

# 一类变形的 Boussinesq 方程组的 行波解分支\*

袁玉波<sup>1</sup>, 溥冬梅<sup>1,2</sup>, 李庶民<sup>2</sup>

(1. 电子科技大学 应用数学学院, 成都 610054;

2. 昆明理工大学 理学院, 昆明 650093

(李继彬推荐)

摘要: 在 Boussinesq 方程组求解方面, 用平面动力系统的分支理论研究了一类变形的 Boussinesq 方程组的行波解分支, 得到了不同参数条件下的分支集、相图及所有孤立波和扭波的精确公式.

关键词: Hamilton 系统; Boussinesq 方程组; 分支; 孤立行波; 扭波

中图分类号: O175.14 文献标识码: A

## 引 言

本文考虑以下一类变形的 Boussinesq 方程组的行波解

$$\begin{cases} H_t + (Hu)_x + u_{xxx} = 0, \\ u_t + H_x + uu_x = 0, \end{cases} \quad (1)$$

这是一个关于水波的方程组, 其中  $u(x, t)$  是水波的波速,  $H(x, t)$  是水的总深度, 下标表示偏导数<sup>[1~5]</sup>.

为了求得方程组(1)的行波解, 并使其满足下列条件

$$u'(\xi), u''(\xi), u(\xi), H'(\xi) \rightarrow 0, |\xi| \rightarrow \infty,$$

我们引入如下变换

$$H(x, t) = \varphi(\xi), u(x, t) = \psi(\xi), \xi = x - \lambda t, \quad (2)$$

其中  $\lambda$  是待定的参数.

把式(2)代入方程组(1)中, 方程组(1)变为如下形式

$$\begin{cases} -\lambda\psi'(\xi) + (\varphi(\xi)\psi(\xi))' + \psi(\xi)\psi'(\xi) = 0, \\ -\lambda\psi'(\xi) + \psi'(\xi) + \psi(\xi)\psi'(\xi) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

从方程组(3)的第 2 个方程, 我们可以得到

$$\psi'(\xi) = \lambda\psi'(\xi) - \psi\psi' = \psi'(\xi)(\lambda - \psi(\xi)). \quad (4)$$

把式(4)代入方程组(3), 可以得到如下方程

$$-\lambda(\lambda - \psi(\xi))\psi'(\xi) + (\varphi(\xi)\psi(\xi))' + \psi(\xi)\psi'(\xi) = 0. \quad (5)$$

\* 收稿日期: 2003\_12\_20; 修订日期: 2006\_03\_06

基金项目: 四川省应用基础研究计划资助项目(05JY029\_068\_2)

作者简介: 袁玉波(1976—, 男, 云南宣威人, 博士(联系人. Tel: + 86\_28\_83207758; E\_mail: ybyuan@uestc.edu.cn)

对方程(5) 两边关于  $\xi$  积分得到

$$\varphi(\xi) = \lambda\phi(\xi) - \frac{1}{2}\phi^2(\xi) + c_1, \quad (6)$$

其中  $c_1$  是积分常数。

把式(6) 代入式(5) 后, 我们可以得出

$$(\phi)'(\xi) \left[ -\frac{3}{2}\phi^2(\xi) + 3\lambda\phi(\xi) - \lambda^2 + c_1 \right] + \phi(\xi) = 0. \quad (7)$$

再对方程(7) 关于  $\xi$  积分可以得到如下方程

$$-\frac{1}{2}\phi^3(\xi) + \frac{3}{2}\lambda\phi^2(\xi) - (\lambda^2 - c_1)\phi(\xi) + \phi''(\xi) - c_2 = 0, \quad (8)$$

其中  $c_2$  是积分常数。

令  $y = \phi'(\xi)$ , 可以得到下面的行波解方程组, 它是一个平面自治系统<sup>[6~9]</sup>

$$\begin{cases} \phi'(\xi) = y, \\ y'(\xi) = \frac{1}{2}\phi^3(\xi) - \frac{3}{2}\lambda\phi^2(\xi) + (\lambda^2 - c_1)\phi(\xi) + c_2. \end{cases} \quad (9)$$

