

文章编号: 1000-0887(2004) 05-0529-06

# 结构动力学逆特征值问题的同伦解法<sup>\*</sup>

李 书, 王 波, 胡继忠

(北京航空航天大学 五系 飞机设计研究所, 北京 100083)

(叶庆凯推荐)

摘要: 将结构动力学反问题视为拟乘法逆特征值问题, 利用求解非线性方程组的同伦方法来解结构动力学逆特征值问题, 这种方法由于沿同伦路径求解, 对初值的选取没有本质的要求, 算例说明了这种方法是可行的

关键词: 结构动力学; 同伦方法; 逆特征值问题

中图分类号: O327; O241. 6 文献标识码: A

## 引 言

结构设计、参数识别、模型修改等问题是结构动力学中常要解决的问题。这类问题属于结构动力学反问题, 它的特点是无论正问题是否为线性问题, 反问题均是非线性问题, 因此解决这类问题计算量较大。一般是将其描述为一类关于设计变量的函数<sup>[1~5]</sup>, 转化为一个等价的非线性方程组, 然后利用 Newton 法求解<sup>[6]</sup>, Newton 迭代法是局部二次收敛的一种算法, 初值在真解附近时收敛很快, 初值选取不当, 结果有可能发散。

实际结构如飞行器结构比较复杂, 设计变量比较多, 相应的逆特征值问题求解要求迭代初解与真解充分靠近, 但往往由于很难取得满足收敛条件的初值而使计算失效。此外, 一般也只能求得问题的个别解, 而这些解并不一定是实际问题所需要的, 收敛性问题是工程计算中经常碰到的一个难题。在代数特征值反问题中, 常见的有加法问题和乘法问题, 类似 Allgower 等<sup>[7]</sup>提出非线性方程组的同伦方法, Chu<sup>[8]</sup>和徐树方<sup>[9]</sup>亦给出了求解经典代数特征值反问题中的加法问题的同伦方法, 其基本思想是首先将加法问题转化为等价的方程组, 然后利用同伦算法求解。同伦方法通过引入一个变量  $t \in [0, 1]$ , 构造一个  $F_t(x)$  形式, 使得  $F_t(x)$  是从  $R^n \times [0, 1]$  到  $R^n$  的一个连续映射, 而  $F_0(x)$  和  $F_1(x)$  是一个同伦, 根据同伦不变量定理, 能够确定其映射度, 由 Kronecker 定理可以给出解的存在性, 并且  $F_1(x)$  的解就是我们需要的解。求解时把平凡映射  $F_0(x)$  的零点与  $F_1(x)$  的零点一一对应地用同伦路径连接起来, 这个特点对初值的选取没有本质限制, 具有整体收敛性。结构动力学反问题实质上是一个广义逆特征值问题中的乘法问题<sup>[10]</sup>, 由于不能严格满足经典乘法问题条件, 本文提出将其看作拟乘法问题, 基于经典

\* 收稿日期: 2002\_05\_17; 修订日期: 2003\_11\_17

基金项目: 航空基础科学基金资助项目(02B51060); 航空支撑科技基金资助项目(01A51007); 凡舟基金资助项目

作者简介: 李书(1965—), 男, 江苏镇江人, 副教授, 博士(联系人, Tel: + 86\_10\_82316579; Fax: + 86\_10\_82313375; E\_mail: lishu@buaa.edu.cn).

代数特征值反问题的理论研究了同伦方法解的存在性和数值算法。为保证非线性方程求解过程是沿同伦路径进行的,采用经典的预估-校正方法时,首先用梯度法选取初值,使其在同伦路径上,然后用 Newton 迭代法进行校正,发挥两种算法各自长处。为保证计算精度,对特征向量进行正交化,算例说明了本文方法是可行的。

