

一类 TVD 型的迎风紧致差分格式*

涂国华^{1,2}, 袁湘江^{1,2}, 夏治强³, 呼 振⁴

(1. 中国空气动力研究与发展中心, 四川 绵阳 621000;

2. 国家计算流体力学实验室, 北京 100083;

3. 防化研究院 信息研究中心, 北京 102205;

4. 同济大学 软件学院, 上海 200331)

(林建忠推荐)

摘要: 给出一种迎风型 TVD(total variation diminishing) 格式的构造方法, 该方法通过限制器来抑制线性紧致格式在模拟间断流场时的非物理波动, 可构造出非线性 TVD 型紧致格式(CTVD)。然后采用该法构造出了 3 阶和 5 阶的 TVD 型紧致格式, 并通过模拟一维组合波和 Riemann 问题, 二维激波-涡相互干扰和激波-边界层相互作用等来考察它们的性能。数值实验表明了该类格式的高阶精度和分辨率, 且过间断基本无振荡。

关键词: 高精度计算格式; 紧致格式; TVD 格式; 激波-涡; 激波-边界层

中图分类号: V211.3 **文献标识码:** A

引 言

从事航空航天飞行器气动外形设计的主要依据之一是飞行器所受到的气动力和气动加热的特性参数。目前获得气动力和气动热参数的手段主要是风洞实验和数值模拟, 其中数值模拟因效率高、条件易控制、耗费低、能模拟地面实验所不能模拟的复杂问题等优点, 在工程设计中发挥着越来越重要的作用。TVD 格式因其良好的数值稳定性, 在实际工程中得到了广泛的应用。但是随着航空航天技术的发展, 对气动力和气动热参数的精确性要求越来越高, 而目前所使用的 TVD 格式通常只有 2 阶精度, 并且一般认为在极值点的精度降为 1 阶。所以有必要研究适合于工程应用的高阶格式。

近 20 多年来, 在高阶格式研究中, 紧致格式得到了较大发展。同传统的差分格式相比, 紧致格式不仅能在较少的网格点上取得较高精度, 具有接近谱方法的分辨率, 同时, 对计算域和边界的要求不像谱方法那样苛刻^[1]。但是, 直接应用紧致格式计算含有间断的流场时会产生非物理振荡, 如何把紧致格式推广到适合各种复杂的超声速流场计算便成了主要的研究方向之一。Ravichandran^[2]在紧致格式中引入 TVD 限制器, 本文扩展了 Ravichandran 的工作, 构造出

* 收稿日期: 2004_12_10; 修订日期: 2006_02_25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172015; 90205010)

作者简介: 涂国华(1977—), 男, 四川中江人, 博士生(Tel: + 86_10_82317014; E_mail: tootoo85@21cn.com);

袁湘江(联系人, Tel: + 86_10_82332056; Fax: + 86_10_82317018; E_mail: yuan_xj18@163.com)。

一类守恒型 TVD 迎风紧致格式, 并通过数值实验表明了此类格式有较高的精度和分辨率, 且过间断基本无非物理振荡。

本文包含的内容如下: 首先在第 1 节给出一种构造迎风型 TVD 格式的方法, 然后在第 2 节构造出 TVD 型的迎风紧致格式, 并给出了一种 3 阶和 5 阶实例, 接着在第 3 节通过数值实验在各个方面考察了该格式的性能, 最后小结。

1 一种迎风型 TVD 格式的构造方法

考虑如下一维标量守恒方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

在离散情况下, 设 $v(t) = \{v_j(t)\}$ 是上式的近似解, 则总变差 $TV[v(t)] = \sum_j |\Delta v_{j+1/2}|$, $\Delta v_{j+1/2} = v_{j+1} - v_j$. 参照文献[3, 4], 可推导出一个方便的 TVD 判定方法. 通常, (1) 式的半离散方程可写成如下守恒形式

$$\frac{d}{dt} v_j(t) = -\frac{1}{\Delta x_j} [h_{j+1/2} - h_{j-1/2}], \quad (2)$$

