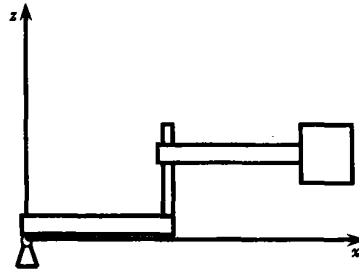


图 2 3 杆柔性机器人俯视图

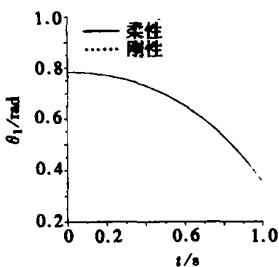


图 3 θ_1 的变化曲线图

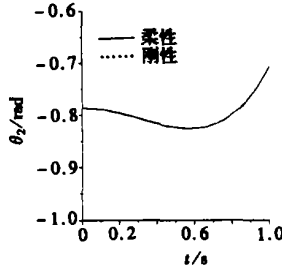


图 4 θ_2 的变化曲线图

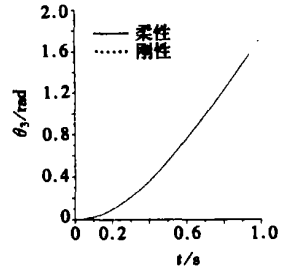


图 5 θ_3 的变化曲线图

仿真的部分结果如图 3~ 图 10 所示。这些图都是柔性机器人与其相应刚性机器人同一运动参数的对照图, 实线代表柔性机器人的运动参数变化图, 虚线代表刚性机器人的运动参数

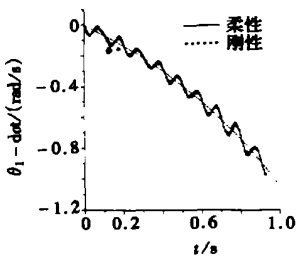
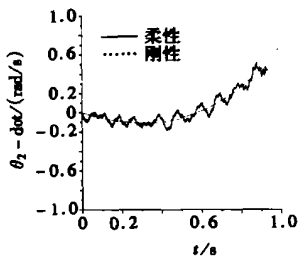
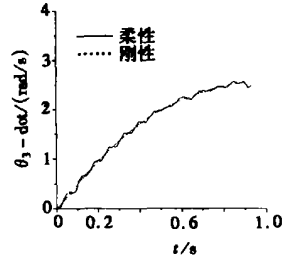
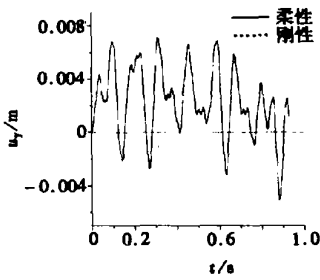
图 6 $\dot{\theta}_1$ 的时间变化率图 7 $\dot{\theta}_2$ 的时间变化率图 8 $\dot{\theta}_3$ 的时间变化率

图 9 第 2 杆末端弹性变形位移

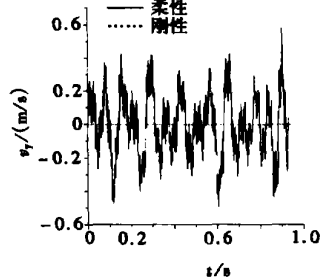


图 10 第 2 杆末端弹性变形速度

变化图。从图 3~ 图 5 看出 $\theta_i (i = 1, 2, 3)$ 在两种情形下较接近, 而从图 6~ 图 8 中可以看出 $\dot{\theta}_i (i = 1, 2, 3)$ 在柔性时有明显的波动, 两种情形有较大差别。图 9 和图 10 分别表示了第 2 柔性杆末端的弹性变形位移和弹性变形速度, 而刚性机器人的变形为 0。从这些结果可以看出机器人结构的柔性对其动力学性能的影响, 忽略这些柔性效应, 将在机器人动力学建模和控制中带来错误, 柔性效应不容忽视。

[参 考 文 献]

- [1] Fu K S, Gonzalez R C, Lee C S G. Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligent [M]. New York: McGraw_Hill Book Company, 1987, 82—148.
- [2] Angeles J. Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms [M]. New York: Springer_Verlag, 2002, 213—439.
- [3] Sunada W H, Dubowsky S. On the dynamic analysis and behavior of industrial robotic manipulators with elastic members[J]. Transactions of the ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1983, **105**: 42—51.
- [4] Book W J. Recursive Lagrangian dynamics of flexible manipulator arms[J]. The International Journal of Robotics Research, 1984, **3**(3): 87—101.
- [5] Usoro P B, Nadira R, Mahil S S. A finite element/ Lagrange approach to modeling lightweight flexible manipulator[J]. Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1986, **108**: 198—205.
- [6] Wang P K C, WEI Jin_duo. Vibrations in a moving flexible robot arm[J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, **116**(1): 149—160.
- [7] Naganathan G, Soni A H. Coupling effects of kinematics and flexibility in manipulators[J]. The International Journal of Robotics Research, 1987, **6**(1): 75—84.
- [8] Low K H, Vidyasagar M. A Lagrangian formulation of the dynamic model for flexible manipulator sys-

- tems[J]. Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1988, **110**: 175—181.
- [9] Naganathan G, Soni A H. Nonlinear modeling of kinematic and flexibility effects in manipulator design [J]. Transactions of the ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1988, **110**: 243—254.
- [10] 管贻生, 安永辰. 机器人手臂弹性动力学分析的 Kane 方法[J]. 机器人, 1992, **14**(1): 45—51.
- [11] Spong M W. Modeling and control of elastic joint robots[J]. Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1987, **109**(4): 310—319.
- [12] Readman M C, B langer P R. Stabilization of the fast modes of a flexible joint robot[J]. The International Journal of Robotics Research, 1992, **11**(2): 123—134.
- [13] Ahmad S. Constrained motion (force/ position) control of flexible joint robots[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1993, **23**(2): 374—381.
- [14] Al_Ashoor R A, Patel R V, Khorasani K. Robust adaptive controller design and stability analysis for flexible joint manipulations[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1993, **23**(2): 589—602.
- [15] Jankowski K P, van Brussel H. Inverse dynamics task control of flexible joint robots_Part I : continuous time approach; Part II : discrete time approach[J]. Mech Mach Theory, 1993, **28**(6): 741—762.
- [16] Xi F, Fenton R G. Coupling effect of a flexible link and a flexible joint[J]. The International Journal of Robotics Research, 1994, **13**(5): 443—453.
- [17] Al_Bedoor B O, Almusallam A A. Dynamics of flexible link and flexible joint manipulator carrying a payload with rotary inertia[J]. Mech Mach Theory, 2000, **35**: 785—820.
- [18] 边宇枢, 陆震. 柔性机器人动力学建模的一种方法[J]. 北京航空航天大学学报, 1999, **25**(4): 486—490.

Dynamic Analysis of Flexible Link and Flexible Joint Robots

ZHANG Ding guo, ZHOU Sheng feng

(School of Sciences, Nanjing University of Science and Technology,
Nanjing 210094, P. P. China)

Abstract: The dynamic modeling and simulation of an N flexible link and N flexible joint robot was reported. Each flexible joint is modeled as a linearly elastic torsional spring and the approach of assumed modes was adopted to describe the deformation of the flexible link. The complete governing equations of motion of the flexible link joint robots were derived via Kane's method. An illustrative example is given to validate the algorithm presented and to show the effects of flexibility on the dynamics of robots.

Key words: flexible robot; dynamics; numerical simulation; modeling