应用数学和力学, 第 27 卷 第 5 期
2006 年 5 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 27, No. 5, May. 15, 2006

文章编号: 1000_0887(2006) 05_0624_07

具共振条件下的高阶多点边值问题解的存在性*

林晓洁[1], 杜增吉[2], 葛渭高[2]

(1. 徐州师范大学 数学系, 江苏 徐州 221116;
2. 北京理工大学 数学系, 北京 100081)

(我刊原编委林宗池推荐)

摘要: 利用重合度理论研究一类高阶常微分方程多点边值问题, 在共振条件下, 通过给出非线性项满足的一些条件, 运用有效的先验界估计, 得到了一些新的解的存在性结果•

关 键 词: 边值问题; 共振; 重合度理论

中图分类号: O175.8 文献标识码: A

引 言

常微分方程多点边值问题起源于各种不同的应用数学和物理领域, 有着重要的理论意义和广泛的实际应用• 近年来, 微分方程多点边值问题研究已引起了人们广泛的兴趣[1~11]• 本文研究如下 n 阶多点边值问题

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)) + e(t), \qquad t \in (0, 1), \tag{1}$$

$$x^{(i)}(0) = 0, \qquad i = 0, 1, \cdots, n-2, \tag{2}$$

$$x^{(n-1)}(1) = \sum_{j=1}^{m-2} \beta_j x^{(n-1)}(\eta_j), \tag{3}$$

其中, $f: [0, 1] \times R^n \to R$ 是一连续函数, $e(t) \in L^1[0, 1]$, $\beta_j (j = 1, \cdots, m-2)$ 为正实数, $0 < \eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_{m-2} < 1$•

类似于文献[1], 当 $\dim \operatorname{Ker} L = 0$ 时, 线性算子 $Lx = x^{(n)}$ 是可逆的, 我们称边值条件(2)、(3) 为非共振条件• 否则称边值条件(2)、(3) 是共振的• 关于非共振边值问题, 文献[2]~ 文献[4], Du[12]、Ma[5] 和 Gupta[6] 等已作过许多研究• 关于共振边值问题, Feng 和 Webb[1], Liu[7,8], Gupta[9], Nagle 和 Pothoven[10] 以及文献[11] 等已对二阶和三阶多点边值问题进行了许多研究• 但是关于高阶多点共振边值问题的研究还很少• 本文致力于研究 n 阶多点边值问题(1)~(3) 在共振边界条件下解的存在性, 主要方法是重合度理论[13]•

---

* 收稿日期: 2004_02_01; 修订日期: 2006_01_17
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371006)
作者简介: 林晓洁(1973—), 女, 江苏徐州人, 讲师(联系人. Tel: +86_516_83798976; E_mail: linxiaojie1973@163.com);
杜增吉(1972—), 男, 江苏邳州人, 博士(Tel: +86_10_68912581; E_mail: duzengji@163.com)

1　预备知识

本文引用以下记号：$Y = C^{n-1}[0,1]$，其范数 $\|x\| = \max\left\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty, \cdots, \|x^{(n-1)}\|_\infty\right\}$，其中 $\|x\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$；$Z = L^1[0,1]$，以 $\|\cdot\|_1$ 表示 Z 中的范数。定义 Sobolev 空间 $W^{n,1}(0,1) = \left\{x:[0,1] \to R \mid x, x', \cdots, x^{(n-1)}\text{ 在}[0,1]\text{ 上是绝对连续的}, x^{(n)} \in L^1[0,1]\right\}$。

定义线性算子 $L: D(L) \subset Y \to Z$ 为 $Lx = x^{(n)}$，其中

$$D(L) = \left\{\begin{array}{ll} x \in W^{n,1}(0,1): x^{(i)}(0) = 0, & i = 0, 1, \cdots, n-2, \\ x^{(n-1)}(1) = \sum_{j=1}^{m-2}\beta_j x^{(n-1)}(\eta_j) & \end{array}\right\}.$$

类似地，定义非线性算子 $N: Y \to Z$ 为 $Nx = f(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)) + e(t)$，$t \in (0,1)$。则边值问题(1)～(3)就为 $Lx = Nx$。