其中 $h_{j+1/2} = h(v)$ 表示 Lipschitz 连续的数值通量, Δx_j 为网格间距. 于是有

$$\frac{d}{dt} [\Delta v_{j+1/2}] = \frac{1}{\Delta x_j} [h_{j+1/2} - h_{j-1/2}] - \frac{1}{\Delta x_{j+1}} [h_{j+3/2} - h_{j+1/2}]. \quad (3)$$

对任意给定时刻, 令 $s_{j+1/2} = \text{sign}[\Delta v_{j+1/2}]$, 则有

$$\frac{d}{dt} [\Delta v_{j+1/2}] = \frac{d}{dt} (s_{j+1/2} \Delta v_{j+1/2}) = s_{j+1/2} \frac{d}{dt} \Delta v_{j+1/2}, \quad (4)$$

用 $s_{j+1/2}$ 乘以 (3) 式, 并对 j 求和得

$$\frac{d}{dt} TV[v(t)] = \sum_j \frac{1}{\Delta x_j} [s_{j+1/2} - s_{j-1/2}] [h_{j+1/2} - h_{j-1/2}]. \quad (5)$$

如果满足

$$\begin{cases} h_{j+1/2} \geq h_{j-1/2}, & \text{如果 } s_{j+1/2} - s_{j-1/2} = -2, \\ h_{j+1/2} \leq h_{j-1/2}, & \text{如果 } s_{j+1/2} - s_{j-1/2} = 2, \end{cases} \quad (6)$$

则 $(d/dt) TV[v(t)] \leq 0$, 即半离散格式 (2) 是 TVD 的。

因为迎风格式在实际工作中得到了大量运用, 所以下面构造迎风型的 TVD 格式. 假设应用某种 Lax-Friedrich 类的通量分裂技术 (本文采用 Steger-Warming 分裂) 得到 $f^\pm(v)$, 本文所构造的迎风格式可以写成如下形式

$$h_{j+1/2} = h_{j+1/2}^+ + h_{j+1/2}^-, \quad (7)$$

其中

$$h_{j+1/2}^+ = f_j^+ + \Phi_{j+1/2}^+, \quad h_{j+1/2}^- = f_{j+1}^- - \Phi_{j+1/2}^-. \quad (8)$$

$\Phi_{j+1/2}^\pm$ 的取值满足如下条件:

如果 $s_{j+1/2} + s_{j-1/2} = 0$, 取 $\Phi_{j+1/2}^+ = 0$ 和 $\Phi_{j+1/2}^- = 0$; 如果 $s_{j+1/2} + s_{j-1/2} \neq 0$, 取 $\Phi_{j+1/2}^\pm$ 与 $\Delta f_{j+1/2}^\pm$ 同号, 且满足 $|\Phi_{j+1/2}^\pm| \leq |\Delta f_{j+1/2}^\pm|$.

下面证明由 (7)、(8) 式所定义的 $h_{j+1/2}$ 满足 TVD 条件 (6)。

证明 假设在 j 附近 $s_{j+1/2} - s_{j-1/2} \neq 0$, 则有 $s_{j+1/2} + s_{j-1/2} = 0$, 于是有 $\Phi_{j+1/2}^+ = 0$ 和 $\Phi_{j+1/2}^- = 0$, 可得 $h_{j+1/2} - h_{j-1/2} = (f_j^+ - f_{j-1}^+ - \Phi_{j-1/2}^-) + (f_{j+1}^- - \Phi_{j+1/2}^- - f_j^-)$. 考虑到 f^\pm 是 v 的不减

