文章编号: 1000_0887(2006) 06_0637_09

Banach 空间无界域上二阶脉冲积分微分方程的解*

陈芳启[1,2], 田瑞兰[2], 陈予恕[2]

(1. 南京航空航天大学 理学院, 南京 210016;
2. 天津大学 力学系, 天津 300072)

(我刊编委陈予恕来稿)

摘要: 在比较宽松的条件下, 研究了 Banach 空间中二阶脉冲积分微分方程在正半实轴上具有无穷个脉冲点的初值问题的解的存在性· 利用递归法、Tonelii 序列和局部凸拓扑, 建立了新的存在性定理, 对郭大钧的结果做了本质改进·

关 键 词: 脉冲积分微分方程; Tonelii 序列; 局部凸拓扑; 非紧性测度
中图分类号: O175.6 文献标识码: A

引 言

考虑 Banach 空间 E 中二阶脉冲方程

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, Tx), & \forall t \in J,\ t \neq t_k (k = 1, 2, 3, \cdots), \\ \Delta x|_{t=t_k} = I_k(x(t_k)), & (k = 1, 2, 3, \cdots), \\ \Delta x'|_{t=t_k} = \bar{I}_k(x(t_k)), & (k = 1, 2, 3, \cdots), \\ x(0) = x_0,\ x'(0) = x_0^*, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\mathrm{R}^+ = [0, +\infty)$, $J = \mathrm{R}^+$, $0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots$, $t_k \to +\infty (k \to +\infty)$, $x_0, x_0^* \in E$, $f \in C(J \times E \times E, E)$, $I_k, \bar{I}_k \in C(E, E) (k = 1, 2, 3, \cdots)$,

$$(Tx)(t) = \int_0^t K(t, s) x(s) \mathrm{d}s, \tag{2}$$

$K \in C(D, \mathrm{R}^+)$, $D = \{(t, s) \in J \times J : t \geqslant s\}$,

$$K^* = \sup_{t \in J} \int_0^t K(t, s) \mathrm{d}s < +\infty, \tag{3}$$

$\Delta x|_{t=t_k} = x(t_k^+) - x(t_k^-)$, 其中 $x(t_k^+)$ 和 $x(t_k^-)$ 分别代表 $x(t)$ 在 $t = t_k$ 处的右极限和左极限· $\Delta x'|_{t=t_k}$ 对于 $x'(t)$ 有类似的定义·

郭大钧在文献[1] 中研究了无穷区间上的具有无限个脉冲点的非线性二阶脉冲积分微分

* 收稿日期: 2005_03_15; 修订日期: 2006_02_28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572057)
作者简介: 陈芳启(1963—), 男, 山东人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人. Tel: + 86_25_84894953; E_mail: cfqyyf@eyou.com)·

方程初值问题(IVP)的最小非负解• 本文在比较宽松的条件下,利用递归法、Tonelii 序列和局部凸拓扑,得到了方程(1)的极值解的一些存在性定理,对文献[1]中的结果做了本质改进•

1 预备知识

设 $PC(J,E)=\left\{x: x\right.$ 是映J 到E 的映射且满足:在 $t\neq t_k$ 处连续,在 $t=t_k$ 处$x(t)$ 左连续且$\lim\limits_{t\to t_k^+}x(t)$ 存在,$\left.k=1,2,3,\cdots\right\}$, $PC^1(J,E)=\left\{x\mid x\in PC(J,E): x'(t)\right.$ 在 $t\neq t_k$ 处连续,且 $x'(t_k^-),x'(t_k^+)$ 存在,$\left.k=1,2,3,\cdots\right\}$• 显然,$PC(J,E)$ 在范数 $\|x\|_{PC}=\sup\limits_{t\in J}\|x(t)\|$ 下是一 Banach 空间•

令 $0<T_1<T_2<\cdots<T_n<\cdots$,其中 $T_n\to+\infty(n\to+\infty)$ 且 $T_i\neq t_j$, $\forall i,j$• 对每一个固定的 T_k,记 $\|x\|_{T_k}=\sup\left\{\|x(t)\|: 0\leqslant t\leqslant T_k\right\}$, $\forall x\in PC(J,E)$,其中 $\|\cdot\|$ 为 E 中的范数• 显然,$\|\cdot\|_{T_k}$ 是$PC(J,E)$ 中的半范数,由半范数族$\left\{\|\cdot\|_{T_k}: k=1,2,\cdots\right\}$生成的局部凸拓扑 τ 即是在$J$ 的任何紧子集上的一致收敛拓扑•