下面，我们简单作一些准备。如果 $\dim \operatorname{Ker}L = \dim Z/\operatorname{Im}L < +\infty$，$\operatorname{Im}L \subset Z$ 是闭的，那么称 L 是指标为 0 的 Fredholm 算子。同时存在连续的投影算子 $P: Y \to Y$，$Q: Z \to Z$ 满足 $\operatorname{Im}P = \operatorname{Ker}L$，$\operatorname{Ker}Q = \operatorname{Im}L$，和 $Y = \operatorname{Ker}L \oplus \operatorname{Ker}P$，$Z = \operatorname{Im}L \oplus \operatorname{Im}Q$，那么 $L|_{D(L)\cap \operatorname{Ker}P}: D(L) \cap \operatorname{Ker}P \to \operatorname{Im}L$ 是可逆的，记 K_P 为这个逆算子。如果 $\Omega \subset Y$ 是一个有界开集，$D(L) \cap \Omega \neq \varnothing$，且 $QN(\Omega)$ 有界，$K_P(I-Q)N: \Omega \to Y$ 是紧的，那么称 $N: Y \to Z$ 在 Ω 是 L_紧的。

引理 1[13]　设 L 是指标为 0 的 Fredholm 算子，N 在 Ω 是 L_紧的。如果下列条件成立

(i) $Lx \neq \lambda Nx$，$\forall (x, \lambda) \in [(D(L) \setminus \operatorname{Ker}L) \cap \partial\Omega] \times (0,1)$。

(ii) $Nx \notin \operatorname{Im}L$，$\forall x \in \operatorname{Ker}L \cap \partial\Omega$。

(iii) $\deg(QN|_{\operatorname{Ker}L}, \Omega \cap \operatorname{Ker}L, 0) \neq 0$，其中投影算子 $Q: Z \to Z$ 满足 $\operatorname{Im}L = \operatorname{Ker}Q$。

则方程 $Lx = Nx$ 在 $D(L) \cap \Omega$ 上至少有一解。

引理 2　如果 $\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j = 1$，$\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\eta_j \neq 1$，则有

$$\operatorname{Ker}L = \left\{x \in D(L): x = ct^{n-1}, c \in R, t \in [0,1]\right\},$$

$$\operatorname{Im}L = \left\{y \in Z: \sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\int_{\eta_j}^1 y(s)\,ds = 0\right\}, \tag{4}$$

且 L 是指标为 0 的 Fredholm 算子。

证明　易证 $\operatorname{Ker}L = \left\{x \in D(L): x = ct^{n-1}, c \in R, t \in [0,1]\right\}$。

下面我们首先证明(4)成立。因为方程

$$x^{(n)} = y \tag{5}$$

有解 $x(t)$ 满足边界条件(2)、(3)，当且仅当

$$\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\int_{\eta_j}^1 y(s)\,ds = 0. \tag{6}$$

事实上，如果(5)有解 $x(t)$ 满足边界条件(2)、(3)，那么由(5)和边界条件(2)、(3)可知

$$x(t) = \frac{1}{(n-1)!}x^{(n-1)}(0)t^{n-1} + \int_0^t\int_0^{\tau_n}\cdots\int_0^{\tau_2} y(\tau_1)\,d\tau_1\cdots d\tau_n,$$

根据

$$\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j = 1, \quad x^{(n-1)}(1) = \sum_{j=1}^{m-2}\beta_j x^{(n-1)}(\eta_j),$$

我们得到

$$\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\int_{\eta_j}^{1}y(s)\,\mathrm{d}s = 0,$$

反之,如果(6)成立• 令

$$x(t) = ct^{n-1} + \int_0^t\int_0^{\tau_n}\cdots\int_0^{\tau_2}y(\tau_1)\,\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_n,$$

其中 c 是任意常数,那么 $x(t)$ 是(5)的解且满足边界条件(2)、(3)• 因此(4)成立•

其次,对 $y\in Z$,定义投影算子 $Q: Z\to Z$ 如下

$$Qy = \frac{1}{1-\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\eta_j}\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\int_{\eta_j}^{1}y(s)\,\mathrm{d}s•$$