函数 f^- 是 v 的不增函数, 则

- 1) 如果 $s_{j+1/2} - s_{j-1/2} = -2$, 即 $\Delta v_{j-1/2} \geq 0, \Delta v_{j+1/2} < 0$, 于是: $f_j^+ - f_{j-1}^+ \geq 0, f_j^+ - f_{j-1}^+ - \Phi_{j-1/2}^+ \geq 0; f_{j+1}^- - f_j^- > 0, f_{j+1}^- - f_j^- - \Phi_{j+1/2}^- \geq 0$, 即 $h_{j+1/2} - h_{j-1/2} \geq 0$;
 - 2) 如果 $s_{j+1/2} - s_{j-1/2} = 2$, 即 $\Delta v_{j-1/2} < 0, \Delta v_{j+1/2} \geq 0$, 于是: $f_j^+ - f_{j-1}^+ < 0, f_j^+ - f_{j-1}^+ - \Phi_{j-1/2}^+ \leq 0; f_{j+1}^- - f_j^- \leq 0, f_{j+1}^- - f_j^- - \Phi_{j+1/2}^- \leq 0$, 即 $h_{j+1/2} - h_{j-1/2} \leq 0$.
- 证毕.

2 TVD 型的迎风紧致格式

本文以下面两种线性迎风紧致格式为例来讨论 TVD 型紧致格式的构造:

$$f_j^{\prime C} = (f_{j+1/2}^{C+} - f_{j-1/2}^{C+}) / \Delta x_j + (f_{j+1/2}^{C-} - f_{j-1/2}^{C-}) / \Delta x_j \quad (9)$$

1) 3 阶格式^[5]

$$\begin{cases} 5f_{j-1/2}^{C+} + 8f_{j+1/2}^{C+} - f_{j+3/2}^{C+} = 12f_j^+, \\ -f_{j-1/2}^{C-} + 8f_{j+1/2}^{C-} + 5f_{j+3/2}^{C-} = 12f_{j+1}^-; \end{cases} \quad (10a)$$

2) 5 阶格式^[6]

$$\begin{cases} 9f_{j-1/2}^{C+} + 18f_{j+1/2}^{C+} + 3f_{j+3/2}^{C+} = 10f_{j+1}^+ + 19f_j^+ + f_{j-1}^+, \\ 3f_{j-1/2}^{C-} + 18f_{j+1/2}^{C-} + f_{j+3/2}^{C-} = f_{j+2}^- + 19f_{j+1}^- + 10f_j^-; \end{cases} \quad (10b)$$

其中 $f_j^{\prime C}$ 代表 $\partial f / \partial x$ 的某阶近似, $f_{j+1/2}^{\pm}$ 可看成 $f(u)$ 在网格交接面上的数值流量量. 如果直接用线性紧致格式来计算含有间断的流场, 将产生严重的虚假波动. 本文通过对通量幅值的限制来抑止这种波动, 构造出 K 阶精度的 TVD 型紧致格式如下

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{h_{j+1/2}^+ - h_{j-1/2}^+}{\Delta x_j} + \frac{h_{j+1/2}^- - h_{j-1/2}^-}{\Delta x_j} + O(\Delta x^K), \quad (11)$$

其中 $h_{j+1/2}^{\pm}$ 由 (8) 式所定义, 其中

$$\begin{cases} \Phi_{j+1/2}^+ = \text{limiter}(f_{j+1/2}^+, \Delta f_{j+1/2}^+, \Delta f_{j-1/2}^+), \\ \Phi_{j+1/2}^- = \text{limiter}(f_{j+1/2}^-, \Delta f_{j+1/2}^-, \Delta f_{j+3/2}^-), \end{cases} \quad (12)$$

$$f_{j+1/2}^+ = f_{j+1/2}^+ - f_j^+, f_{j+1/2}^- = f_{j+1}^- - f_{j+1/2}^-, \Delta f_{j+1/2}^{\pm} = f_{j+1}^{\pm} - f_j^{\pm}. \quad (13)$$

