

# 条状功能梯度材料中偏心裂纹对反平面 简谐波的散射问题\*

李琳<sup>1</sup>, 周振功<sup>1</sup>, 王彪<sup>2</sup>

(1. 哈尔滨工业大学 复合材料研究所, 哈尔滨 150001;

2. 中山大学 物理与工程学院, 广州 510275)

(我刊编委王彪来稿)

**摘要:** 利用 Schmidt 方法研究了条状功能梯度材料中偏心裂纹对反平面简谐波的散射问题, 裂纹垂直于条状功能梯度材料的边界。通过 Fourier 变换, 问题可以转换为对一对未知变量是裂纹表面位移差的对偶积分方程求解。为了解对偶积分方程, 把裂纹表面的位移差展开为 Jacobi 多项式级数形式, 进而得到了功能梯度参数、裂纹位置以及入射波频率对应力强度因子影响的规律。

**关键词:** 裂纹; 弹性波; 功能梯度材料

**中图分类号:** O346.8      **文献标识码:** A

## 引 言

近年来, 由于功能梯度材料不仅能减小残余应力及热应力, 而且能增加连接强度及韧性, 因而被广泛用于热元件及结构件的制备中。为了研究材料的力学性能, Erdogan 及他的同事们<sup>[1,2]</sup>对具有此种过渡界面性质的连接介质进行了相关的断裂力学分析, 得到了特定裂纹问题的解。其中有一些解是针对条状功能梯度材料中垂直于表面的边缘裂纹和镶嵌裂纹<sup>[1]</sup>; 有一些解是针对夹在不同均匀介质之间的条状非均匀介质中的裂纹<sup>[2]</sup>; 文献[3]~[4]也研究了处在功能梯度材料涂层与基底的界面裂纹或分层处裂纹的相似断裂问题。Erdogan 和 Wu<sup>[5]</sup>研究了功能梯度材料层在热载荷下的裂纹问题。文献[6]在假设材料性质沿着裂纹扩展方向变化的条件下, 研究了平面载荷下此功能梯度材料的动态断裂问题。文献[7]研究了非均匀复合材料的动态裂纹问题, 但其把功能梯度材料处理为多层均匀介质。文献[8]运用光弹技术实验分析了性质不连续变化的功能梯度材料的动态断裂问题。尽管对功能梯度材料的研究已经取得了不少成果, 但由于数学上的复杂性, 对于功能梯度材料的动态断裂过程的理解仍然是有限的。据我们所知, 目前对于条状功能梯度材料中偏心裂纹对简谐反平面剪切应力波动态行为

\* 收稿日期: 2004\_10\_15; 修订日期: 2006\_02\_26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572043; 10572155); 黑龙江省杰出青年基金资助项目(JC04\_08)

作者简介: 李琳(1977—), 博士;

周振功(联系人, Tel: + 86\_451\_86402396; Fax: + 86\_451\_86402386; E\_mail: zhouzhang@hit.edu.cn)。

的研究, 尚未见报道。因而我们的工作试图丰富这一领域的研究。

本文利用 Schmidt 方法<sup>[9]</sup>研究了条状功能梯度材料中偏心裂纹对简谐反平面剪切波的散射问题, 裂纹垂直于条状功能梯度材料的边界。为了便于分析, 假设功能梯度材料剪切模量和密度沿平行于裂纹方向的坐标指数变化。利用 Fourier 变换, 混合边值问题的求解简化为对一对对偶积分方程的求解。为求解对偶积分方程, 把裂纹界面上的位移差展开为 Jacobi 多项式级数。此求解过程不同于文献[1]~[8]中的求解过程。最终得到了功能梯度参数、裂纹位置以及入射波频率对应力强度因子影响的规律。