观察方程组(9), 可以看出它是一个具有如下 Hamilton 函数的平面 Hamilton 系统<sup>[1~5]</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\phi, y) &= \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{8}\phi^4(\xi) + \frac{1}{2}\lambda\phi^3(\xi) - \frac{1}{2}\lambda^2\phi^2(\xi) + \\ &\quad \frac{1}{2}c_1\phi^2(\xi) - c_2\phi(\xi) = h. \end{aligned} \quad (10)$$

假设  $u(x, t) = \phi(x - ct) = \phi(\xi)$  是方程组(1) 的在  $\xi \in (-\infty, \infty)$  上的连续解, 并且  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \phi(\xi) = \alpha$  和  $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \phi(\xi) = \beta$ . 则下面两个结论是众所周知的:

- (i) 如果  $\alpha = \beta$ , 那么  $u(x, t)$  称为孤立波解;
- (ii) 如果  $\alpha \neq \beta$ , 那么  $u(x, t)$  称为扭波解。

一般来说, 方程组(1) 的一个孤立波解对应方程组(9) 的一个同宿轨道。方程组(1) 的一个扭波解对应方程组(9) 的一个异宿轨道。同样, 方程组(9) 的一个周期轨道对应着方程组(1) 的一个周期行波解。因此, 为了考察方程组(1) 的孤立波和扭波的所有分支, 我们就必须找出 Hamilton 系统(9) 在参数空间  $(\lambda, c_1, c_2)$  下对应的周期环、同宿和异宿轨道。在我们的研究中, 平面动力系统的分支理论起着重要的作用<sup>[6~9]</sup>。

本文的内容是这样安排的, 在第 1 节里研究了平面 Hamilton 系统(9) 的分支集和相图。在图 2、4、6 所示的参数条件下, 在第 2 节里, 给出系统(9) 所有的孤立波解和扭波解(反扭波解) 的精确公式。

## 1 系统(9) 的分支集和相图

在这节里, 研究平面 Hamilton 系统(9) 的分支集及相图。显然, 在  $(\phi, y)$  平面上, 系统(9) 的平衡点的横坐标是函数

$$f(\phi) = \phi^3(\xi) - 3\lambda\phi^2(\xi) + 2(\lambda^2 - c_1)\phi(\xi) + 2c_2 \quad (11)$$

的零点。并且

$$f'(\phi) = 3\phi^2(\xi) - 6\lambda\phi(\xi) + 2(\lambda^2 - c_1).$$

若  $\Delta = 12\lambda^2 + 24c_1 > 0$ , 则两个零点为

$$\phi_{1,2}^* = \lambda \pm \frac{\sqrt{3\lambda^2 + 6c_1}}{3}.$$

若  $(\phi_e, 0)$  是系统(9) 的平衡点, 则在这一点处系统(9) 所决定的 Jacobi 行列式为

$$J(\phi_e, 0) = -\frac{3}{2}\phi_e^2(\xi) + 3\lambda\phi_e(\xi) - \lambda^2 + c_1 = -\frac{1}{2}f'(\phi_e).$$

根据平面动力系统的理论知道,若  $J(\phi_e, 0) > 0$  (或  $< 0$ ), 则平衡点  $(\phi_e, 0)$  是一个中心(或是一个鞍点); 若  $J(\phi_e, 0) = 0$  且其 Poincaré 指标为零, 则  $(\phi_e, 0)$  是一个尖点. 对上列事实作定性分析, 可得到下列结果:

假设

$$f(\phi) = \phi^3(\xi) - 3\lambda\phi^2(\xi) + 2(\lambda^2 - c_1)\phi(\xi) + 2c_2 = (\phi - \phi_1)(\phi - \phi_2)(\phi - \phi_3), \quad (12)$$

其中  $\phi_1 \leq \phi_2 \leq \phi_3$ .

在以下这部分, 将对参数的不同情形进行讨论.

情形 I  $\lambda^2 = c_1$

在这种情况下,  $\phi_1^* = 2\lambda, \phi_2^* = 0$ . 在  $(\lambda, c_2)$  参数平面上, 有 3 条分支曲线

$$L_1: c_2 = 0, L_2: c_2 = 2\lambda^3, L_3: c_2 = \lambda^3,$$

这 3 条曲线把  $(\lambda, c_2)$  平面分成 6 个区域:  $A_1 \sim A_6$ , 见图 1.