本文给出了两种限制器 $\text{limiter}(a, b, c) = \lim_A$ 或 $\text{limiter}(a, b, c) = \lim_B$,

$$\lim_A = \begin{cases} \text{sign}(a) \cdot \min(|a|, |b|), & \text{若 } a, b, c \text{ 同号,} \\ 0, & \text{其他;} \end{cases} \quad (14a)$$

$$\lim_B = \begin{cases} \text{sign}(a) \cdot \min\left[|a|, |b|, \frac{2bc}{|a| + |c| + \varepsilon}\right], & \text{若 } a, b, c \text{ 同号,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (14b)$$

ε 为防止被零除而选取的任意小量. 第一种限制器在极值点附近的精度稍高, 适合于间断较弱的情况, 第二种的稳定性稍强, 适合于间断较强的情况. 本文把 K 阶精度的 CTVD 格式分别标记为 CTVD_A K 和 CTVD_B K . 可见 CTVD 格式是在线性紧致格式(式(9))的基础上采用了一个限制器, 由此带来的额外计算量小.

3 数值实验

3.1 一维标量守恒方程

模型方程为 (1), $f(u) = u(t, x), t \in [0, \infty), x \in [-1, 1]$, 取周期边界, 初始条件为:

$$u(0, x) = \begin{cases} [G(x, \beta, z - \delta) + G(x, \beta, z + \delta) + 4G(x, \beta, z)]/6, & -0.8 \leq x \leq -0.6, \\ 1, & -0.4 \leq x \leq -0.2, \\ 1 - |10(x - 0.1)|, & 0 \leq x \leq 0.2, \\ [F(x, \alpha, a - \delta) + F(x, \alpha, a + \delta) + 4F(x, \alpha, a)]/6, & 0.4 \leq x \leq 0.6, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 $G(x, \beta, z) = \exp[-\beta(x - z)^2]$, $F(x, \alpha, a) = \sqrt{\max(1 - \alpha^2(x - a)^2, 0)}$, 取常数 $a = 5$, $z = -0.7$, $\delta = 0.005$, $\alpha = 10$, $\beta = \lg 2 / (36\delta^2)$. 本文的时间项都采取 TVD 的 3 阶 Runge_Kutta 法^[7], 取 200 个网格点, 图 1 给出了 $t = 8$ 时刻的计算结果. 与 Jiang 等人的 5 阶 WENO 格式的计算结果(文献[7], Fig. 2)相比, 本文结果的精度明显提高.