## 1 问题的提出

考虑无限长, 宽度  $2h$  的条状功能梯度材料中含偏心裂纹, 沿  $x$  轴方向的长度为  $2l = b - a$ , 如图 1 所示, 裂纹垂直于条状功能梯度材料的边界。假设简谐反平面剪切波是垂直的入射波,  $\omega$  为入射波的频率。 $w^{(j)}(x, y, t)$  ( $j = 1, 2$ ) 是位移,  $\tau_{zk}^{(j)}(x, y, t)$  ( $k = x, y; j = 1, 2$ ) 是反平面剪应力, 而下标  $j = 1, 2$  分别表示条的上半部分  $y \geq 0$  和下半部分  $y \leq 0$ 。由于入射波为简谐波, 从而位移  $w^{(j)}(x, y, t)$  和应力  $\tau_{zk}^{(j)}(x, y, t)$  可以采用通用的方法表示成如下形式:

$$[w^{(j)}(x, y, t), \tau_{zk}^{(j)}(x, y, t)] = [w^{(j)}(x, y), \tau_{zk}^{(j)}(x, y)] e^{-i\omega t} \quad (1)$$

根据常用的求解方法, 时间简谐因子  $e^{-i\omega t}$  略去不考虑, 如文献[10]的讨论可知, 本文也采用标准的叠加技术。因此本问题的边界条件可表示为

$$\tau_{yz}^{(1)}(x, 0) = \tau_{yz}^{(2)}(x, 0) = -\tau_0(x), \quad 0 < a \leq x \leq b < 2h; \quad (2)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz}^{(1)}(x, 0) = \tau_{yz}^{(2)}(x, 0), \\ w^{(1)}(x, 0) = w^{(2)}(x, 0), \end{cases} \quad 0 \leq x \leq a, b \leq x \leq 2h; \quad (3)$$

$$\tau_{xz}^{(j)}(0, y) = \tau_{xz}^{(j)}(2h, y) = 0, \quad |y| < \infty; \quad (4)$$

$$w^{(j)}(x, y) = 0, \quad |y| \rightarrow \infty; \quad (5)$$

这里  $\tau_0(x)$  为入射波的幅值。

由于材料性质的任意变化, 非均匀材料的裂纹问题并非能够解析处理。通常, 人们为了使问题便于处理而试图把不均匀性公式化。类似于文献[1~2]对各向同性非均匀材料中裂纹问题的处理, 我们对材料性质作如下简化假设:

$$\mu = \mu_0 e^{\beta x}, \quad \rho = \rho_0 e^{\beta x}, \quad (6)$$

式中  $\mu$  是剪切模量,  $\rho$  是材料的密度。 $\mu_0$  和  $\rho_0$  是两个常数。

II型裂纹问题的本构关系可表述为

$$\tau_{xz}^{(j)} = \mu \frac{\partial w^{(j)}}{\partial x}, \quad \tau_{yz}^{(j)} = \mu \frac{\partial w^{(j)}}{\partial y} \quad (j = 1, 2) \quad (7)$$

功能梯度材料的反平面控制方程为

$$\frac{\partial^2 w^{(j)}}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial w^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 w^{(j)}}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 w^{(j)}}{\partial t^2} \quad (j = 1, 2) \quad (8)$$

## 2 分 析

如文献[10, 11]的讨论, 方程(8)的解可以假设为

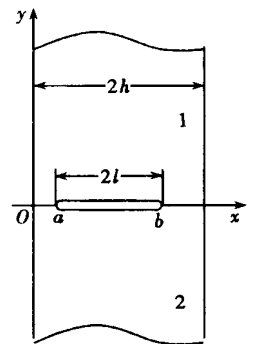


图 1 功能梯度材料中的偏中心裂纹

$$w^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1(s) e^{-\gamma y} e^{isx} ds + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A_2(s) e^{-\gamma x} + A_3(s) e^{\gamma x}] \sin(sy) ds, \quad (9)$$

$$w^{(2)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_1(s) e^{\gamma y} e^{isx} ds + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [B_2(s) e^{-\gamma x} + B_3(s) e^{\gamma x}] \sin(sy) ds, \quad (10)$$

式中  $A_i(s)$  和  $B_i(s)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 是未知函数。  $\gamma = \sqrt{-is\beta + s^2 - \omega^2/c^2}$ ,  $c = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ ,  $c$  是功能梯度材料的剪切波速。当  $\beta = 0$ , 材料退化为均匀材料。根据方程(7), 我们得到

