

# 超音速尖锥边界层中扰动演化特征的数值研究

董 明, 罗纪生, 曹 伟

(天津大学 力学系, 天津 300072)

(本刊编委罗纪生来稿)

**摘要:** 采用高精度紧致格式, 对超音速尖锥边界层中二维扰动的空间演化, 进行了直接数值模拟。结果表明, 虽然尖锥边界层流动存在一定的锥面法向速度, 但小扰动的幅值及相位的演化都与由平行流假设得到的线性理论结果吻合。还研究了有限幅值扰动的演化, 给出了其演化规律并在扰动幅值增长到一定值时, 发现了小激波。

**关键词:** 超音速尖锥边界层; 扰动; 直接数值模拟; 小激波

**中图分类号:** O357.41      **文献标识码:** A

## 引 言

由于工程需要和计算能力的提高, 可压缩流动的稳定性、转捩及湍流问题开始成为研究的热点。可压缩平板边界层中扰动演化的研究结果已经相对较多了, 但由于实际问题及实验技术的需要, 有曲率的边界层问题更值得注意, 而这方面的研究结果还并不多。可压缩零攻角尖锥绕流问题是典型的有曲率的边界层问题, 因此对其扰动演化规律、转捩的研究具有十分重要的理论及实际意义。

对于零攻角尖锥绕流问题, 由于其基本流在锥面法线方向的速度不为零, 基于平行流假设的线性稳定性理论是否可以采用是需要考证的。本文针对来流 Mach 数为 5.29 的可压缩零攻角尖锥绕流边界层流场进行了直接数值模拟, 主要研究了二维扰动演化的特征。重点研究了小扰动的演化规律, 验证了线性稳定性理论的平行流假设; 研究了有限幅值扰动的演化规律, 考察其非线性的作用; 分析了是否存在小激波。

## 1 数值方法及基本流的计算

零攻角的超音速流体流过的圆锥状物体的边界层问题属于二维轴对称问题, 可以只求解一个子午面的流动情况, 并设圆锥不旋转, 因此周向速度为零。计算基本流时, 考虑来流平行于圆锥的轴线方向, 则流场将在圆锥前形成一条锥型斜激波。过激波后, 流体的流动方向会一

收稿日期: 2005\_02\_16; 修订日期: 2006\_02\_10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10232020; 90205021); 全国博士学位论文作者专项基金资助项目(200328)

作者简介: 董明(1981), 男, 辽宁人, 硕士(Tel: + 86\_22\_27403374; E\_mail: dongm27890175@eyou.com); 罗纪生(联系人, Tel/Fax: + 86\_22\_27407025; E\_mail: jsluo@tju.edu.cn)

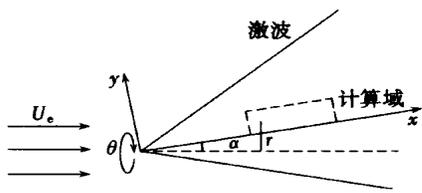


图1 计算域的示意图

直改变,向锥体母线方向偏转 为了研究边界层中扰动的演化,采取贴体坐标系,计算域  $(x, y, z)$  的示意图如图1所示 计算域上边界在边界层以外的无粘区域而且比较贴近物面,可以把上边界近似的看作一条锥线,则上边界的各个物理量为常数 用这些物理量对可压缩流体的方程无量纲化,长度以边界层入口位移厚度无量纲化

无量纲化后的可压缩流体的方程可以写为:

$$-\frac{U}{t} + \frac{E}{x} + \frac{F}{y} + M = \frac{E_v}{x} + \frac{F_v}{y}, \quad (1)$$