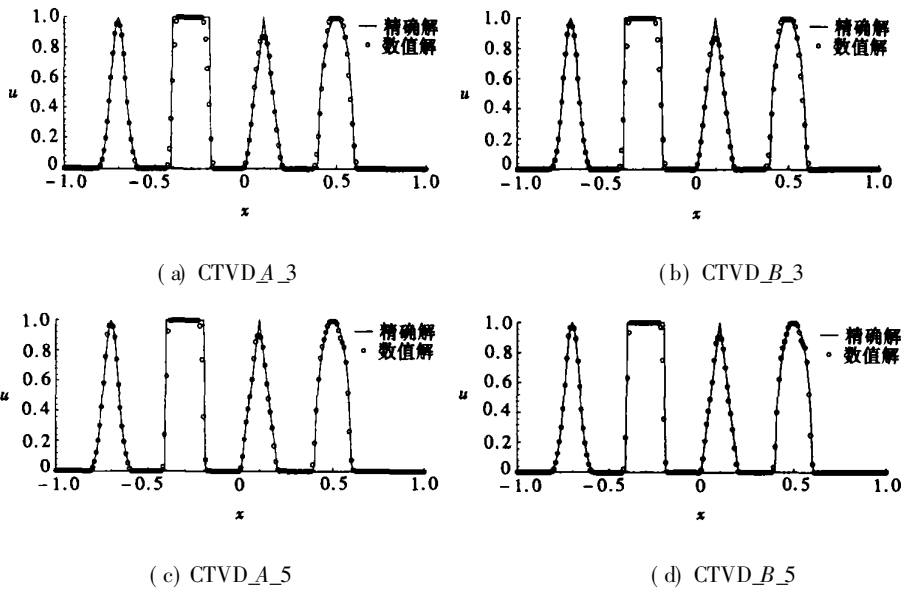


图 1 一维线性方程的解

3.2 一维 Euler 系统

3.2.1 Sod 问题的数值模拟

Sod 问题是一个典型的 Riemann 问题, 包含有激波、膨胀波和接触间断, 能较好地体现格式的能力. 初始条件为 $(\rho, u, p)_L = (1, 0, 1)$, $(\rho, u, p)_R = (0.125, 0, 0.1)$, 网格数为 100. 用 CTVD_B_3 模拟该问题的结果和 CTVD_A_3 的结果几乎完全重合, 所以本文没有给出它的计算结果, 同样的现象也处在 CTVD_B_5 和 CTVD_A_5 中. 结果表明(图 2), 这些计算结果与精确值都很接近, 5 阶格式的总性能优于 3 阶, 捕捉到的激波点少, 但在接触间断附近, 格式的分辨率轻微有点降低.

3.2.2 Shu 问题的数值模拟

Shu 问题描述一运动的 $Ma = 3$ 的激波和一个正弦熵波的非定常碰撞, 从某种意义上, 它被看作是激波和湍流干扰的模型问题. 当 $t = 1.8$ 时, 在紧挨激波波后的区域内, 密度将出现 12 个极值点, 不同分辨率格式对这 12 个极值的体现将出现明显的差异, 因而该问题是检验格式分辨率的一个经典例子. 通常的 TVD 格式的精度较低, 并且在极值点附近降为 1 阶, 所以

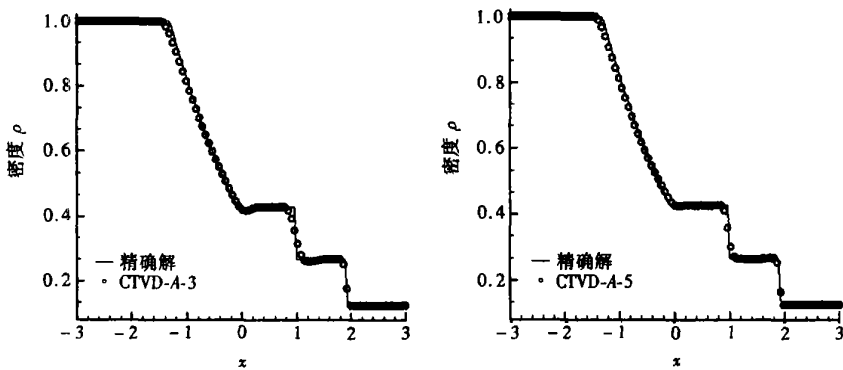


图2 Sod 问题的数值结果 ($t = 1.1, 3rd R_K[7]$)

对这些极值点的反映能力很弱。

问题的初始条件是:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.333333), & x < -4, \\ (1 + \varepsilon \sin(5x), 0, 1), & x \geq -4, \end{cases}$$

其中 $\varepsilon = 0.2$, 计算域为 $x \in [-5, 5]$, 计算网格取 300。从图 3 可以看出, 3 阶和 5 阶格式都能模拟出大部分极值, 5 阶格式与精确值非常接近, CTVD_A_5 在极值点附近的精度比 CTVD_B_5 略高。

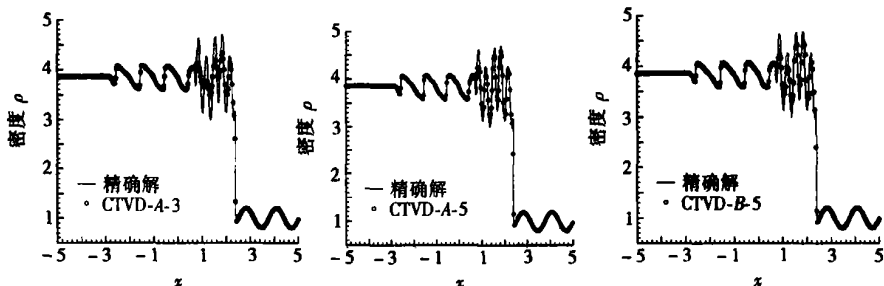


图3 Sod 问题的数值结果 ($t = 1.8, 3rd R_K[7]$)