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{(1)}(x, y) &= \frac{-\mu_0 e^{\beta x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma A_1(s) e^{-\gamma y} e^{isx} ds + \\ &\frac{2\mu_0 e^{\beta x}}{\pi} \int_0^{\infty} s [A_2(s) e^{-\gamma x} + A_3(s) e^{\gamma x}] \cos(sy) ds, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{(1)}(x, y) &= \frac{\mu_0 e^{\beta x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} is A_1(s) e^{-\gamma y} e^{isx} ds - \\ &\frac{2\mu_0 e^{\beta x}}{\pi} \int_0^{\infty} \gamma [A_2(s) e^{-\gamma x} - A_3(s) e^{\gamma x}] \sin(sy) ds, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz}^{(2)}(x, y) &= \frac{\mu_0 e^{\beta x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma B_1(s) e^{\gamma y} e^{isx} ds + \\ &\frac{2\mu_0 e^{\beta x}}{\pi} \int_0^{\infty} s [B_2(s) e^{-\gamma x} + B_3(s) e^{\gamma x}] \cos(sy) ds, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz}^{(2)}(x, y) &= \frac{\mu_0 e^{\beta x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} is B_1(s) e^{\gamma y} e^{isx} ds - \\ &\frac{2\mu_0 e^{\beta x}}{\pi} \int_0^{\infty} \gamma [B_2(s) e^{-\gamma x} - B_3(s) e^{\gamma x}] \sin(sy) ds. \end{aligned} \quad (14)$$

把方程(12)和方程(14)代入方程(4), 可以得到

$$\tau_{xz}^{(1)}(0, y) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} is A_1(s) e^{-\gamma y} ds - \frac{2\mu_0}{\pi} \int_0^{\infty} \gamma [A_2(s) - A_3(s)] \sin(sy) ds = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{(1)}(2h, y) &= \frac{\mu_0 e^{2\beta h}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} is A_1(s) e^{-\gamma y} e^{2ish} ds - \\ &\frac{2\mu_0 e^{2\beta h}}{\pi} \int_0^{\infty} \gamma [A_2(s) e^{-2\gamma h} - A_3(s) e^{2\gamma h}] \sin(sy) ds = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\tau_{xz}^{(2)}(0, y) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} is B_1(s) e^{\gamma y} ds - \frac{2\mu_0}{\pi} \int_0^{\infty} \gamma [B_2(s) - B_3(s)] \sin(sy) ds = 0, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{(2)}(2h, y) &= \frac{\mu_0 e^{2\beta h}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} is B_1(s) e^{\gamma y} e^{2ish} ds - \\ &\frac{2\mu_0 e^{2\beta h}}{\pi} \int_0^{\infty} \gamma [B_2(s) e^{-2\gamma h} - B_3(s) e^{2\gamma h}] \sin(sy) ds = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

由方程(15)至方程(18), 可以得到:

$$A_2(t) - A_3(t) = \frac{it}{2\pi\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} s A_1(s) \frac{1}{t^2 + \gamma^2(s)} ds = d_1(t), \quad (19)$$

$$A_2(t) e^{-2\gamma h} - A_3(t) e^{2\gamma h} = \frac{it}{2\pi\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} s A_1(s) \frac{e^{2ish}}{t^2 + \gamma^2(s)} ds = d_2(t), \quad (20)$$

$$B_2(t) - B_3(t) = -\frac{it}{2\pi\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} s B_1(s) \frac{1}{t^2 + \gamma^2(s)} ds = -g_1(t), \quad (21)$$

$$B_2(t) e^{-2\gamma h} - B_3(t) e^{2\gamma h} = -\frac{it}{2\pi\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} s B_1(s) \frac{e^{2ish}}{t^2 + \gamma^2(s)} ds = -g_2(t). \quad (22)$$

进而得到下面的关系式:

$$A_2(t) = \frac{d_1(t)e^{2yh} - d_2(t)}{e^{2yh} - e^{-2yh}}, A_3(t) = \frac{d_1(t)e^{-2yh} - d_2(t)}{e^{2yh} - e^{-2yh}}, \quad (23)$$

$$B_2(t) = \frac{g_2(t) - g_1(t)e^{2yh}}{e^{2yh} - e^{-2yh}}, B_3(t) = \frac{g_2(t) - g_1(t)e^{-2yh}}{e^{2yh} - e^{-2yh}}. \quad (24)$$