令 $y_1 = y - Qy$,那么 $\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\int_{\eta_j}^{1}y_1(s)\,\mathrm{d}s = 0$• 则 $y_1\in \mathrm{Im}L$,因此 $Z = \mathrm{Im}L + R$• 因为 $\mathrm{Im}L\cap R = \{0\}$,有 $Z = \mathrm{Im}L\oplus R$,故 $\dim\mathrm{Ker}L = \dim R = \mathrm{co}\dim\mathrm{Im}L = 1$• 所以 L 是指标为0的Fredholm 算子•

引理 3 如果 $\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j = 1$, $\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\eta_j\neq 1$,线性投影算子 $K_P: \mathrm{Im}L\to D(L)\cap\mathrm{Ker}P$ 可写成

$$K_Py = \int_0^t\int_0^{\tau_n}\cdots\int_0^{\tau_2}y(\tau_1)\,\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_n,$$

并且对 $y\in\mathrm{Im}L$,有 $\|K_Py\|\leqslant\|y\|_1$•

证明 定义投影算子 $P: Y\to Y$ 为 $Px = x^{(n-1)}(0)t^{n-1}$• 那么 L 的广义逆 $K_P: \mathrm{Im}L\to D(L)\cap\mathrm{Ker}P$ 可定义为

$$K_Py = \int_0^t\int_0^{\tau_n}\cdots\int_0^{\tau_2}y(\tau_1)\,\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_n•$$

事实上,对 $y\in\mathrm{Im}L$,有 $(LK_P)y(t) = [(K_Py)(t)]^{(n)} = y(t)$• 且对 $x\in D(L)\cap\mathrm{Ker}P$,可得

$$(K_P)(Lx)(t) = x(t) - x(0) - \frac{1}{1!}x'(0)t - \cdots - \frac{1}{(n-1)!}x^{(n-1)}(0)t^{n-1}•$$

又由 $x\in D(L)\cap\mathrm{Ker}P$ 和 $Px = 0$,我们有 $(K_P)(Lx)(t) = x(t)$• 这样 $K_P = (L|_{D(L)\cap\mathrm{Ker}P})^{-1}$ 成立• 且

$$\|K_Py\|_\infty\leqslant\int_0^1\cdots\int_0^1|y(\tau_1)|\,\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_n = \|y\|_1•$$

由 K_Py 的定义,可以得到 $\|(K_Py)'\|_\infty\leqslant\|y\|_1, \cdots, \|(K_Py)^{(n-1)}\|_\infty\leqslant\|y\|_1$• 这样就证明了 $\|K_Py\|_\infty\leqslant\|y\|_1$ 成立• 证毕•

2 主要结果

定理 1 设 $f: [0,1]\times R^n\to R$ 为连续函数,$e(t)\in L^1[0,1]$,如果下列条件成立

(H_1) $\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j = 1$, $\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\eta_j\neq 1$, $\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_1 < \frac{1}{2}$•

(H_2) 存在函数 $a_1(t), a_2(t), \cdots, a_n(t), b(t), r(t)\in L^1[0,1]$ 和常数 $\theta\in[0,1)$,对 $\forall(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in R^n$, $t\in[0,1]$,满足下列不等式之一

$$|f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i(t)|x_i|\right) + b(t)|x_n|^\theta + r(t), \tag{7}$$

$$|f(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(t)|x_i|\right) + b(t)|x_{n-1}|^{\theta} + r(t), \tag{8}$$

…

$$|f(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(t)|x_i|\right) + b(t)|x_1|^{\theta} + r(t)\cdot \tag{9}$$

(H_3) 存在常数 $M>0$, 使得对 $x\in D(L)$, $t\in[0,1]$, 有 $|x^{(n-1)}(t)|>M$, 那么

$$\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\int_{\eta_j}^{1}[f(s,x(s),x'(s),\cdots,x^{(n-1)}(s))+e(s)]\mathrm{d}s\neq 0\cdot \tag{10}$$

(H_4) 存在常数 $M^*>0$, 使得对 $c\in R$, 如果 $|c|>M^*$, 那么下列不等式之一满足

$$c\cdot\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\int_{\eta_j}^{1}[f(s,cs^{n-1},c(n-1)s^{n-2},\cdots,c\cdot(n-1)!)+e(s)]\mathrm{d}s<0, \tag{11}$$

$$c\cdot\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\int_{\eta_j}^{1}[f(s,cs^{n-1},c(n-1)s^{n-2},\cdots,c\cdot(n-1)!)+e(s)]\mathrm{d}s>0\cdot \tag{12}$$