其中,

$$U = \begin{pmatrix} r \\ r u \\ r v \\ r e_s \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} r u \\ r uu + \rho p \\ r w \\ ru(e_s + p) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} r v \\ r vu \\ r vv + \rho p \\ rv(e_s + p) \end{pmatrix},$$

$$E_v = \begin{pmatrix} 0 \\ r_{xx} \\ r_{xy} \\ r(xx u + xy v - q_x) \end{pmatrix}, \quad F_v = \begin{pmatrix} 0 \\ r_{xy} \\ r_{yy} \\ r(xy u + yy v - q_y) \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ z \sin - p \sin \\ z \cos - p \cos \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$e_s = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{p}{(\gamma - 1)}, \quad \rho_{xx} = \frac{Re}{\gamma} \left[ 2 \frac{u}{x} - \frac{2}{3} V \right],$$

$$\rho_{xy} = \rho_{yx} = \frac{Re}{\gamma} \left[ \frac{u}{y} + \frac{v}{x} \right], \quad \rho_{yy} = \frac{Re}{\gamma} \left[ 2 \frac{v}{y} - \frac{2}{3} V \right],$$

$$\rho_{zz} = 2 \left[ \frac{u}{r} \sin + \frac{v}{r} \cos \right] - \frac{2}{3} V, \quad V = \frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{u \sin}{r} + \frac{v \cos}{r},$$

$$q_x = \frac{k}{(\gamma - 1) Ma^2 Re Pr} \frac{T}{x}, \quad q_y = \frac{k}{(\gamma - 1) Ma^2 Re Pr} \frac{T}{y},$$

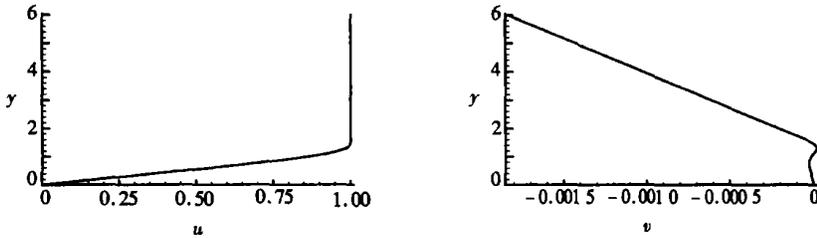
$r = x \sin + y \cos$  表示定点到圆锥轴线的距离;  $V = (u, v)$  分别为流体流向、法向速度,  $p, T, \rho$  为压力、温度、密度,  $k$  为粘性系数、传热系数,  $q_x, q_y$  为热通量,  $Re$  为雷诺数,  $Pr$  为 Prandtl 数

数值模拟的流动环境相当于 10 000 m 的高空气体,温度为 223.3 K,声速为 299.5 m/s,压力为 26 500 Pa,密度为 0.413 5 kg/m<sup>3</sup>,动力学粘性系数为 1.458  $\times 10^{-5}$  Pa s 取来流 Mach 数为 5.29,这样过激波后 Mach 数降为 4.63,温度、密度分别为 278.1 K,0.688 kg/m<sup>3</sup> 再用理想气体方程组与锥形流特点可以计算出计算域上边界的 Mach 数为 4.50,温度、密度分别为 291.5 K 与 0.774 kg/m<sup>3</sup>,声速为 342.2 m/s,动力学粘性系数变为 2.169  $\times 10^{-5}$  Pa s,单位 Reynolds 数为 5.5  $\times 10^7$  m<sup>-1</sup> 取计算域入口 Reynolds 数  $Re$  为 58 000,则该处位移厚度为 1.05 mm,入口距锥尖 0.84 m 处