记 $SPC(J,E)=\left\{x\in PC(J,E): \sup\limits_{t\in J}\left\{\dfrac{\|x(t)\|}{t+1}\right\}<+\infty\right\}$• $\forall x\in SPC(J,E)$,令

$$\|x\|_S=\sup\left\{\frac{\|x(t)\|}{t+1}: t\in J\right\},$$

显然,$SPC(J,E)$ 在范数 $\|\cdot\|_S$ 下是一 Banach 空间•

记$K_r=\left\{x\in E: \|x\|\leqslant r\right\}(r>0)$, $J'=J\setminus\left\{t_1,t_2,\cdots\right\}$, $J_0=[0,t_1]$, $J_1=(t_1,t_2]$, $\cdots$, $J_k=(t_k,t_{k+1}]$, $\cdots$, α 表示 Kuratowski 非紧性测度• $\forall D\subset PC(J,E)$,记 $D(t)=\left\{x(t): x\in D\right\}\subset E(t\in J)$•

本文对固定的 T_k, $PC([0,T_k],E)$ 表示 $PC(J,E)$ 中的函数限制在$[0,T_k]$ 构成的空间,它在范数 $\|\cdot\|_{T_k}$ 下为 Banach 空间• 令 $0<t_1<t_2<\cdots<t_{m_k}<T_k$,并记 $J_1'=[0,t_1]$, $J_2'=[0,t_2]$, $\cdots$, $J_j'=[0,t_j]$, $\cdots$• 对任意的J_j', $PC(J_j',E)$ 表示$PC(J,E)$ 中的函数限制在 J_j' 上所构成的空间•

引理 1.1[1] 如果 $x\in PC(J,E)\cap PC^1(J,E)\cap C^2(J',E)$,则

$$x(t)=x(0)+tx'(0)+\int_0^t(t-s)x''(s)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}\left\{[x(t_k^+)-x(t_k)]+(t-t_k)[x'(t_k^+)-x'(t_k^-)]\right\},\qquad t\in J• \tag{4}$$

引理 1.2[1] 设 $x\in PC(J,E)\cap PC^1(J,E)\cap C^2(J',E)$ 是IVP(1) 的解当且仅当 $x\in PC(J,E)$ 是下列脉冲积分方程的解

$$x(t)=x_0+tx_0^*+\int_0^t(t-s)f(s,x(s),(Tx)(s))\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}[I_k(x(t_k))+(t-t_k)I_k(x(t_k))]• \tag{5}$$

引理 1.3[2,3] 设 $D=\left\{x_n\right\}\subset PC(J_j',E)$(或 $D=\left\{x_n\right\}\subset PC([0,T_k],E)$)有界,$D$ 中的函数在 $J_k(k=0,1,2,\cdots,j-1)$(或 $J_k(k=0,1,2,\cdots,m_k-1)$ 与$(t_{m_k},T_k]$)上等度连续,则

(i) $\alpha(D)=\sup\limits_{t\in[0,T_k]}\alpha(D(t))$;

(ii) 若$\left\{\varepsilon_n\right\}\subset \mathrm{R}^+$并且 $\varepsilon_n\downarrow 0$,则

$$\alpha(\{x_n(t-\varepsilon_n)\}) = \alpha(\{x_n(t)\}),$$
$$\forall t \in J_j' \setminus \{0, t_1, t_2, \cdots, t_{j-1}\}(\text{或 } t \in (0, T_k] \setminus \{t_1, t_2, \cdots, t_{m_k}\})\text{.}$$

引理 1.4[4] 设 $p \in C(J, \mathrm{R}^+)$,

$$p(t) \leqslant M_1\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s + M_2(t-t_0)\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s + M_3(t-t_0)\int_{t_0}^{t_0+a} p(s)\mathrm{d}s, \tag{6}$$

其中 $J=[t_0, t_0+a]$, $M_1>0$, $M_2\geqslant 0$, $M_3\geqslant 0$ 是满足下列条件之一的常数:

(i) $aM_3(\mathrm{e}^{a(M_1+aM_2)}-1) < M_1+aM_2$;

(ii) $a(2M_1+aM_2+aM_3) < 2$.