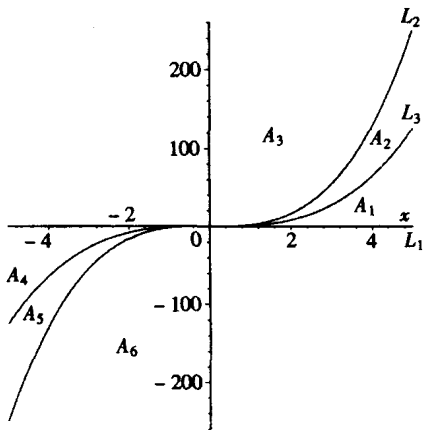


图 1 当  $\lambda^2 = c_1$  时, 式(9)的参数平面的分割及分支曲线

当  $(\lambda, c_2) \in L_1$  时, 有

$$f(\phi) = \phi^3 - 3\lambda\phi^2 = 0,$$

其 3 个根为  $\phi_1 = 0, \phi_2 = 0, \phi_3 = 3\lambda$ . 把这 3 个根分别代入系统(9)的线性化系统的行列式, 得到

$$J(\phi_1, 0) = 0, J(\phi_2, 0) = 0, J(\phi_3, 0) = -\frac{9}{2}\lambda^2,$$

此时, 系统(9)有一个尖点和一个鞍点.

当  $(\lambda, c_2) \in L_2$ , 有

$$f(\phi) = \phi^3 - 3\lambda\phi^2 + 4\lambda^3 = (\phi + \lambda)(\phi + 2\lambda)^2,$$

其 3 个根为  $\phi_1 = -\lambda, \phi_2 = \phi_3 = 2\lambda$ . 把这 3 个根分别代入系统(9)的线性化系统的行列式, 得到

$$J(\phi_1, 0) = -\frac{9}{2}\lambda^2, J(\phi_2, 0) = 0, J(\phi_3, 0) = 0,$$

此时, 系统(9)也有一个尖点和一个鞍点.

当  $(\lambda, c_2) \in L_3$  时, 有

$$f(\phi) = \phi^3 - 3\lambda\phi^2 + 2\lambda^2 = (\phi - (1 - \sqrt{3})\lambda)(\phi - \lambda)(\phi - (1 + \sqrt{3})\lambda),$$

其 3 个根为  $\phi_1 = (1 - \sqrt{3})\lambda, \phi_2 = \lambda, \phi_3 = (1 + \sqrt{3})\lambda$ . 把这 3 个根分别代入系统(9)的线性化系统的行列式, 得到

$$J(\phi_1, 0) = -3\lambda^3 < 0, J(\phi_2, 0) = \frac{3}{2}\lambda^2 > 0, J(\phi_3, 0) = -3\lambda^2 < 0,$$