根据边界条件(3), 方程(11)和方程(13), 可以得到

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma [A_1(s) + B_1(s)] e^{isx} ds + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} s [A_2(s)e^{-yx} + A_3(s)e^{yx} - \\ &B_2(s)e^{-yx} - B_3(s)e^{yx}] ds = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

由方程(19)到方程(25), 我们得到

$$A_1(s) = -B_1(s), A_2(s) = B_2(s), A_3(s) = B_3(s). \quad (26)$$

为了求解问题, 对裂纹表面的位移差作如下定义:

$$f(x) = w^{(1)}(x, 0) - w^{(2)}(x, 0). \quad (27)$$

将方程(9)至方程(10)代入到方程(27), 应用 Fourier 变换, 可以得到

$$f(s) = A_1(s) - B_1(s), \quad (28)$$

这里带上标线的字母代表经 Fourier 变换后的变量。

将方程(26)和方程(28)代入到方程(11)中, 利用边界条件(2)和(3), 可以得到:

$$\begin{aligned} &\frac{H_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(s) e^{isx} ds - \frac{iH_0}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{s^2 e^{-yx}}{\gamma(s)(e^{2yh} - e^{-2yh})} \left[ e^{2yh} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{u}{s^2 + \gamma^2(u)} du - \right. \\ &\left. \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{u e^{2iuh}}{s^2 + \gamma^2(u)} du \right] ds - \frac{iH_0}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{s^2 e^{yx}}{\gamma(s)(e^{2yh} - e^{-2yh})} \left[ e^{-2yh} \times \right. \\ &\left. \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{u}{s^2 + \gamma^2(u)} du - \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{u e^{2iuh}}{s^2 + \gamma^2(u)} du \right] ds = T_0(x) e^{-\beta x}, \\ &0 < a \leq x \leq b < 2h, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{isx} ds = 0, \quad 0 \leq x < a, b < x \leq 2h. \quad (30)$$

为了求解未知函数 $f(s)$ , 必须求解对偶积分方程(29)、(30)。

### 3 对偶积分方程的求解

为了本问题的求解, 将裂纹表面的位移差展开成如下的级数形式:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(1/2, 1/2)} \left[ \frac{x - (b+a)/2}{(b-a)/2} \right] \left[ 1 - \frac{(x - (b+a)/2)^2}{((b-a)/2)^2} \right]^{1/2}, \quad (31)$$

$$0 < a \leq x \leq b < 2h,$$

$$f(x) = 0, \quad 0 \leq x < a, b < x \leq 2h, y = 0, \quad (32)$$

式中 $a_n$ 是待定的未知系数,  $P_n^{(1/2, 1/2)}(x)$ 是 Jacobi 多项式<sup>[12]</sup>。

方程(31)至方程(32)经 Fourier 变换后形式<sup>[13]</sup>如下:

$$\begin{cases} f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n G(s) \frac{1}{s} J_{n+1} \left[ s \frac{b-a}{2} \right], \\ Q_n = 2\sqrt{\pi} (-1)^n (i)^n \frac{\Gamma(n+1+1/2)}{n!}, \\ G(s) = e^{-is(a+b)/2}, \end{cases} \quad (33)$$