3.3 二维激波_涡的相互作用

激波和涡的相互作用常看作是超声速噪声的主要来源之一。模型方程为理想气体的二维 Euler 方程。计算域 $[0, 2] \times [0, 1]$, 一个垂直于 x 轴 $Ma = 1.1$ 的静止激波位于 $x = 0.5$ 。在左边, 给定 $(u, v, p, \rho) = (1.1\sqrt{\gamma}, 0, 1, 1)$, 右边由 Rankine-Hugoniot 关系式给出。涡以扰动的形式迭加在流场上, 涡心在 $(x_c, y_c) = (0.25, 0.5)$ 处。定义 $T = p/\rho, S = \ln(p/\rho^\gamma)$, 涡为

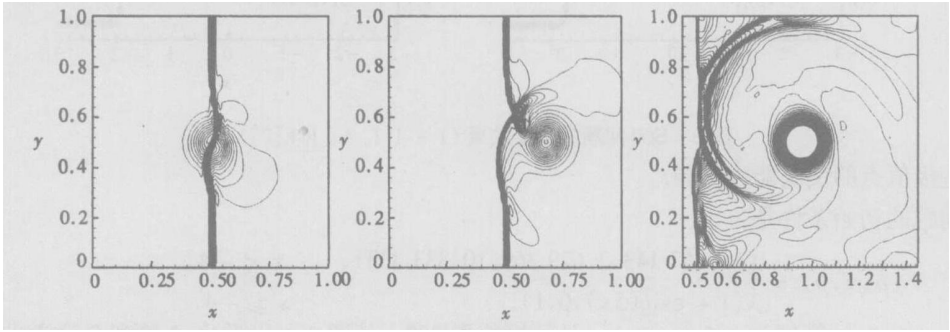
$$T' = -\frac{(\gamma - 1)\varepsilon^2 e^{2\alpha(1-\tau^2)}}{4\alpha\gamma}, \quad S' = 0, \quad u' = \varepsilon\tau e^{\alpha(1-\tau^2)} \sin\theta,$$

$$v' = -\varepsilon\tau e^{\alpha(1-\tau^2)} \cos\theta, \quad \tau = \frac{r}{r_c}, \quad r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2},$$

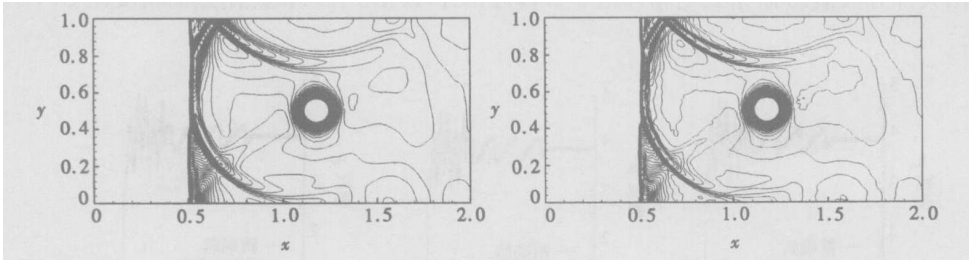
r_c 表示涡核的临界半径, 取 0.05, $\varepsilon = 0.3, \alpha = 0.204$ 。在 $y = 0$ 和 $y = 1$ 采用反射边界条件。

许多文献都曾对类似的问题进行了模拟(比如文献[7]), 为了提高对激波的分辨率, 他们通常的做法是在激波附近对网格进行加密。本文取均匀网格 200×100 。由于 CTVD 格式捕捉