## 1 结构动力学中的逆特征值问题

### 1.1 含参数动力学特征值问题

对于如下的动力特征方程

$$KX = MX\Omega, \quad (1)$$

其中  $K$  是结构刚度矩阵,  $M$  是质量矩阵,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  是振型矩阵,  $\Omega = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2)$  是频率矩阵( $\text{diag}(\cdot)$  表示对角矩阵,  $I$  表示单位矩阵), 并且满足下列条件

$$X^T MX = I, \quad (2)$$

$$X^T KX = \Omega. \quad (3)$$

考虑到一般只能提供低阶动态信息, 这时

$$X_r^T MX_r = I_r, \quad (4)$$

$$X_r^T KX_r = \Omega_r. \quad (5)$$

其中  $X_r = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ ,  $\Omega_r = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_r^2)$  ( $r \leq n$ ) 分别为低阶的振型和频率。众所周知, 结构的刚度和质量矩阵是由结构的物理参数和几何参数决定的, 不妨假设这组参数为  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$ , 其中元素代表弹性模量、材料密度, 则刚度矩阵和质量矩阵是物理参数  $p$  的函数, 分别表示为  $K(p)$ ,  $M(p)$ , 类似于文献[1~5]的动力模型假设, 有

$$K(p) = \sum_{i=1}^n K_i(p), \quad M(p) = \sum_{i=1}^n M_i(p). \quad (6)$$

### 1.2 求解方法

为了确定参数  $p$ , 建立下面非线性方程组

$$\omega(p) - \omega_i^* = 0 \quad (i = 1, \dots, r). \quad (7)$$

本文采用 Newton 法解式(7)表示的非线性方程组, 令

$$g_i(p) = \omega_r(p) - \omega_i^* \quad (i = 1, \dots, r). \quad (8)$$

其中  $g(p) = (g_1(p), g_2(p), \dots, g_r(p))^T$ 。

## 2 同伦方法理论背景

### 2.1 拟乘法逆特征值问题

经典乘法逆特征值问题提法<sup>[11]</sup>: 给定矩阵  $A \in R^{n \times n}$  和  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in R^{n \times n}$ , 并且  $A = A^T$ , 求  $X = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^{n \times n}$ , 使得  $\mu(XA) = \mu(\Lambda)$  成立, 其中  $\mu(\cdot)$  表示矩阵特值从大到小排列所得到的向量。而对于结构动力学而言, 理论上刚度和质量矩阵具有正定性,  $\Omega = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2)$  是频率矩阵, 如果令

$$A(p) = K(p), \quad X(p) = M^{-1}(p). \quad (9)$$

可以给出类似于经典乘法问题的拟乘法问题提法: 给定  $\Omega = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2) \in R^{n \times n}$ , 对于  $A(p) = K(p)$ ,  $X(p) = M^{-1}(p) \in R^{n \times n}$ , 并且  $A(p) = A(p)^T$ , 求  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ , 使得

$$\mu(X(\mathbf{p})A(\mathbf{p})) = \mu(\Omega)$$

成立。

## 2.2 同伦的构造

参照文献[11]的做法, 令

$$F(\mathbf{p}, t) = \mu(X(\mathbf{p})(I + t(A(\mathbf{p}) - I))) - \omega^2, \quad (10)$$

其中,  $\omega^2 = (\omega_i^2)$ ,  $t \in [0, 1]$ , 则  $F(\mathbf{p}, t)$  是从  $R^n \times [0, 1]$  到  $R^n$  的一个连续映射, 并且有:

$$F_0(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}, 0) = \mu(X(\mathbf{p})) - \omega^2 \quad (11)$$

$$F_1(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}, 1) = \mu(X(\mathbf{p})A(\mathbf{p})) - \omega^2, \quad (12)$$

$F(\mathbf{p}, t)$  是一个同伦, 与经典乘法问题相比较,  $X(\mathbf{p})$  不再是对角矩阵, 而是一个满阵, 并且是  $\mathbf{p}$  的函数。显然拟乘法问题比经典乘法问题复杂的多。

## 3 数值计算过程

### 3.1 初值预估

如从  $F_0(\mathbf{p})$  的对应零点  $\mathbf{x}_\pi^{(0)}$  出发, 能够算出  $F(\mathbf{p}, t_k) = 0$  的近似解, 要用梯度法对  $F(\mathbf{p}, t_{k+1}) = 0$  的解进行初值预估, 梯度法的迭代格式为

$$\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^{(k)} - \alpha \frac{\dot{\cdot} F(\mathbf{p}^{(k)}, t_k)}{\|\dot{\cdot} F(\mathbf{p}^{(k)}, t_k)\|}, \quad (13)$$