则边值问题(1)~(3)在 $C^{n-1}[0,1]$ 上至少有一解·

证明　首先, 证明集合 $\Omega_1=\left\{x\in D(L)\setminus \mathrm{Ker}L: Lx=\lambda Nx,\ \lambda\in[0,1]\right\}$ 是有界的·

设 $x\in\Omega_1$, $Lx=\lambda Nx$, 则 $\lambda\neq 0$, $Nx\in \mathrm{Im}L=\mathrm{Ker}Q$, 我们有

$$\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\int_{\eta_j}^{1}[f(s,x(s),x'(s),\cdots,x^{(n-1)}(s))+e(s)]\mathrm{d}s=0,$$

由(H_3)可知, 存在 $t_0\in[0,1]$, 使得 $|x^{(n-1)}(t_0)|\leqslant M$·　根据

$$x^{(n-1)}(0)=x^{(n-1)}(t_0)-\int_0^{t_0}x^{(n)}(t)\mathrm{d}t,$$

我们有

$$\|Px\|=|x^{(n-1)}(0)|\leqslant M+\|x^{(n)}\|_1=M+\|Lx\|_1\leqslant M+\|Nx\|_1\cdot \tag{13}$$

又由 $x\in\Omega_1$, $x\in D(L)\setminus\mathrm{Ker}L$, 可得$(I-P)x\in D(L)\cap\mathrm{Ker}P$, $LPx=0$, 故由引理3得到

$$\|(I-P)x\|=\|(K_P)L(I-P)x\|\leqslant\|L(I-P)x\|_1=\|Lx\|_1\leqslant\|Nx\|_1\cdot \tag{14}$$

由(13)和(14), 我们得到

$$\|x\|\leqslant\|Px\|+\|(I-P)x\|=|x^{(n-1)}(0)|+\|(I-P)x\|\leqslant 2\|Nx\|_1+M, \tag{15}$$

如果(7)成立, 那么由(15), 有

$$\|x\|\leqslant 2\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_1\|x^{(i-1)}\|_\infty\right)+\|b\|_1\|x^{(n-1)}\|_\infty^{\theta}+C\right], \tag{16}$$

其中 $C=\|r\|_1+\|e\|_1+M/2$·　由 $\|x\|_\infty\leqslant\|x\|$ 和(16), 我们有

$$\|x\|_\infty\leqslant\frac{2}{1-2\|a_1\|_1}\left[\left(\sum_{i=2}^{n}\|a_i\|_1\|x^{(i-1)}\|_\infty\right)+\|b\|_1\|x^{(n-1)}\|_\infty^{\theta}+C\right]\cdot \tag{17}$$

由 $\|x'\|_\infty\leqslant\|x\|$, (16)和(17), 可得

$$\|x'\|_\infty\leqslant\frac{2}{1-2(\|a_1\|_1+\|a_2\|_1)}\left[\left(\sum_{i=3}^{n}\|a_i\|_1\|x^{(i-1)}\|_\infty\right)+\|b\|_1\|x^{(n-1)}\|_\infty^{\theta}+C\right]\cdot \tag{18}$$

类似地,我们可以得到

$$\|x^{(n-1)}\|_\infty \leqslant \frac{2\|b\|_1}{1-2\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_1}\|x^{(n-1)}\|_\infty^\theta + \frac{2C}{1-2\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_1}. \tag{19}$$

因为 $\theta\in[0,1)$, 由(19)可知, 存在 $M_1>0$, 满足 $\|x^{(n-1)}\|_\infty\leqslant M_1$. 类似地, 存在 $M_i>0$ $(i=2,\cdots,n)$ 满足 $\|x^{(n-i)}\|_\infty\leqslant M_i$, $i=2,\cdots,n$. 因此

$$\|x\|=\max\left\{\|x\|_\infty,\ \|x'\|_\infty,\ \cdots,\ \|x^{(n-1)}\|_\infty\right\}\leqslant\max\left\{M_1,M_2,\cdots,M_n\right\}.$$

再由(7),得到

$$\|x^{(n)}\|_1\leqslant\|a_1\|_1M_n+\cdots+\|a_{n-1}\|_1M_2+ (\|a_n\|_1+\|b\|_1)M_1+\|r\|_1+\|e\|_1.$$

这样,我们就证明了 Ω_1 是有界集.