计算中对流项采取五阶弱迎风紧致差分格式,粘性项采取六阶中心型紧致差分格式,时间上采用二阶 Runge-Kutta 法

入口边界条件给定, 出口和上边界用 Lele 等人<sup>[1]</sup> 建议的无反射边界条件, 锥面上用速度无滑移、温度绝热条件

用由边界层方程得到的相似解作为初始流场, 用数值模拟计算到定常得到基本流场 得到的速度分布如图 2 所示



(a) 流向速度 (b) 法向速度

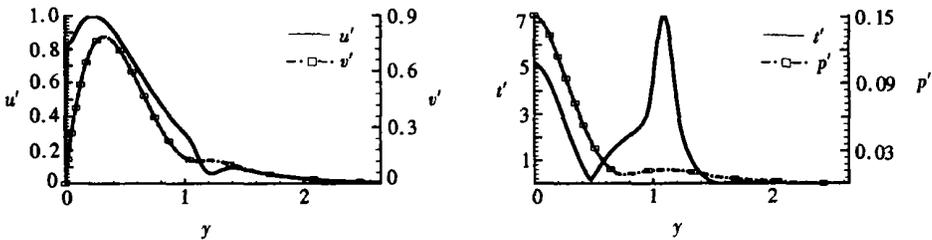
图 2 尖锥边界层基本流速度分布

## 2 扰动演化的数值模拟结果及分析

研究扰动演化时, 入口加入扰动的速度、温度、压力为

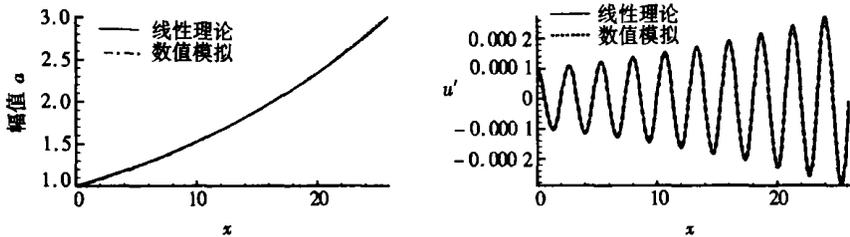
$$(u, v, t, p) = a[(\hat{u}, \hat{v}, \hat{t}, \hat{p})e^{i(x-t)} + c. c.], \quad (2)$$

其中  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{t}, \hat{p})$  为线性扰动方程的特征函数解,  $c. c.$  为前面表达式的共轭复数,  $a$  为扰动的幅值 扰动取第二模态的 T-S 波, 其扰动频率  $\omega = 2.1611143$ , 扰动波数  $\alpha = 2.362037$ , 扰动波的幅值增长率  $\gamma = 0.043277i$ , 扰动的传播速度  $c = \omega / \alpha = 0.915$ , 波长  $\lambda = 2\pi / \alpha = 2.66$  扰动特征函数分布如图 3 所示



(a) 流向速度  $u'$  和法向速度  $v'$  (b) 温度  $t'$  和压力  $p'$

图 3 扰动的特征函数的分布



(a) 扰动幅值增长曲线 (b)  $y = 0.22$  处扰动速度的瞬时值

图 4 小扰动沿流向的演化

数值模拟中  $x$  方向用均匀网格,  $y$  方向用变网格, 变换为  $y = y_n(e^b - 1)/(e^b - 1)$ , 其中  $b = 3.0$ ,  $y$  的计算域长度  $y_n = 6.0$ ,  $x = 0 \sim 1$

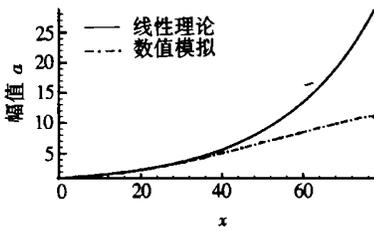
### 2.1 小幅值扰动的演化

为了比较线性流动稳定性理论的结果,研究了小扰动的演化情况 在入口引入幅值  $a = 0.0001$  的小扰动,图 4(a) 给出了数值模拟得到的扰动幅值的空间演化结果,图 4(b) 给出了  $y = 0.22$  处扰动速度  $u$  随  $x$  的变化曲线,与线性理论预测结果吻合得很好

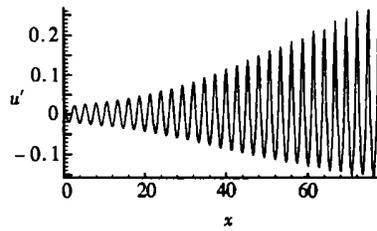
这一结果表明,虽然尖锥边界层流存在着一定的锥面法向速度,但由平行流假设得到的线性理论是可以给出小扰动的幅值及相位的演化规律的

### 2.2 有限幅值扰动的演化

当扰动幅值增长到一定值时,非线性作用将明显增强 本文在入口引入幅值  $a = 0.02$  的 T<sub>S</sub> 波扰动,来研究流场演化过程中的非线性作用 图 5 给出了扰动的空间演化情况 可以看出,扰动的幅值演化明显比线性理论的结果偏小,扰动速度也上下不对称了,这表明与基本流相比,周期平均流有了明显的修正