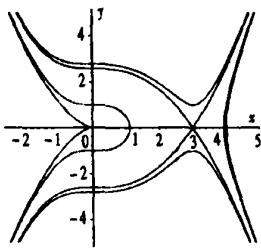
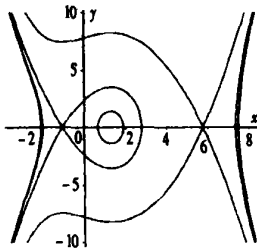
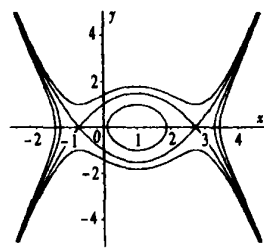
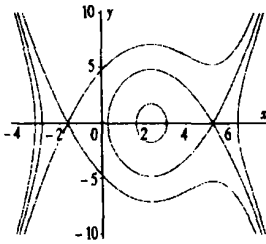
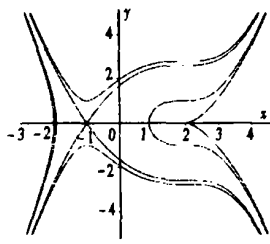
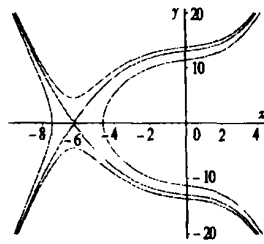
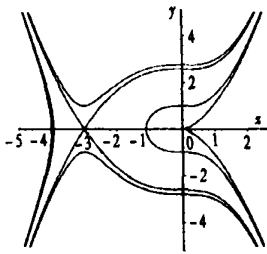
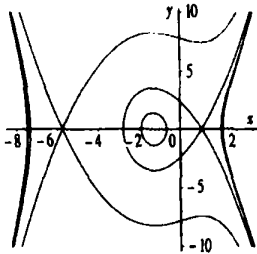
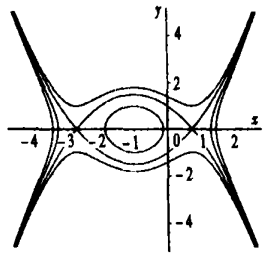
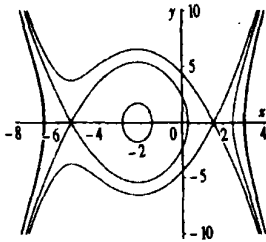
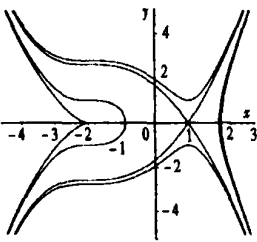
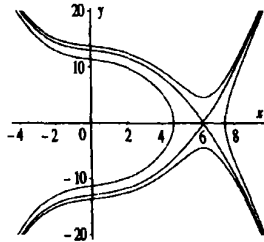
此时, 系统(9)有一个中心和两个鞍点, 且  $\mathcal{M}(\phi_1, 0) = \mathcal{M}(\phi_3, 0)$ . 则有系统(9)的两条连接两个鞍点的两条异宿轨.

图 2 显示了当  $\lambda^2 = c_1$  时, 系统(9)的相图分支.

情形 II  $\lambda^2 > c_1$

作变换

$$(\lambda^2 - c_1)\xi \rightarrow \zeta, \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 - c_1}}\phi \rightarrow \phi, \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 - c_1}}y \rightarrow y, \quad (13)$$

(a)  $(c_2, \lambda) \in L_1, \lambda > 0$ (b)  $(c_2, \lambda) \in A_1$ (c)  $(c_2, \lambda) \in L_3, \lambda > 0$ (d)  $(c_2, \lambda) \in A_2$ (e)  $(c_2, \lambda) \in L_2, \lambda > 0$ (f)  $(c_2, \lambda) \in A_3$ (g)  $(c_2, \lambda) \in L_1, \lambda < 0$ (h)  $(c_2, \lambda) \in A_4$ (i)  $(c_2, \lambda) \in L_3, \lambda < 0$ (j)  $(c_2, \lambda) \in A_5$ (k)  $(c_2, \lambda) \in L_2, \lambda < 0$ (l)  $(c_2, \lambda) \in A_6$ 图2 当  $\lambda^2 = c_1$  时, 系统(9)的相图分支

则系统(9)可以变为

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{d\zeta} = \frac{1}{\lambda^2 - c_1} y, \\ \frac{dy}{d\zeta} = \frac{1}{2} \phi^3 - \frac{3}{2} e \phi^2 + \phi + c^*, \end{cases} \quad (14)$$

其中  $e = \lambda \sqrt{\lambda^2 - c_1}$ ,  $c^* = (1/(\lambda^2 - c_1))^{3/2} c_2$ .

系统(14)的Hamilton函数为

$$\mathcal{A}(\phi, y) = \frac{1}{2(\lambda^2 - c_1)} y^2 - \frac{1}{8} \phi^4 + \frac{1}{2} e \phi^3 - \frac{1}{2} \phi^2 - \phi e^* \quad (15)$$

显然, 在  $(\phi, y)$  平面上, 系统(14)的平衡点的横坐标是函数

$$f_1(\phi) = \phi^3 - 3e\phi^2 + 2\phi + 2c^* = (\phi - \phi_1)(\phi - \phi_2)(\phi - \phi_3)$$