式中 $\Gamma(x)$ 和 $J_n(s)$ 分别是 Gamma 函数和 Bessel 函数。

把方程(33)代入到方程(29)至方程(30), 方程(30)自动满足. 对方程(29)在  $[a, x]$  区间对  $x$  做积分可得:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\gamma}{s} G(s) J_{n+1} \left( s \frac{b-a}{2} \right) (e^{ix} - e^{isa}) ds = \\
 & \int_a^x T_0(u) e^{-\beta u} du - \frac{i\mu_0}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n \int_0^{\infty} \frac{s^2 e^{-\gamma x} - e^{-\gamma a}}{\gamma^2(s) (e^{2\gamma h} - e^{-2\gamma h})} \times \\
 & \left[ e^{2\gamma h} \int_{-\infty}^{\infty} G(u) J_{n+1} \left( u \frac{b-a}{2} \right) \frac{1}{s^2 + \gamma^2(u)} du - \right. \\
 & \left. \int_{-\infty}^{\infty} G(u) J_{n+1} \left( u \frac{b-a}{2} \right) \frac{e^{2iuh}}{s^2 + \gamma^2(u)} du \right] ds + \\
 & \frac{i\mu_0}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n \int_0^{\infty} \frac{s^2 e^{\gamma x} - e^{\gamma a}}{\gamma^2(s) (e^{2\gamma h} - e^{-2\gamma h})} \left[ e^{-2\gamma h} \int_{-\infty}^{\infty} G(u) J_{n+1} \left( u \frac{b-a}{2} \right) \times \right. \\
 & \left. \frac{1}{s^2 + \gamma^2(u)} du - \int_{-\infty}^{\infty} G(u) J_{n+1} \left( u \frac{b-a}{2} \right) \frac{e^{2iuh}}{s^2 + \gamma^2(u)} du \right] ds, \\
 & a \leq x \leq b. \quad (34)
 \end{aligned}$$

对于很大的变量  $s$  而言, 方程(34)中的双重半无限积分几乎具有指数衰减形式, 因而, 方程(34)中的双重半无限积分很容易进行数值求解. 这里采用 Schmidt<sup>[9, 14~16]</sup> 方法求解系数  $a_n$ , 此方法可以在文献[14]~[16]中看到. 具体求解过程从略.

#### 4 强度因子的数值计算及讨论

如果系数  $a_n$  已知, 则整个应力场已知. 但在断裂力学中, 确定裂纹尖端附近的应力  $\tau_{yz}$  是一非常重要的量. 据本文研究的情况, 沿着裂纹线上的  $\tau_{yz}^{(1)}$  可表示为:

$$\begin{aligned}
 \tau_{yz}^{(1)}(x, 0) = & -\frac{\mu_0 e^{\beta x}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{s} G(s) J_{n+1} \left( s \frac{b-a}{2} \right) e^{isx} ds + \\
 & \frac{i\mu_0 e^{\beta x}}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n \int_0^{\infty} \frac{s^2 e^{-\gamma x}}{\gamma(s) (e^{2\gamma h} - e^{-2\gamma h})} \left[ e^{2\gamma h} \int_{-\infty}^{\infty} G(u) J_{n+1} \left( u \frac{b-a}{2} \right) \times \right. \\
 & \left. \frac{1}{s^2 + \gamma^2(u)} du - \int_{-\infty}^{\infty} G(u) J_{n+1} \left( u \frac{b-a}{2} \right) \frac{e^{2iuh}}{s^2 + \gamma^2(u)} du \right] ds + \\
 & \frac{i\mu_0 e^{\beta x}}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n \int_0^{\infty} \frac{s^2 e^{\gamma x}}{\gamma(s) (e^{2\gamma h} - e^{-2\gamma h})} \left[ e^{-2\gamma h} \int_{-\infty}^{\infty} G(u) J_{n+1} \left( u \frac{b-a}{2} \right) \times \right. \\
 & \left. \frac{1}{s^2 + \gamma^2(u)} du - \int_{-\infty}^{\infty} G(u) J_{n+1} \left( u \frac{b-a}{2} \right) \frac{e^{2iuh}}{s^2 + \gamma^2(u)} du \right] ds, \\
 & a \leq x \leq b. \quad (35)
 \end{aligned}$$

经观察, 应力场的奇异部分可以表述为:

$$\begin{aligned}
 \sigma = & -\frac{\mu_0 e^{\beta x}}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n \left[ \int_0^{\infty} J_{n+1} \left( s \frac{b-a}{2} \right) e^{is(x-(a+b)/2)} ds - \right. \\
 & \left. \int_{-\infty}^0 J_{n+1} \left( s \frac{b-a}{2} \right) e^{is(x-(a+b)/2)} ds \right] = \\
 & -\frac{\mu_0 e^{\beta x}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n H_n(a, b, x), \quad (36)
 \end{aligned}$$