则 $p(t)\equiv 0$, $\forall t \in J$.

引理 1.5[5] 设 $J=J_j'$(或 $J=[0, T_k]$), $D=\{x_n\}\subset L(J, E)$ 且存在 $g\in L(J, \mathrm{R}^+)$, 使得对一切 $x_n\in D$, $\|x_n(t)\|\leqslant g(t)$, a.e., $t\in J$, 则

$$\alpha\left(\left\{\int_0^t x_n(s)\mathrm{d}s \,\middle|\, n\in \mathrm{N}\right\}\right) \leqslant 2\int_0^t \alpha(D(s))\mathrm{d}s, \qquad \forall t \in J\text{.}$$

引理 1.6[3] 设 $J=J_j'$(或 $J=[0, T_k]$), $D\subset C(J, E)$ 是等度连续的有界集, 则 $\alpha(D(t))\in C(J, \mathrm{R}^+)$.

引理 1.7 设 $p\in C(J_i, \mathrm{R}^+)$ $(i=0, 1, \cdots, j-1)$ 有界, 且

$$p(t) \leqslant L\int_0^t p(s)\mathrm{d}s + \sum_{0<t_i<t} M_i p(t_i), \qquad \forall t \in J_j', \tag{7}$$

其中 $L>0$, $M_i\geqslant 0$ $(i=0, 1, \cdots, j-1)$. 则 $p(t)=0$, $\forall t\in J_j'$.

证明 我们利用递归法证明引理 1.7.

(a) $\forall t\in J_0=[0, t_1]$, 由式(7)知,

$$p(t) \leqslant L\int_0^t p(s)\mathrm{d}s\text{.}$$

根据引理 1.4 可知, $p(t)=0$ $(t\in J_0)$, 特别地, $p(t_1)=0$. 更进一步, 由式(7), 可得

$$p(t_1^+) \leqslant L\int_0^{t_1^+} p(s)\mathrm{d}s + M_1 p(t_1) = L\int_{t_1}^{t_1^+} p(s)\mathrm{d}s\text{.}$$

显然, $p(t_1^+)=0$.

(b) $\forall t\in J_1=(t_1, t_2]$, 由式(7)知

$$p(t) \leqslant L\int_0^t p(s)\mathrm{d}s + M_1 p(t_1)\text{.}$$

由证明(a), 我们得到 $p(t)=0$ $(t\in[0, t_1])$, 因此

$$p(t) \leqslant L\int_{t_1^+}^t p(s)\mathrm{d}s\text{.}$$

令

$$m(t) = \begin{cases} p(t), & t\in(t_1, t_2], \\ p(t_1^+)=0, & t=t_1, \end{cases}$$

显然, $m\in C([t_1, t_2], \mathrm{R}^+)$ 且 $\forall t\in[t_1, t_2]$, 有

$$m(t) \leqslant L\int_{t_1}^t m(s)\mathrm{d}s\text{.}$$

由引理 1.4, $m(t)=0$ $(t\in[t_1, t_2])$. 因此 $p(t)=0$ $(t\in(t_1, t_2])$, 特别地, $p(t_2)=0$ 并且

$p(t_2^+) = 0$. 如此继续下去, 可以得到

$$p(t) = 0 \ (t \in J_i) \qquad (i = 3, 4, \cdots, j-1).$$

故 $p(t) = 0, \ \forall t \in J_j'$.

2 主要定理

定义算子A:

$$(Ax)(t) = x_0 + tx_0^* + \int_0^t (t-s) f(s, x(s), (Tx)(s)) \mathrm{d}s + \sum_{0<t_k<t} [I_k(x(t_k)) + (t-t_k) \bar{I}_k(x(t_k))], \qquad t \in J, \tag{8}$$

则

$$(Ax)'(t) = x_0^* + \int_0^t f(s, x(s), (Tx)(s)) \mathrm{d}s + \sum_{0<t_k<t} \bar{I}_k(x(t_k)), \qquad t \in J. \tag{9}$$

为方便起见, 列出下列假设:

(H_1) 对于 $\forall r > 0$, f 在 $J \times K_r \times K_r$ 上是一致连续.