其中  $-\dot{\cdot} F(\mathbf{p}^{(k)}, t_k) / \|\dot{\cdot} F(\mathbf{p}^{(k)}, t_k)\|$  为搜索方向,  $\alpha$  表示步长。

预估过程中, 令  $t_{k+1} = t_k + h_{k+1}$ ,  $h_{k+1}$  是预估步长。为使计算结果在同伦路径上, 每次迭代后, 需要判断所求  $\mathbf{p}^{(k+1)}$  是否属于集合  $\Psi$ , 根据文献[9],  $\Psi$  中的元素要求满足一定排列顺序, 这个条件很难满足, 当  $h_{k+1}$  很小时,  $\mathbf{p}^{(k)}$  和  $\mathbf{p}^{(k+1)}$  很靠近, 通过对  $\mathbf{p}^{(k+1)}$  的分量重新排列, 使排列后的  $\mathbf{p}^{(k+1)}$  属于集合  $\Psi$ 。

### 3.2 校正

由式(13)获得满足同伦路径的初解后, 用 Newton 迭代法计算, 迭代格式为

$$F'(\mathbf{p}^{(k)}, t_k) \Delta \mathbf{p}^{(k)} = F(\mathbf{p}^{(k)}, t_k), \quad (14)$$

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k)} - \Delta \mathbf{p}^{(k)}. \quad (15)$$

由下式判断  $\mathbf{p}^{(k+1)}$  是否进入 Newton 域, 对于任意给定的  $\varepsilon$ , 如果

$$\|F(\mathbf{p}^{(k+1)}, t_{k+1})\|_\infty < \varepsilon, \quad (16)$$

则令  $\mathbf{y}^{(0)} = \mathbf{p}^{(k+1)}$ , 用式(14)、(15)迭代两次, 得  $\mathbf{y}^{(1)}$ ,  $\mathbf{y}^{(2)}$ , 判断

$$\|\mathbf{y}^{(1)} - \mathbf{y}^{(0)}\|_2 \leq \|\mathbf{y}^{(2)} - \mathbf{y}^{(1)}\|_2 \quad (17)$$

是否成立, 如果成立则认为进入 Newton 域, 用 Newton 法继续迭代, 如果不成立, 则改变  $t_{k+1}$  步长  $h_{k+1}$  为原来的二分之一(即  $0.5h_{k+1}$ ), 大小按照式(13)重新计算  $\mathbf{p}^{(k+1)}$ 。

### 3.3 正交化

由于计算过程的舍入误差, 由式(1)所产生的向量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  之间可能会失去正交性, 计算表明严重影响收敛速度, 为改善向量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  之间的正交性, 需要对其进行必要的修正, 对这个问题的处理, 本文参考文献[12]的做法

$$X_i = \hat{X}_i (\hat{X}_i^T M \hat{X}_i)^{-1/2}. \quad (18)$$

### 3.4 计算步骤

1) 选择初值  $\mathbf{p}^{(0)}$ , 预估步长  $h_{k+1}$  和精度  $\varepsilon$ , 设  $k = 0, t_0 = 0$ ;

2) 当  $p = p^k$  时, 用有限元方法计算  $K(p^{(k)})$  和  $M(p^{(k)})$ ;

3)  $t_k = t_{k-1} + h_{k+1}$ , 求特征方程  $KX = MX \Omega$  特征值  $\omega_i(p^{(k)})$  和相应的特征向量  $X_i(p^{(k)})$ , 构造  $F(p^{(k)}, t_k)$ , 对特征向量按照式(18)正交化;

4) 计算  $F'(p^{(k)}, t_k)$ ;

5) 按梯度法计算  $p^{(k+1)}$ , 重排  $p^{(k+1)}$ ;

6) 令  $y^{(0)} = p^{(k+1)}$ , 按 Newton 法计算  $y^{(1)}$ ,  $y^{(2)}$ , 检验式(17) 是否成立, 如果成立, 继续; 否则令步长  $h_{k+1} = 0.5h_{k+1}$ , 执行步骤 3;