到的激波占 2 个网格点左右, 而涡核仅占 5 个网格点, 所以当涡穿过激波时(图 4, $t = 0.2$), 涡核难于分辨。但是, 我们仍然能很明显地看到激波的扭曲现象, 而且涡穿过激波后也恢复得很完美。在 $t = 0.6$ 和 $t = 0.8$ 时刻, 能很明显地看见在上下壁面上的反射现象, 采用 3 阶和 5 阶 CTVD 格式的计算结果都比 Jiang 等人([7], Fig. 15) 采用 5 阶 WENO 格式在 251×100 的网格下计算的结果更精细, 体现出 CTVD 格式的高阶精度和分辨率, 同时体现出 CTVD 格式对网格的依赖性小。在许多实际问题中, 常不知道流场的大致情况, 因而也不能生成与流场相匹配的网格, 此时可考虑用 CTVD 格式来计算。



(a) CTVD_A_3, $t = 0.2$ (b) CTVD_A_3, $t = 0.35$ (c) CTVD_B_5, $t = 0.6$



(d) CTVD_A_3, $t = 0.8$ (e) CTVD_A_5, $t = 0.8$

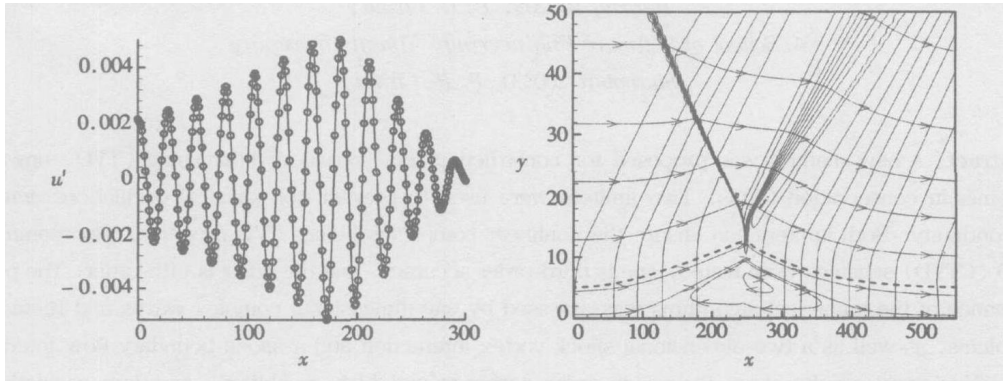
图 4 压力最小和最大值之间等间距 30 条等值线((a), (b)),
1.15~ 1.33 等间距 60 条等值线((c)~(e))

3.4 激波边界层的相互作用

计算采用的数学模型是守恒型可压 Navier-Stokes 方程和完全气体的状态方程, 粘性系数满足 Sutherland 公式, 粘性项采用 4 阶中心型紧致格式离散^[1], Prandtl 数取 $Pr = 0.72$, 比热比 $\gamma = 1.4$ 。

为检验计算的精度与准确度, 本文首先利用 3 阶线性迎风紧致格式模拟了 Tollmien-Schlichting 波在不带激波的平板层流边界层中的传播过程, 然后再用 CTVD_A_3 格式模拟了该过程。具体计算条件为: 来流 Mach 数 $Ma_\infty = 4.5$, 来流温度 $T_\infty = 100$ K, 以进口的边界层特征量 $\delta = \sqrt{\nu x / u}$ 为特征长度的 Reynolds 数 $Re = 1500$, 入口边界条件由相似解给出, 出口采用无反射的特征边界, 壁面是无滑移、绝热和零法向压力梯度条件。在 x 方向取均匀分布网格, $\Delta x = 1/3$, y 方向取指数分布, $\Delta y_{\min} = 0.0225$ 。在入口处引入空间模式的 T-S 扰动波, 其特征参数由可压流动的线性稳定性理论根据相似解给出。图 5(a) 所示的是在数值模拟的扰动波传播过程中, $t = 336.525$ 时刻在 $y = 1.25284$ 处扰动速度 u 沿 x 的分布, 可见 3 阶 CTVD 格式与 3 阶线性格式的计算结果基本完全重合, 表明 CTVD 格式在极值点附近仍具有较高精度。