(H_2) 存在常数 $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $p \in C(J, \mathrm{R}^+)$ 使得

$$\| f(t, x, y) \| \leqslant p(t)(a + b\|x\| + c\|y\|), \qquad \forall t \in J$$

且

$$p^* = \int_0^{+\infty} (t+1) p(t) \mathrm{d}t < +\infty, \ (b + ck^*) p^* + \bar{b}^* < 1.$$

(H_3) 存在非负常数 a_k, b_k, c_k $(k = 1, 2, \cdots)$ 满足

$$\| I_k(x) \| \leqslant b_k \|x\| + a_k, \quad \| \bar{I}_k(x) \| \leqslant c_k, \qquad \forall x \in E \tag{10}$$

且

$$a^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty, \ b^* = \sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty, \ c^* = \sum_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty. \tag{11}$$

(H_4) $\forall t \in J$,

$$x_1 \leqslant x_2, \ y_1 \leqslant y_2 \Rightarrow f(t, x_1, y_1) \leqslant f(t, x_2, y_2)$$

且

$$x_1 \ll x_2 \Rightarrow I_k(x_1) \ll I_k(x_2), \ x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow \bar{I}_k(x_1) \leqslant \bar{I}_k(x_2).$$

引理 2.1[1] 由式(2)定义的算子 $T: SPC(J, E) \to SPC(J, E)$ 是有界线性算子, 且 $\|T\| \leqslant k^*$.

引理 2.2 设(H_1)~(H_3)成立, 则 A 是映 $PC(J, E)$ 到 $PC(J, E)$ 的关于拓扑 τ 连续的算子, 并且存在足够大的常数 $R > 0$, 使得 $A: B_R(x_0) \to B_R(x_0)$, 其中 $B_R(x_0) = \left\{ x \in SPC(J, E): \|x - x_0\|_S \leqslant R \right\}$.

证明 1) 显见 A 映 $PC(J, E)$ 到 $PC(J, E)$. 令

$$(A^{(1)}x)(t) = x_0 + tx_0^* + \int_0^t (t-s) f(s, x(s), (Tx)(s)) \mathrm{d}s \qquad t \in J$$

及

$$(A^{(2)}x)(t) = \sum_{0<t_k<t} [I_k(x(t_k)) + (t-t_k) \bar{I}_k(x(t_k))], \qquad t \in J,$$

故 $Ax = A^{(1)}x + A^{(2)}x$。令 $x_n \subset PC(J, E)$ 关于 τ 收敛到 x。即在任何紧区间 $[0, T_k] \subset J$ 上，当 $n \to \infty$，$x_n(t)$ 一致收敛于 $x(t)$。易知算子 $A^{(1)}$ 连续。对每一个确定的 T_k，当 $t \in [0, T_k]$，$A^{(2)}$ 仅是有限项的和，因此 $A^{(2)}$ 连续。故 A 是映 $PC(J, E)$ 到 $PC(J, E)$ 的连续算子。

2) 下证存在一个足够大的常数 $R > 0$，使得 $A: B_R(x_0) \to B_R(x_0)$。

令

$$\beta = 1 - [(b + ck^*)p^* + b^*] > 0$$

且

$$R \geqslant \frac{1}{\beta}\left\{c^* + \|x_0^*\| + ap^* + [(b + ck^*)p^* + b^*]\,\|x_0\|_S\right\}.$$

由式(8)~(11)、(H_1)可知，$\forall x \in B_R(x_0)$，$t \in J$，有

$$\begin{aligned}
&\frac{\|(Ax)(t) - x_0(t)\|}{t+1} \leqslant \\
&\|x_0^*\| + \frac{1}{t+1}\int_0^t (t-s)p(s)(a + b\|x(s)\| + c\|(Tx)(s)\|)\,\mathrm{d}s + \\
&\frac{1}{t+1}\sum_{0<t_k<t}\left\{(a_k + b_k\|x(t_k)\|) + (t - t_k)c_k\right\} \leqslant \\
&\|x_0^*\| + \int_0^t \frac{t-s}{t+1}p(s)(s+1)\left(\frac{a}{s+1} + b\|x(s)\|_S + c\|(Tx)(s)\|_S\right)\mathrm{d}s + \\
&\sum_{0<t_k<t}\left\{\frac{a_k}{t+1} + \frac{(t_k+1)b_k}{t+1}\,\frac{\|x(t_k)\|}{t_k+1} + \frac{(t-t_k)c_k}{t+1}\right\} \leqslant \\
&\|x_0^*\| + ap^* + (b + ck^*)p^*\,\|x\|_S + a^* + b^*\,\|x\|_S + c^*
\end{aligned}$$