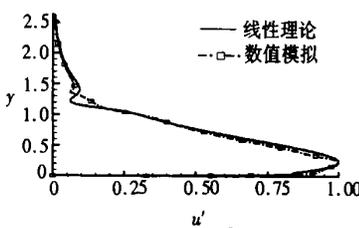
(a) 扰动幅值的增长曲线



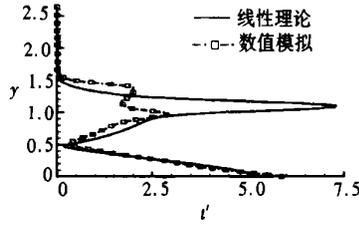
(b)  $y = 0.22$  处扰动速度的瞬时值

图 5 有限幅值扰动沿流向的演化

图 6 给出  $x = 68$  处数值模拟的扰动剖面与线性理论得到的特征函数的比较,这里扰动的幅值已经增长到 0.17 可以看出扰动沿法向的分布,特别是扰动温度有了很大的变化



(a) 扰动速度  $u$



(b) 扰动温度  $t$

图 6 有限幅值扰动剖面与线性理论结果的比较

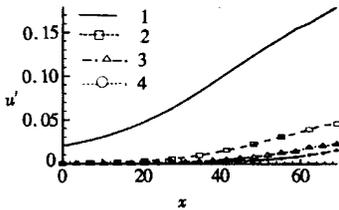


图 7 非线性作用下各次谐波的幅值

由于非线性作用,扰动会激发出高次谐波,图 7 给出 1 至 4 次谐波的幅值演化曲线,可以看出,高次谐波特别是 2 次谐波的幅值已经比较大了,其影响已经不能忽略了

### 2.3 关于小激波的研究

当扰动增长到一定幅值的时候,超音速平板边界层中会出现小激波<sup>[2,3]</sup> 本文特别研究了尖锥边界层中是否也会出现小激波

流场中的小激波为运动激波,因此,在流场中相对 Mach 数  $\overline{Ma} = (u - u_s) Ma_e / T^{1/2}$  跨越 1 的点处有可能存在小激波 其中  $Ma_e$  为计算域上边界处的 Mach 数,  $u_s$  为小激波的运动速度 为了简单,  $u_s$  取为流场中扰动的相速度 图 8 是入口引

入幅值  $a = 0.05$  的 T\_S 波扰动, 在某一时刻的相对 Mach 数跨越 1 的点的分布, 小激波可能在这一区域出现

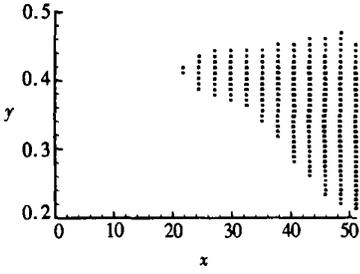


图 8 相对 Mach 数跨越 1 的点

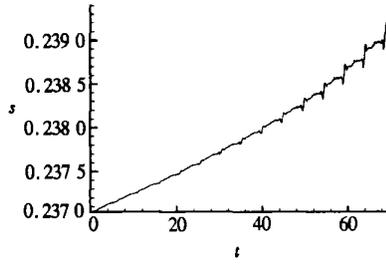


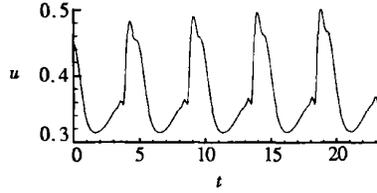
图 9 质点熵随时间的变化曲线

为了验证这一区域的确存在小激波, 还需考察流体质点熵的变化. 选取某一时刻位于  $x = 17.3, y = 0.406$  处的流体质点(此处幅值为 0.075), 考察其位置、速度及熵随时间的变化. 图 9 给出的计算结果可以看出, 开始扰动比较小, 熵的变化比较平缓; 当扰动速度增长到 0.12 左右时, 熵有了明显的跳跃

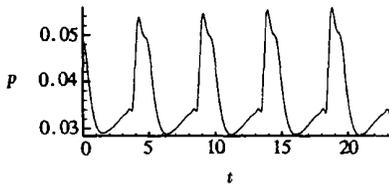
图 10 给出了扰动幅值增长到 0.18, 熵跳跃时, 各物理量随时间的变化情况. 可以发现, 在熵跳跃的地方速度  $u$  与压力  $p$  都有突然的跳跃, 相对 Mach 数也从 1.3 突降到 0.9, 可见熵跳跃处体现了激波的性质. 因此, 我们认为在熵跳跃的地方是小激波