式中

$$H_n(a, b, x) = \begin{cases} -(-1)^{n/2} F_1(a, b, x, n), & n = 0, 2, 4, 6, \dots, 0 \leq x < a, \\ -i(-1)^{(n+1)/2} F_1(a, b, x, n), & n = 1, 3, 5, 7, \dots, 0 \leq x < a; \\ -(-1)^{n/2} F_2(a, b, x, n), & n = 0, 2, 4, 6, \dots, b < x < 2h, \\ -i(-1)^{(n+1)/2} F_2(a, b, x, n), & n = 1, 3, 5, 7, \dots, b < x < 2h; \end{cases} \quad (37)$$

$$F_1(a, b, x, n) = \frac{2(b-a)^{n+1}}{\sqrt{(a+b-2x)^2 - (b-a)^2} [a+b-2x + \sqrt{(a+b-2x)^2 - (b-a)^2}]^{n+1}}, \quad (39)$$

$$F_2(a, b, x, n) = \frac{2(b-a)^{n+1}}{\sqrt{(2x-a-b)^2 - (b-a)^2} [2x-a-b + \sqrt{(2x-a-b)^2 - (b-a)^2}]^{n+1}}. \quad (40)$$

因此, 裂纹左尖端的应力强度因子  $K_L$  可表示为

$$\begin{cases} K_L = \lim_{x \rightarrow a^-} \sqrt{2(a-x)} \sigma = \frac{\mu_0 e^{\beta a}}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2(b-a)}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n R_n, \\ R_n = \begin{cases} (-1)^{n/2}, & n = 0, 2, 4, 6, \dots, \\ i(-1)^{(n+1)/2}, & n = 1, 3, 5, 7, \dots; \end{cases} \end{cases} \quad (41)$$

裂纹右尖端的应力强度因子  $K_R$  可表示为

$$\begin{cases} K_R = \lim_{x \rightarrow b^+} \sqrt{2(x-b)} \sigma = \frac{\mu_0 e^{\beta b}}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2(b-a)}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n R_n', \\ R_n' = \begin{cases} (-1)^{n/2}, & n = 0, 2, 4, 6, \dots, \\ -i(-1)^{(n+1)/2}, & n = 1, 3, 5, 7, \dots \end{cases} \end{cases} \quad (42)$$

数值计算得到无量纲化的应力强度因子  $K_L$  和  $K_R$ 。由文献[14]~[16]可以看出, 如果取方程(34)中无限级数的前10项, 则 Schmidt 方法就可以满足有关精度要求。裂纹表面载荷  $\tau_0(x)$  可以简单地假设为多项式的形式, 如下:

$$-\tau_0(x) = -p_0 - p_1x - p_2x^2 - p_3x^3. \quad (43)$$

由于问题是线性的, 可以在适当的条件下叠加而获得其完全解, 只取4个输入参数  $p_0, p_1, p_2$  和  $p_3$  中的一个在某一时刻不为零, 就可以得到结果。不均匀参数  $\beta$  从-2.0到2.0的变化就可以涵盖绝大部分实际情况。图2至图7给出了本文的计算结果, 从结果中就可以得到如下结论:

(i) 本文的目的仅仅是给出一种理论方法, 来求解条状功能梯度材料中裂纹对简谐反平面剪切波散射问题。同时文中对偶积分方程的未知变量是裂纹表面的位移差而非位错。结果显示, 应力强度因子依赖于裂纹长度, 条状功能梯度材料的宽度, 材料常数及入射波的频率。

(ii) 随着入射波频率的增加, 应力强度因子也增加, 直到在  $\omega/c \approx 0.75$  处达到峰值, 然后开始下降, 如图2所示。

(iii) 当  $\beta > 0$ ,  $\tau_0(x) = p_0$  时, 如图3, 裂纹左端的应力强度因子比裂纹右端的应力强度因子小。而当  $\beta > 0.25$ ,  $\tau_0(x) = p_1x$  和  $\beta > 0.6$ ,  $\tau_0(x) = p_3x^3$  时, 分别如图6和图7所示, 裂纹左端的应力强度因子比裂纹右端的应力强度因子要小。但当  $\beta < 0$ ,  $\tau_0(x) = p_0$ , 如图3所示, 裂纹左端的应力强度因子大于裂纹右端的应力强度因子。当  $\beta < 0.25$ ,  $\tau_0(x) = p_1x$  和  $\beta$