即

$$\|(Ax)(t) - x_0(t)\|_S \leqslant \beta R + (1-\beta)R = R.$$

因而，$A: B_R(x_0) \to B_R(x_0)$。

定理 2.1 设(H_1)~(H_3)成立。若 $\forall r > 0$，存在 $L_r^{(1)}(t) \in C(J, \mathrm{R}^+)$，$L_r^{(2)}(t) \in C(J, \mathrm{R}^+)$，使得

$$\alpha(f(t, U, V)) \leqslant L_r^{(1)}(t)\,\alpha(U) + L_r^{(2)}(t)\,\alpha(V), \qquad t \in J,\ U \subset K_r,\ V \subset K_r, \tag{12}$$

则方程(1)在 $PC(J, E) \cap PC^1(J, E) \cap C^2(J', E)$ 中至少有一解。

证明　显然，$x \in PC(J, E) \cap PC^1(J, E) \cap C^2(J', E)$ 是方程(1)的解当且仅当 $Ax = x$。

由引理 2.2 知，A 是映 $PC(J, E)$ 到 $PC(J, E)$ 关于拓扑 τ 连续的算子，且存在足够大的常数 $R > 0$，使得 $A: B_R(x_0) \to B_R(x_0)$。

取 $0 < \gamma < t_1$，定义 Tonelii 近似序列 $\{x_n\}$，

$$\begin{aligned}
x_n(t) &= x_0(-t), \qquad -\gamma \leqslant t \leqslant 0, \\
x_n(t) &= x_0 + tx_0^* + \int_0^t (t-s)f\left(s, x_n\left(s - \frac{\gamma}{n}\right), (Tx_n)\left(s - \frac{\gamma}{n}\right)\right)\mathrm{d}s + \\
&\quad \sum_{0<t_k<t-\gamma/n}[I_k(x_n(t_k)) + (t - t_k)\bar{I}_k(x_n(t_k))],
\end{aligned} \tag{13}$$

则

$$\begin{aligned}
x_n'(t) &= x_0'(-t), \qquad -\gamma \leqslant t \leqslant 0, \\
x_n'(t) &= x_0^* + \int_0^t f\left(s, x_n\left(s - \frac{\gamma}{n}\right), (Tx_n)\left(s - \frac{\gamma}{n}\right)\right)\mathrm{d}s +
\end{aligned}$$

$$\sum_{0<t_k<t-\gamma/n} I_k(x_n(t_k)), \tag{14}$$

$\forall t\in[0,\gamma/n]$ 有

$$\frac{\|x_n(t)-x_0(t)\|}{t+1}\leqslant$$
$$\|x_0^*\|+\frac{1}{t+1}\int_0^t(t-s)p(s)\left(a+b\left\|x_n\left(s-\frac{\gamma}{n}\right)\right\|+c\left\|(Tx_n)\left(s-\frac{\gamma}{n}\right)\right\|\right)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\|x_0^*\|+ap^*+(b+ck^*)p^*\|x\|_S+a^*+b^*\|x\|_S+c^*\leqslant$$
$$\beta R+(1-\beta)R=R.$$

利用递推法知,

$$\frac{\|x_n(t)-x_0(t)\|}{t+1}\leqslant R,\qquad \forall t\in J,$$

即$\{x_n\}\subset B_R(x_0)$. 故

$$\|x_n(t)\|\leqslant(\|x_0(t)\|_S+R)\cdot(t+1),\qquad \forall t\in J$$

且

$$\|x_n(t)\|\leqslant(\|x_0(t)\|_S+R)\cdot(1+T_k)\equiv R_{T_k},\qquad \forall t\in[0,T_k].$$

同理可知

$$\|x_n'(t)\|\leqslant(\|x_0(t)\|_S+R)\cdot(t+1),\qquad \forall t\in J$$

且

$$\|x_n'(t)\|\leqslant(\|x_0(t)\|_S+R)\cdot(1+T_k)\equiv R_{T_k},\qquad \forall t\in[0,T_k].$$

故$\{x_n\}$在$[0,T_k]$上一致有界, 并且$\{x_n\}$中的元素在$J_k(k=0,1,2,\dots,m_{k-1})$和$(t_{m_k},T_k]$上等度连续.