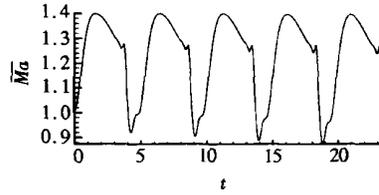
(a) 熵随时间的变化



(b) 流向速度随时间的变化



(c) 压力随时间的变化



(d) 相对 Mach 数随时间的变化

图 10 跟踪某一质点的各物理量随时间的变化

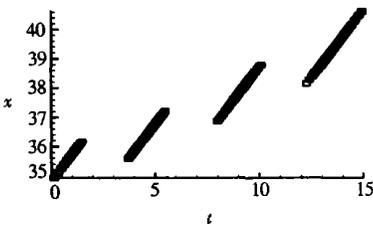


图 11 小激波位置随时间的变化

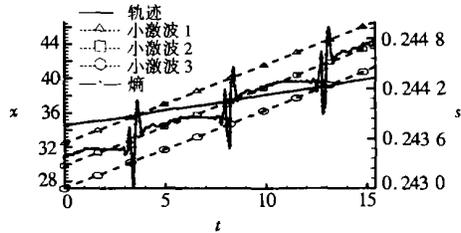


图 12 小激波、质点的运动及熵的变化

图 11 给出了小激波位置随时间的变化关系, 可以测出小激波的传播速度为 0.92, 两个相邻激波间的距离约为 2.67。小激波的传播速度和波长与扰动的相速度和波长近似, 这表明小激波是由扰动幅值增大而产生的。

流体的速度为 0.4 左右, 比小激波的传播速度小, 流体质点比小激波向下游运动慢, 所以小激波将赶上流体质点向下游传播。图 12 给出了 3 个小激波和流体质点的运动轨迹以及流体质点熵随时间的变化。可以看出, 当小激波赶上流体质点时, 流体质点的熵发生了突变。

### 3 结 论

对来流 Mach 数为 5.29 的零攻角超音速尖锥边界层扰动演化的数值模拟的结果表明: 入口引入小幅值 T-S 波时, 扰动的幅值及相位的空间演化与平行流假设的线性理论结果符合很好。这表明虽然零攻角超音速可压缩尖锥边界层的基本流有法向速度, 但在平行流假设下的线性稳定性理论结果仍然是一个很好的近似; 当扰动增长为有限幅值时, 非线性作用使扰动的高次谐波增长起来, 扰动的幅值增长率也比线性理论预测的小很多, 扰动沿法向的分布特征有了明显的变化; 当扰动幅值继续变大到 0.12 左右的时, 流场中将出现小激波, 小激波的传播速度和间距与扰动波的相速度和波长基本一致。穿过小激波时, 速度、压力、熵等物理量有突然跳跃。

#### [参 考 文 献]

- [1] Poinso T J, Lele S K. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows[J]. *Journal of Computational Physics*, 1992, **101**(1): 104–129.
- [2] 黄章峰, 周恒. 超音速边界层中二维扰动的演化及小激波的产生[J]. *应用数学和力学*, 2004, **25**(1): 1–8.
- [3] 曹伟, 周恒. 二维高超音速边界层扰动演化的数值研究及小激波的存在对流场结构的影响[J]. *中国科学, G 辑*, 2004, **34**(2): 203–212.

## Numerical Investigation of the Evolution of Disturbances in Supersonic Sharp Cone Boundary Layers

DONG Ming, LUO Ji\_sheng, CAO Wei

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P.R. China)

**Abstract:** The spatial evolution of 2-D disturbances in supersonic sharp cone boundary layers was investigated by direct numerical simulation (DNS) in high order compact difference scheme. The results obtained suggested that although the normal velocity in the sharp cone boundary layer is not small, the evolution of amplitude and phase for small amplitude disturbances would be well in accord with the results obtained by the linear stability theory (LST) which supposes the flow is parallel. The evolution of some finite amplitude disturbances was also investigated, and the characteristic of the evolution was shown. And shocklets were also found when the amplitude of the disturbances over some value.

**Key words:** supersonic sharp cone boundary layer; disturbance; direct numerical simulation; shocklet