如果(8)或(9)成立,类似于以上的讨论,我们可以证明集合 Ω_1 也是有界的.

其次,证明集合 $\Omega_2=\left\{x\in \mathrm{Ker}L: N_x\in \mathrm{Im}L\right\}$ 是有界的.

取 $x\in\Omega_2$, $x\in\mathrm{Ker}L=\left\{x\in D(L): x=ct^{n-1}, c\in R, t\in[0,1]\right\}$ 且 $QN_x=0$, 我们有

$$\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\int_{\eta_j}^1[f(s,cs^{n-1},c(n-1)s^{n-2},\cdots,c\cdot(n-1)!)+e(s)]\mathrm{d}s=0.$$

由(H_3),类似于以上的讨论,我们知道 $|c|\leqslant M$, 因此 Ω_2 是有界集.

第3,如果条件(H_4)的第1部分成立. 如果 $|c|>M^*$, 则有

$$c\cdot\frac{1}{1-\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\eta_j}\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\int_{\eta_j}^1[f(s,cs^{n-1},c(n-1)s^{n-2},\cdots, c\cdot(n-1)!)+e(s)]\mathrm{d}s<0. \tag{20}$$

我们证明集合 $\Omega_3=\left\{x\in\mathrm{Ker}L: -\lambda J_x+(1-\lambda)Q_{N_x}=0,\ \lambda\in[0,1]\right\}$ 是有界的, 其中 $J:\mathrm{Ker}L\to\mathrm{Im}Q$ 是一个同构, 对 $\forall c\in R$, 有 $J(ct^{n-1})=c$.

由 $x=c_0t^{n-1}\in\Omega_3$, 我们可以得到

$$\lambda c_0=\frac{1-\lambda}{1-\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\eta_j}\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\int_{\eta_j}[f(s, c_0s^{n-1},c_0(n-1)s^{n-2},\cdots,c_0\cdot(n-1)!)+e(s)]\mathrm{d}s.$$

如果 $\lambda=1$, 那么 $c_0=0$. 否则, 如果 $|c_0|>M^*$, 根据(20),有

$$\lambda c_0^2=c_0\cdot\frac{1-\lambda}{1-\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\eta_j}\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\int_{\eta_j}^1[f(s, c_0s^{n-1},c_0(n-1)s^{n-2},\cdots,c_0\cdot(n-1)!)+e(s)]\mathrm{d}s,$$

这就与 $\lambda c_0^2\geqslant0$ 相矛盾. 所以,集合 $\Omega_3\subset\left\{x\in\mathrm{Ker}L: \|x\|\leqslant M^*\right\}$ 是有界的.

第4,如果条件(H_4)的第2部分成立,如果 $|c|>M^*$, 则有

$$c\cdot\frac{1}{1-\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\eta_j}\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j\int_{\eta_j}^1[f(s, cs^{n-1},c(n-1)s^{n-2},\cdots,c\cdot(n-1)!)+e(s)]\mathrm{d}s>0.$$

类似于第 3 步的证明, 我们可以证明集合 $\Omega_3=\left\{x\in \operatorname{Ker}L: \lambda Jx+(1-\lambda)QNx=0,\ \lambda\in[0,1]\right\}$ 是有界的• 只是在证明中 $H(x,\lambda)$ 取为 $H(x,\lambda)=\lambda Jx+(1-\lambda)QNx$, 可得

$$\deg(QN|_{\operatorname{Ker}L},\ \Omega\cap \operatorname{Ker}L,0)=\deg(J,\ \Omega\cap\operatorname{Ker}L,0)\neq 0•$$

其余的证明一样•

下面, 我们将证明引理 1 中的条件全部成立•

令 Ω 是 Y 的一个开闭子集, 满足 $\bigcup_{i=1}^{3}\Omega_i\subset\Omega$• 由 Ascoli_Arzela 定理, 我们知道 $K_P(I-Q)N:\Omega\to Y$ 是紧的, 因此 N 在 Ω 上是 L_紧的• 通过以上讨论, 我们有