本文中$\{x_n\}_{[0,T_k]}(\{x_n\}_{J_j'})$是$\{x_n\}$中的元素限制在$[0,T_k](J_j')$所组成的集合, 用 U、$U_{[0,T_k]}$ 和 $U_{J_j'}$ 分别表示$\{x_n\}$、$\{x_n\}_{[0,T_k]}$ 和$\{x_n\}_{J_j'}$.

由引理1.3, 可得

$$\alpha(U_{[0,T_k]})=\sup_{t\in[0,T_k]}\alpha(U_{[0,T_k]}(t)). \tag{15}$$

对固定的 T_k, 由式(13)、(14), 可知

$$\{x_n(t_i)\}_{[0,T_k]}=\{x_n(t_i)\}_{J_j'}\qquad(i\leqslant j,j=1,2,\dots,m_k,i=1,2,\dots,m_k)$$

即

$$U_{[0,T_k]}(t_i)=U_{J_j'}(t_i)\qquad(i\leqslant j,j=1,2,\dots,m_k,i=1,2,\dots,m_k). \tag{16}$$

令

$$N_{T_k}=\max_{0\leqslant s\leqslant T_k}\left\{T_k\left[L_{R_{T_k}}^{(1)}(s)+L_{R_{T_k}}^{(2)}(s)\max_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T_k}K(t,s)\right]\right\},$$

取$L^{(k)}>0$为充分大的常数使得

$$\beta_k\equiv\frac{2N_{T_k}}{L^{(k)}}<1. \tag{17}$$

以下我们将利用递归方法.

1) $\forall t\in J_1'=J_0=[0,t_1]$, 由引理1.3和引理1.5可知

$$\alpha(U_{J_1'}(t))\leqslant\alpha\left(\left\{\int_0^t(t-s)f\left(s,x_n\left(s-\frac{\gamma}{n}\right),(Tx_n)\left(s-\frac{\gamma}{n}\right)\right)\mathrm{d}s\right\}\right)\leqslant$$

$$2T_k \max_{0\leqslant s\leqslant T_k}\left\{L_{R_{T_k}}^{(1)}(s)+L_{R_{T_k}}^{(2)}(s)\max_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T_k}K(t,s)\right\}\int_0^t \alpha(U'_{J_1}(s))\mathrm{d}s\cdot$$

令 $p(t)=\alpha(U'_{J_1}(t))$, 由引理 1.6, 显然, $p\in C(J'_1, \mathrm{R}^+)$, 且

$$p(t)\leqslant 2N_{T_k}\int_0^t p(s)\mathrm{d}s\cdot$$

由引理 1.7, 可知 $p(t)=0\ (t\in J'_1)$. 因此

$$\alpha(U'_{J_1}(t))=0,\qquad \forall t\in J'_1,$$

特别地

$$\alpha(U'_{J_1}(t_1))=0\cdot \tag{18}$$

由式(16)得

$$\alpha(U_{[0,T_k]}(t_1))=0$$

及

$$\alpha(U'_{J_j}(t_1))=0\qquad (j=2,3,\cdots,m_k)\cdot \tag{19}$$

2) $\forall t\in J'_2=[0,t_2]$, 由引理 1.3 和引理 1.5 知

$$\begin{aligned}\alpha(U'_{J_2}(t))\leqslant{}&\alpha\left(\left\{\int_0^t(t-s)f\left(s,x_n\left(s-\frac{\gamma}{n}\right),(Tx_n)\left(s-\frac{\gamma}{n}\right)\right)\mathrm{d}s\right\}\right)+\\&\alpha\left(\left\{\sum_{0<t_i<t-\gamma/n}[I_i(x_n(t_i))+(t-t_i)\bar I_i(x_n(t_i))]\right\}\right)\leqslant\\&2T_k \max_{0\leqslant s\leqslant T_k}\left\{L_{R_{T_k}}^{(1)}(s)+L_{R_{T_k}}^{(2)}(s)\max_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T_k}K(t,s)\right\}\int_0^t \alpha(U'_{J_2}(s))\mathrm{d}s+\\&\alpha(I_1(U'_{J_2}(t_1)))+t_2\alpha(\bar I_1(U'_{J_2}(t_1)))\cdot\end{aligned}$$