的零点, 其中  $\phi_1 \leq \phi_2 \leq \phi_3$ . 注意到

$$f_1'(\phi) = 3\phi^2 - 6e\phi + 2,$$

因此,  $f_1'(\phi)$  有两个零点, 分别为

$$\phi_{1,2}^* = \frac{1}{3}(3e \pm \sqrt{9e^2 - 6}).$$

在  $(e, c^*)$  参数平面上, 存在 5 条分支曲线

$$L_1: c^* = \frac{3e^2 - 2}{9} \sqrt{9e^2 - 6} - e + e^3,$$

$$L_2: c^* = -\frac{3e^2 + 2}{9} \sqrt{9e^2 - 6} - e + e^3,$$

$$L_3: c^* = e^3 - e$$

及  $e = -\frac{\sqrt{6}}{3}, e = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

设  $(\phi_e, 0)$  是系统(14)的一个平衡点, 则在这一点, 系统(14)所决定的 Jacobi 行列式具有如下形式

$$J(\phi_e, 0) = \frac{-1}{2(\lambda^2 - c_1)} f_1'(\phi_e).$$

3 条分支曲线把  $(\lambda, c^*)$  平面分成 9 个区域:  $B_1 \sim$

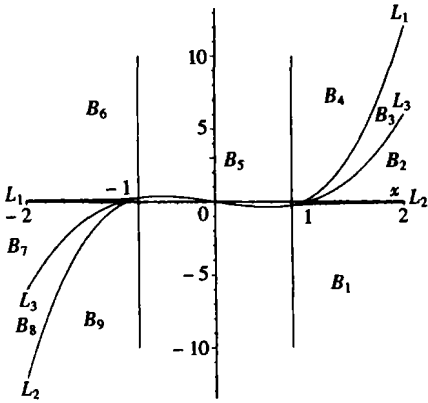


图 3 当  $\lambda^2 > c_1$  时, 系统(14)的参数平面的分割及分支曲线

$B_9$ , 见图 3.

当  $(e, c^*) \in L_1$  时, 得到

$$f_1(\phi) = \phi^3 - 3e\phi^2 + 2\phi + \frac{6e^2 + 4}{9} \sqrt{9e^2 - 6} - 2e + 2e^3 = 0,$$

即  $9\phi^3 - 27e\phi^2 + 18\phi + (6e^2 + 4) \sqrt{9e^2 - 6} - 18e + 18e^3 = 0$ .

其 3 个根分别为

$$\phi_1 = -2 \left[ \frac{3e^2 + 2}{9} \sqrt{9e^2 - 6} \right]^{1/3} + e, \quad \phi_2 = \phi_3 = \left[ \frac{3e^2 + 2}{9} \sqrt{9e^2 - 6} \right]^{1/3} + e.$$

当  $(e, c^*) \in L_2$  时, 有

$$f_1(\phi) = \phi^3 - 3e\phi^2 + 2\phi + \frac{-6e^2 + 4}{9} \sqrt{9e^2 - 6} - 2e + 2e^3 = 0,$$

即  $9\phi^3 - 27e\phi^2 + 18\phi + (-6e^2 + 4) \sqrt{9e^2 - 6} - 18e + 18e^3 = 0$ .

其 3 个根分别为

$$\phi_1 = -2 \left[ \frac{-3e^2 + 2}{9} \sqrt{9e^2 - 6} \right]^{1/3} + e, \quad \phi_2 = \phi_3 = \left[ \frac{-3e^2 + 2}{9} \sqrt{9e^2 - 6} \right]^{1/3} + e.$$

当  $(e, c^*) \in L_3$  时, 系统(14)有一个尖点和一个鞍点.

当  $(e, c^*) \in L_3$  时, 有

$$f_1(\phi) = \phi^3 - 3e\phi^2 + 2\phi + 2c^* = (\phi - e)(\phi^2 - 2e\phi - 2e^2 + 2) = 0$$

其 3 个根分别为

$$\phi_1 = e - \sqrt{3e^2 - 2}, \quad \phi_2 = e, \quad \phi_3 = e + \sqrt{3e^2 - 2}.$$

把这 3 个根分别代入系统(14) 的线性化系统的行列式, 得到

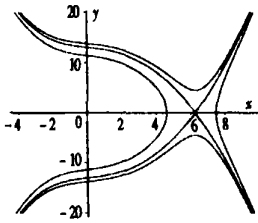
$$J(\phi_1, 0) = -\frac{1}{2(\lambda^2 - c_1)}(6e^4 - 4) < 0,$$

$$J(\phi_2, 0) = -\frac{1}{2(\lambda^2 - c_1)}(3e^2 + 2) > 0,$$

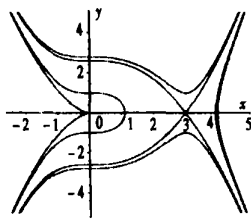
$$J(\phi_3, 0) = -\frac{1}{2(\lambda^2 - c_1)}(6e^4 - 4) < 0,$$

这里  $e > \sqrt{6}/3$  或  $e < -\sqrt{6}/3$ .