7) 计算  $y^{(i)}$ , 使  $\|F(p^{(k+1)}, t_{k+1})\|_{\infty} < \varepsilon$ ;

8) 若  $t_k = 1$ , 完成; 否则令  $k = k + 1$  和重复步骤 2) ~ 7)。

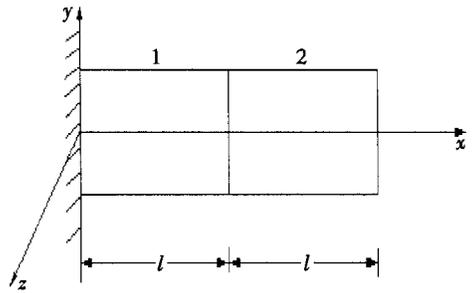
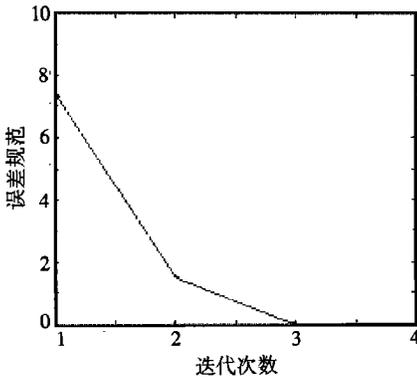


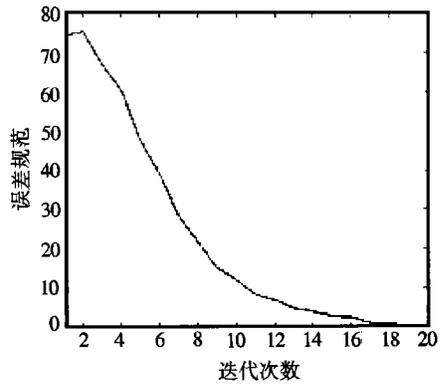
图 1 2 单元悬臂梁模型

### 4 数值算例

算例 1 以文献[13]中的二单元悬臂梁模型作为算例, 分成 2 个单元, 每个单元长  $l = \rho = 1$ , 横截面积  $A = 420$ ,  $E = 1000$ , 以惯性矩为设计变量, 给定前 2 阶特征值  $\lambda_1 = 3.68$ ,  $\lambda_2 = 16.57$ , 用本文方法设计出的惯性矩分别为  $I_y = 2, I_z = 9$ , 与真实结果一致。



(a) Newton 法



(b) 同伦法

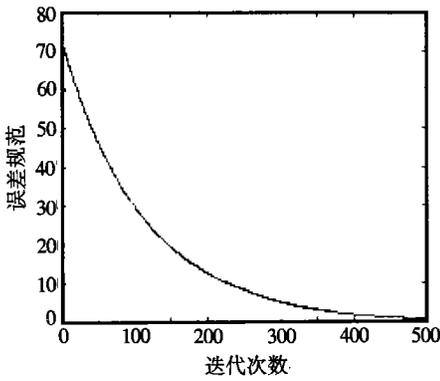
图 2 特征向量正交化情形下的迭代过程

算例 2 取自文献[4], 图 4 表示一个 10 杆桁架结构, 弹性模量  $E = 7.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ , 质量密度  $\rho = 2770 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , 以横截面积为设计变量, 最小单元面积为  $0.5 \text{ cm}^2$ 。

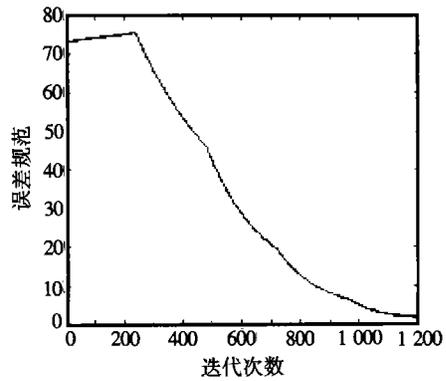
表 1 给定部分频率的桁架结构截面面积设计

给定频率 $\omega$ /(Hz)	区段	各杆截面积 $A$ /( $\text{cm}^2$ )				
		1	2	3	4	5
$\omega_1 = 10$	1	74.62	80.54	17.23	46.90	0.50
$\omega_2 = 15$	2	8.03	39.83	81.39	70.17	30.81
$\omega_1 = 5$	1	17.55	6.71	14.87	25.99	10.41
$\omega_2 = 15$	2	8.29	11.45	5.00	5.00	12.94