由(19)式可知, $U'_{J_2}(t_1)$ 是 $PC(J'_2,E)$ 中的相对紧集, 又 $I_1\in C(E,E)$, $\bar I_1\in C(E,E)$, 因此

$$\alpha(I_1(U'_{J_2}(t_1)))=0,\quad \alpha(\bar I_1(U'_{J_2}(t_1)))=0\cdot$$

故

$$\alpha(U'_{J_2}(t))\leqslant 2N_{T_k}\int_0^t \alpha(U'_{J_2}(s))\mathrm{d}s\cdot \tag{20}$$

令 $p(t)=\alpha(U'_{J_2}(t))$, 由引理 1.6, 显然, $p\in C(J_i,\mathrm{R}^+)\ (i=0,1)$ 且有界. 根据(20)式, 得

$$p(t)\leqslant 2N_{T_k}\int_0^t p(s)\mathrm{d}s\cdot$$

由引理 1.7 得 $p(t)=0\ (t\in J'_2)$, 即 $\alpha(U'_{J_2}(t))=0\ (t\in J'_2)$, 特别地

$$\alpha(U'_{J_2}(t_2))=0\cdot$$

根据(16)式知,

$$\alpha(U_{[0,T_k]}(t_2))=0$$

及

$$\alpha(U'_{J_j}(t_2))=0\qquad (j=3,4,\cdots,m_k)\cdot \tag{21}$$

如此继续下去, 可得

$$\alpha(U_{[0,T_k]}(t_i))=0\qquad (j=3,4,\cdots,m_k)\cdot \tag{22}$$

因此, $U_{[0,T_k]}(t_i)\ (i=1,2,\cdots,m_k)$ 分别是 $PC([0,T_k],E)$ 中的相对紧集. 更进一步, 由 $I_i\in C(E,E)\ (i=1,2,\cdots,m_k)$, $\bar I_i\in C(E,E)\ (i=1,2,\cdots,m_k)$, 知

$$\alpha(I_i(U_{[0,T_k]}(t_i)))=0,\quad \alpha(\bar I_i(U_{[0,T_k]}(t_i)))=0\qquad (i=1,2,\cdots,m_k), \tag{23}$$

$\forall x \in PC([0,T_k],E)$，令

$$\|x\|_0 = \max_{t\in[0,T_k]}\left\{e^{-L^{(k)}t}\|x(t)\|\right\}.$$

很明显，$PC([0,T_k],E)$ 在范数 $\|\cdot\|_0$ 下为 Banach 空间，并且范数 $\|\cdot\|_0$ 和范数 $\|\cdot\|_{T_k}$ 是等价的．用 α^* 表示 $PC([0,T_k],E)$ 中有界集在范数 $\|\cdot\|_0$ 下的 Kuratowski 非紧性测度．

由(12)、(23)式，引理 1.3 和引理 1.5 得，$\forall t \in [0,T_k]$，

$$\begin{aligned}
\alpha(U_{[0,T_k]}(t)) &\leqslant \alpha\left(\left\{\int_0^t (t-s)f\left(s, x_n\left(s-\frac{\gamma}{n}\right), (Tx_n)\left(s-\frac{\gamma}{n}\right)\right)ds\right\}\right) + \\
&\quad \alpha\left(\sum_{0<t_i<t-\gamma/n}[I_i(x_n(t_i)) + (t-t_i)I_i(x_n(t_i))]\right) \leqslant \\
&\quad 2T_k \max_{0\leqslant s\leqslant T_k}\left\{L^{(1)}_{R_{T_k}}(s) + L^{(2)}_{R_{T_k}}(s)\max_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T_k}K(t,s)\right\}\int_0^t \alpha(U_{[0,T_k]}(s))ds \leqslant \\
&\quad \frac{2N_{T_k}}{L^{(k)}}\alpha^*(U_{[0,T_k]})e^{L^{(k)}t},
\end{aligned}$$

因此

$$\alpha(e^{-L^{(k)}t}U_{[0,T_k]}(t)) \leqslant \frac{2N_{T_k}}{L^{(k)}}\alpha^*(U_{[0,T_k]}).$$