现在流场中入射了一道与流向夹角为 -15° 的斜激波。这样一来,流场与无激波时的情况有较大变化,首先,由于在边界层内流速降低,激波变陡并最终消失在声速线上;其次,由于在波后形成很大的逆压梯度区,边界层将在激波位置附近的亚音速区出现局部分离,分离引起局部亚音速区的增大;再次,在分离区前缘将产生压缩波,在分离区顶端的正上方,入射激波将在此处消失,并立即反射出一簇很强的膨胀波,这一簇膨胀波将沿当地的 Mach 线方向传播,在分离区后缘又会对气体产生压缩。图 5(b) 很明显地反映出了这一复杂现象,该算例显示出了 CTVD 格式模拟粘性流动的能力。



—: 3 阶线性迎风紧致格式; °: CTVD_A 3 —: 压力等值线; ---: 声速线; →: 流线

图 5(a) 扰动 u 沿 x 轴的增长 ($t = 336.525$) 图 5(b) 激波_边界层相互作用

4 结 论

从一维标量守恒方程出发,给出了一种迎风型 TVD 格式的构造方法,然后通过限制器把 TVD 思想引入到线性紧致格式中,构造出非线性 TVD 型迎风紧致格式。本文采用了两种限制器,一种在极值点处的精度稍高(CTVD_A),另一种(CTVD_B)的稳定性稍强。通过 3 阶和 5 阶格式的数值实验表明,该类格式具有较高的精度和分辨率,并且在间断附近基本无振荡。

[参 考 文 献]

- [1] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral_like resolution[J]. Journal of Computational Physics, 1992, **103**(1): 16—42.
- [2] Ravichandran K S. Higher order KFVS algorithms using compact upwind difference operators[J]. Journal of Computational Physics, 1997, **230**(2): 161—173.
- [3] Tadmor E. Convenient total variation diminishing conditions for nonlinear difference schemes[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1988, **25**(5): 1002—1014.
- [4] Osher S. Riemann solvers, the entropy condition and difference approximations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1984, **21**(2): 217—238.
- [5] 涂国华,袁湘江,陈陆军. 适用于超声速的一种通量限制型紧致格式[J]. 航空学报, 2004, **25**(4): 327—332.
- [6] Pirozzoli S. Conservative hybrid compact_WENO schemes for shock_turbulence interaction[J]. Journal of Computational Physics, 2002, **178**(1): 81—117.
- [7] Jiang G_S, Shu C_W. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1996, **126**(1): 202—228.

A Class of Compact Upwind TVD Difference Schemes

TU Guo_hua^{1,2}, YUAN Xiang_jiang^{1,2}, XIA Zhi_qiang³, HU Zhen⁴

(1. China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang,
Sichuan 621000, P. R. China;

2. National CFD Laboratory, Beijing 100083, P. R. China;

3. Center for Information Analysis, Research Institute of Chemical Defense,
Beijing 102205, P. R. China;

4. School of Software Engineering, Tongji University,
Shanghai 200331, P. R. China)

Abstract: A new method was proposed for constructing total variation diminishing (TVD) upwind schemes in conservation forms. Two limiters were used to prevent non_physical oscillations across discontinuity. Both limiters can ensure the nonlinear compact schemes TVD property. Two compact TVD (CTVD) schemes were tested, one is third_order accuracy, and the other is fifth_order. The performance of the numerical algorithms was assessed by one_dimensional complex waves and Riemann problems, as well as a two_dimensional shock_vortex interaction and a shock_boundary flow interaction. Numerical results show their high_order accuracy and high resolution, and low oscillations across discontinuities.

Key words: high_order scheme; compact scheme; TVD scheme; shock_vortex; shock_boundary