$< 0.6$ ,  $\tau_0(x) = p_3x^3$ , 分别如图 6 和图 7 所示, 裂纹左端的应力强度因子比裂纹右端的应力强度因子大。

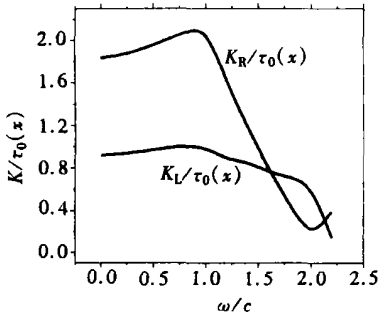


图 2 应力强度因子随  $\omega/c_1$  变化关系  
( $h = 1.5, a = 0.1, b = 2.0,$   
 $\beta = 0.2, \tau_0(x) = p_0$ )

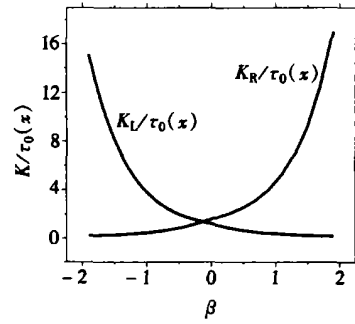


图 3 应力强度因子随  $\beta$  变化关系  
( $h = 1.5, a = 0.1, b = 2.0,$   
 $\omega/c_1 = 0.4, \tau_0(x) = p_0$ )

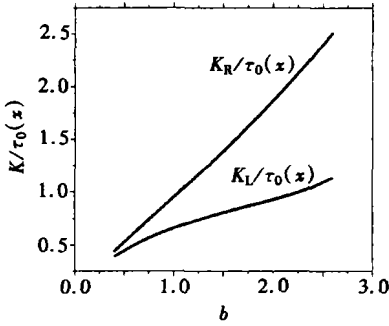


图 4 应力强度因子随  $b$  变化关系  
( $h = 1.5, a = 0.1, \omega/c_1 = 0.2,$   
 $\beta = 0.2, \tau_0(x) = p_0$ )

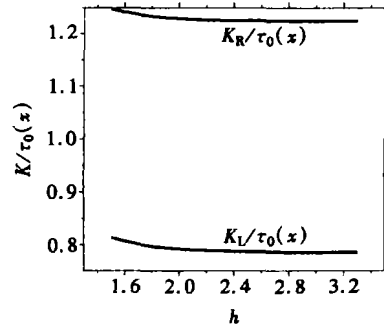


图 5 应力强度因子随  $h$  变化关系  
( $a = 0.1, b = 2.0, \omega/c_1 = 0.2,$   
 $\beta = 0.2, \tau_0(x) = p_0$ )

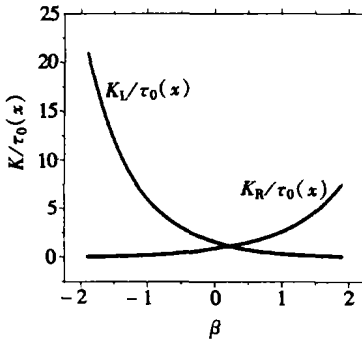


图 6 应力强度因子随  $\beta$  变化关系  
( $a = 0.4, b = 2.0, \omega/c_1 = 0.2,$   
 $h = 1.5, \tau_0(x) = p_1x$ )

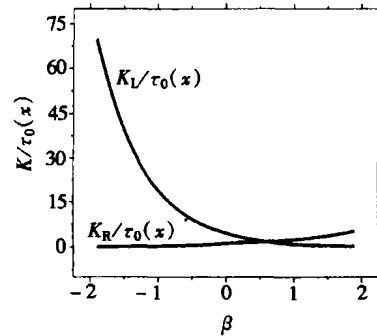


图 7 应力强度因子随  $\beta$  变化关系  
( $a = 0.4, b = 2.0, \omega/c_1 = 0.2,$   
 $h = 1.5, \tau_0(x) = p_3x^3$ )