结果与文献[4]一致。



(a) Newton 法



(b) 同伦法

图3 特征向量未正交化情形下的迭代过程

## 5 结束语

本文提出用同伦方法来解决结构动力学逆特征值问题,采用将结构动力学逆特征值问题视为一类拟乘法逆特征值问题。算例表明用同伦方法求解结构动力学中广义逆特征值问题是可行的,从算例可以看出,是否采取特征向量正交化措施,对收敛速度的影响极大。尽管同伦方法的计算量一般情况要大于 Newton 法,由于计算过程中不断要寻找同伦路径,因此耗时多也是自然的。但是它在理论上解决了初值的选取过程,工程上是很有意义的。

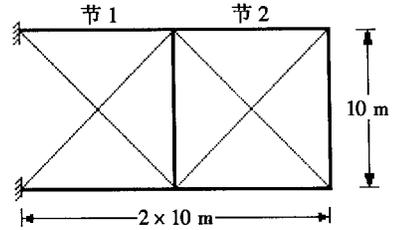


图4 10杆桁架结构

## [参 考 文 献]

- [1] 李书,冯太华,范绪箕. 动力模型修正中逆特征值问题的数值解法[J]. 计算结构动力学及其应用, 1995, 12(3): 276—280.
- [2] 李书,卓家寿,任青文. 对称结构动力设计中的广义逆特征值问题[J]. 计算力学学报, 1999, 16(2): 138—142.
- [3] 李书,卓家寿,任青文. 动力模型参数识别中的 Bayes 方法[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(4): 402—408.
- [4] Joseph K T. Inverse eigenvalue problem for structural design[J]. AIAA J, 1992, 30(12): 2891—2896.
- [5] 曾庆华,张令弥. 一种设计参数型的有限元模型修正方法[J]. 航空学报, 1992, 13(1): A29—A35.
- [6] Friedland S, Nocedal J, Overton M L. The formulation and analysis numerical methods for inverse eigenvalue problem[J]. SIAM J Numer Anal, 1987, 24(3): 634—667.
- [7] Allgower E, Georg K. Simplicial and continuation methods for approximating fixed points and solutions to systems of equations[J]. SIAM Review, 1980, (22): 28—85.
- [8] Chu M T. Solving addition inverse eigenvalue problems by homotopy method[J]. IMA J Numer Anal, 1990, (9): 331—342.
- [9] 徐树方. 求解特征值反问题的同伦方法[J]. 计算数学, 1993, 15(2): 200—206.
- [10] 戴华. 矩阵特征值反问题的若干进展[J]. 南京航空航天大学学报, 1995, 27(3): 400—413.

- [11] 周树荃, 戴华. 代数特征值反问题[ M]. 郑州: 河南科学技术出版社, 1991.
- [12] Aruch M. Optimal correction of mass and stiffness matrices using measured modes[ J]. AIAA J , 1982, **20**( 11): 1623—1626.
- [13] Aily R L. Eigenvector derivatives with repeated eigenvalues[ J]. AIAA J , 1989, **27**(4): 486—491.

## Homotopy Solution of the Inverse Generalized Eigenvalue Problems in Structural Dynamics

LI Shu, WANG Bo, HU Ji zhong

( Institute of Aircraft Design , Beijing University of Aeronautics & Astronautics , Beijing 100083, P. R. China )

**Abstract:** The structural dynamics problems, such as structural design, parameter identification and model correction, are considered as a kind of the inverse generalized eigenvalue problems mathematically. The inverse eigenvalue problems are nonlinear. In general, they could be transformed into nonlinear equations to solve. The structural dynamics inverse problems were treated as quasi multiplicative inverse eigenvalue problems which were solved by homotopy method for nonlinear equations. This method had no requirements for initial value essentially because of the homotopy path to solution. Numerical examples were presented to illustrate the homotopy method.

**Key words:** structural dynamics; homotopy method; inverse problem