(i) $Lx\neq\lambda Nx,\quad\forall(x,\lambda)\in[(D(L)\setminus\operatorname{Ker}L)\cap\partial\Omega]\times(0,1)$,

(ii) $Nx\notin \operatorname{Im}L,\quad\forall x\in\operatorname{Ker}L\cap\partial\Omega$•

(iii) 令 $H(x,\lambda)=-\lambda Jx+(1-\lambda)QNx$, 根据以上讨论, 我们有 $H(x,\lambda)\neq 0$, $x\in\operatorname{Ker}L\cap\partial\Omega$• 根据度的同伦不变性, 可得

$$\deg(QN|_{\operatorname{Ker}L},\ \Omega\cap\operatorname{Ker}L,0)=\deg(H(\cdot,0),\ \Omega\cap\operatorname{Ker}L,0)=$$
$$\deg(H(\cdot,1),\ \Omega\cap\operatorname{Ker}L,0)=\deg(-J,\ \Omega\cap\operatorname{Ker}L,0)\neq 0,$$

由引理 1 可知, 方程 $Lx=Nx$ 在 $D(L)\cap\Omega$ 中至少有一解, 所以边值问题(1) ~ (3) 在 $C^{n-1}[0,1]$ 中至少有一解• 证毕•

[参　考　文　献]

[1] Feng W, Webb J R L. Solvability of m_point boundary value problems with nonlinear growth[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1997, **212**(2): 467—480.

[2] DU Zeng_ji, GE Wei_gao, ZHOU Ming_ru. Singular perturbations for third_order nonlinear multi_point boundary value problem[J]. Journal of Differential Equations, 2005, **218**(1): 69—90.

[3] DU Zeng_ji, XUE Chun_yan, GE Wei_gao. Multiple solutions for three_point boundary value problem with nonlinear terms depending on the first order derivative[J]. Archiv der Mathematik, 2005, **84**(4): 341—349.

[4] DU Zeng_ji, XUE Chun_yan, GE Wei_gao. On eigenvalue intervals for discrete second order boundary value problem[J]. Acta Mathematicate Applicatae Sinica, English Series, 2005, **21**(1): 105—114.

[5] MA Ru_yun, Nelson Castaneda. Existence of solutions of nonlinear m_point boundary value problems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, **256**(2): 556—567.

[6] Gupta C P. A generalized multi_point boundary value problem for second order ordinary differential equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 1998, **89**(1): 133—146.

[7] LIU Bin. Solvability of multi_point boundary value problem at resonance(Ⅱ)[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, **136**(2): 353—377.

[8] LIU Bin, YU Jian_she. Solvability of multi_point boundary value problem at resonance (Ⅲ)[J]. Applied Mathematics and Computation, 2002, **129**(1): 119—143.

[9] Gupta C P. A second order m_point boundary value problem at resonance[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 1995, **24**(10): 1483—1489.

[10] Nagle R K, Pothoven K L. On a third_order nonlinear boundary value problems at resonance[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, **195**(1): 148—159.

[11] DU Zeng_ji, LIN Xiao_jie, GE Wei_gao. On a third order multi_point boundary value problem at resonance[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, **302**(1): 217—229.

[12] DU Zeng_ji, GE Wei_gao, LIN Xiao_jie. Existence of solutions for a class of third_order nonlinear

boundary value problems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, **294**(1): 104—112.

[13] Mawhin J. Topological degree methods in nonlinear boundary value problems[A]. In: Nsfcbms Regional Conference Series in Mathematics [C]. Providence. Rhode Island: American Mathematical Society, U S A, 1979.

Existence of Solutions for Higher Order Multi_Point Boundary Value Problems at Resonance

LIN Xiao_jie[1], DU Zeng_ji[2], GE Wei_gao[2]

1. Department of Mathematics, Xuzhou Normal University, Xuzhou, Jiangsu 221116, P. R. China;
2. Department of Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P. R. China)

Abstract: Using the theory of coincidence degree, a class of higher order multi_point boundary value problem for ordinary differerntial equations are studied. Under the boundary conditions satisfying the resonance case, some new existence results are obtained by supposing some conditions to the nonlinear term and applying a priori estimates.

Key words: boundary value problem; resonance; coincidence degree theory