(iv) 如图 4 所示, 应力强度因子随着裂纹长度的增加而增加。如图 5 所示, 条状功能梯度材料的宽度变化对应力强度因子影响不大。

(v) 裂纹右端的应力强度因子随不均匀常数  $\beta$  的增加而增加, 如图 3、图 6 和图 7 所示, 裂纹左端的应力强度因子随不均匀常数  $\beta$  的增加而减小。

### [参 考 文 献]

- [1] Erdogan F, Wu B H. The surface crack problem for a plate with functionally graded properties[J]. Journal of Applied Mechanics, 1997, **64**(3): 449—456.
- [2] Delale F, Erdogan F. On the mechanical modeling of the interfacial region in bonded half-planes[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1988, **55**(2): 317—324.
- [3] Jin Z H, Batra R C. Interface cracking between functionally graded coating and a substrate under antiplane shear[J]. International Journal of Engineering Science, 1996, **34**(15): 1705—1716.
- [4] Bao G, Cai H. Delamination cracking in functionally graded coating/metal substrate systems[J]. Acta Materialia, 1997, **45**(3): 1055—1066.
- [5] Erdogan F, Wu H B. Crack problems in FGM layer under thermal stress[J]. Journal of Thermal Stress, 1996, **19**(3): 237—265.
- [6] Parameswaran V, Shukla A. Crack tip stress fields for dynamic fracture in functionally graded materials[J]. Mechanics of Materials, 1999, **31**(9): 579—596.
- [7] WANG Bao\_lin, HAN Jie\_cai, DU Shan\_yi. Crack problem for non-homogeneous composite materials subjected to dynamic loading[J]. International Journal of Solids and Structures, 2000, **37**(9): 1251—1274.
- [8] Parameswaran V, Shukla A. Dynamic fracture of a functionally graded material having discrete property variation[J]. Journal of Materials Science, 1998, **31**(6): 1641—1657.
- [9] Morse P M, Feshbach H. Methods of Theoretical Physics [M]. Vol 1. New York: McGraw\_Hill, 1958.
- [10] Srivastava K N, Palaiya K N, Karaulia D S. Interaction of shear waves with two coplanar Griffith cracks situated in an infinitely long elastic strip[J]. International Journal of Fracture, 1983, **23**(1): 3—14.
- [11] Chen E P. Impact response of a finite crack in a finite strip under anti-plane shear[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1977, **9**(4): 719—724.
- [12] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integrals, Series and Products [M]. New York: Academic Press, 1980, 923—967.
- [13] Erdelyi A. Tables of Integral Transforms [M]. Vol 1. New York: McGraw\_Hill, 1954, 68—105.
- [14] ZHOU Zhen\_gong, HAN Jie\_cai, DU Shan\_yi. Two collinear Griffith cracks subjected to uniform tension in infinitely long strip[J]. International Journal of Solids and Structures, 1999, **36**(4): 5597—5609.
- [15] 周振功, 王彪. 位于两不同正交各向异性半平面间张开型界面裂纹的性能分析[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(7): 667—676.
- [16] 周振功, 王彪. 压电材料中两平行对称可导通裂纹断裂性能分析[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(12): 1211—1219.



# Scattering of Anti\_Plane Shear Waves in a Functionally Graded Material Strip With an Off\_Center Vertical Crack

LI Lin<sup>1</sup>, ZHOU Zhen\_gong<sup>1</sup>, WANG Biao<sup>2</sup>

(1. Center for Composite Materials, Harbin Institute of Technology,  
Harbin 150001, P. R. China;

2. School of Physics and Engineering, Sun Yat\_Sen University,  
Guangzhou 510275, P. R. China)

**Abstract:** The scattering problem of anti\_plane shear waves in a functionally graded material strip with an off\_center crack is investigated by use of Schmidt method. The crack is vertically to the edge of the strip. By using the Fourier transform, the problem can be solved with the help of a pair of dual integral equations that the unknown variable is the jump of the displacement across the crack surfaces. To solve the dual integral equations, the jump of the displacement across the crack surfaces was expanded in a series of Jacobi polynomials. Numerical examples were provided to show the effects of the parameter describing the functionally graded materials, the position of the crack and the frequency of the incident waves upon the stress intensity factors of the crack.

**Key words:** crack; elastic wave; functionally graded material