由(15)式知

$$\alpha^*(U_{[0,T_k]}) \leqslant \beta_k \alpha^*(U_{[0,T_k]}).$$

由 $0 \leqslant \beta_k < 1$ 知，$\alpha^*(U_{[0,T_k]}) = 0$，当然有 $\alpha(U_{[0,T_k]}) = 0$，即 $\{x_n\}_{[0,T_k]}$ 是 $PC([0,T_k],E)$ 中的相对紧集．由 T_k 的任意性知，$\{x_n\}$ 是 $PC(J,E)$ 中关于局部凸拓扑 τ 的相对紧集．故可取 $\{x_n\}$ 中收敛的子序列 $\{x_{n_k}\}$．若 $x_{n_k} \to x^*$ $(n_k \to +\infty)$，因 A 为连续算子，当 $n_k \to +\infty$ 时，由(13)式，可得

$$\begin{aligned}
x^*(t) = x_0 + tx_0^* + \int_0^t (t-s)f(s, x^*(s), (Tx^*)(s))ds + \\
\sum_{0<t_k<t}[I_k(x^*(t_k)) + (t-t_k)I_k(x^*(t_k))], \qquad t \in J,
\end{aligned}$$

即 $x^* \in PC(J,E)$ 是方程(1)的解．显然，$x^* \in PC(J,E) \cap PC^1(J,E) \cap C^2(J',E)$．

定理 2.2　设$(H_1)\sim(H_4)$成立，P 是体锥，则方程(1)在 $PC(J,E)$ 中有最大解和最小解．

定理 2.2 的证明类似于文献[6]中的定理 2 的证明．

注 1　在文献[1]中，郭大钧考虑了方程(1)初值问题的最小非负解．在比较宽松的条件下，本文得到了方程(1)解的存在性，并得到了最大最小解存在的一个充分条件，改进了文献[1]的结果．

注 2　紧型条件：存在常数 $M_k^{(r)} \geqslant 0$，$\sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(r)} < 1$，使得

$$\alpha(I_k(D)) \leqslant M_k^{(r)}\alpha(D), \qquad \forall D \subset K_r,\ k = 1,2,\cdots$$

在文献[7]中是必须的．而在本文定理 2.1 中，去掉了上述紧型条件的限制．因此，改进了文献[7]中的主要结果(定理 1)．

[参 考 文 献]

[1]　GUO Da_jun. Second order impulsive integro_differential equations on unbounded domains in a Banach space[J]. Nonlinear Anal, 1999, **35**(4): 413—423.

[2] GUO Da_jun. Impulsive integral equations in Banach spaces and applications[J]. J Appl Math Stochastic Anal, 1992, **5**(1): 111—122.

[3] Martin R H. Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Space[M]. New York: J Wiley and Sons, 1976, 66—67.

[4] 刘立山. Banach空间非线性混合型微分_积分方程的解[J]. 数学学报, 1995, **38**(6): 721—731.

[5] GUO Da_jun. Initial value problems for second order impulsive integro_differential equations in Banach spaces[J]. Chinese Ann Math, Ser B, 1997, **18**(4): 439—448.

[6] GUO Da_jun. Nonlinear impulsive Volterra integral equations in Banach spaces and applications[J]. J Appl Math Stochastic Anal, 1993, **6**(1): 35—48.

[7] CHEN Fang_qi. Existence of solutions for nonlinear impulsive Volterra integral equations in Banach spaces[J]. Dynamic of Continuous, Discrete and Impulsive System, 2002, **9**(2): 429—438.

[8] GUO Da_jun. Existence of solutions of boundary value problems for nonlinear second order impulsive differential equations in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1994, **181**(2): 407—421.

[9] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1985, 218—221.

Solutions for Second Order Impulsive Integro_Differential Equation on Unbounded Domains in Banach Spaces

CHEN Fang_qi[1,2], TIAN Rui_lan[2], CHEN Yu_shu[2]

(1. School of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P. R. China;

2. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: Under loose conditions, the existence of solutions to initial value problem are studied for second order impulsive integro_differential equation with infinite moments of impulse effect on the positive half real axis in Banach spaces. By the use of recurrence method, Tonelii sequence and the locally convex topology, the new existence theorems are achieved, which improve the related results obtained by GUO Da_jun.

Key words: impulsive integro_differential equation; Tonelii sequence; locally convex topology; measure of noncompactness