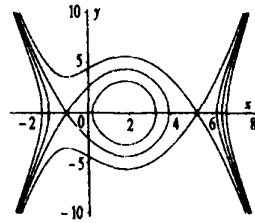
当  $(e, c^*) \in L_3$  时, 系统(14) 有一个中心和两个鞍点, 且  $\mathcal{A}(\phi_1, 0) = \mathcal{A}(\phi_3, 0)$ , 则有式(14) 的两条连接两个鞍点的两条异宿轨.



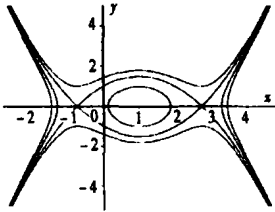
(a)  $(e, c^*) \in B_1$



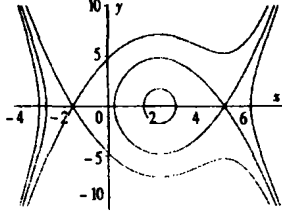
(b)  $(e, c^*) \in L_2, e > \sqrt{6}/3$



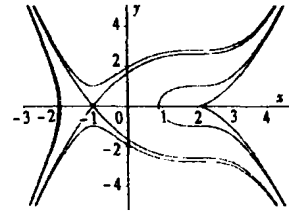
(c)  $(e, c^*) \in B_2$



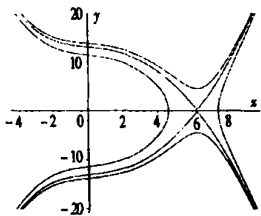
(d)  $(e, c^*) \in L_3, e > \sqrt{6}/3$



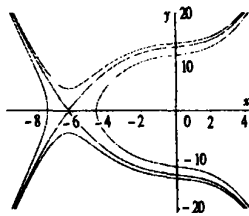
(e)  $(e, c^*) \in B_3$



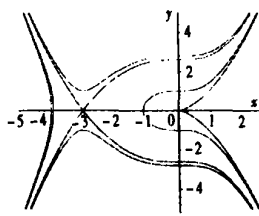
(f)  $(e, c^*) \in L_1, e > \sqrt{6}/3$



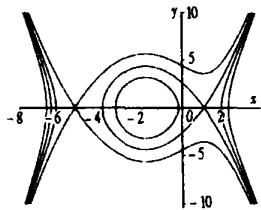
(g)  $(e, c^*) \in B_4$



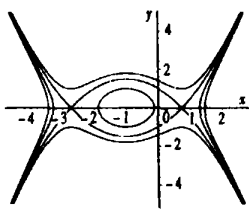
(h)  $(e, c^*) \in B_6$



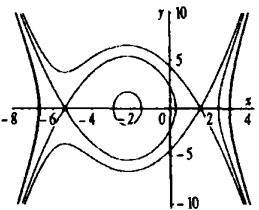
(i)  $(e, c^*) \in L_1, e < -\sqrt{6}/3$



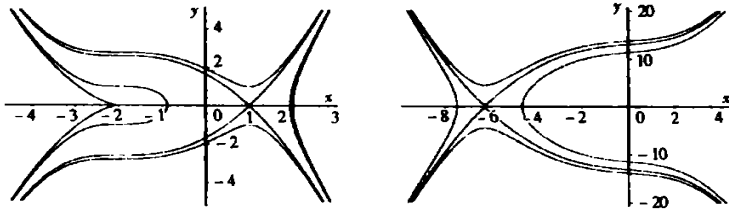
(j)  $(e, c^*) \in B_7$



(k)  $(e, c^*) \in L_3, e < -\sqrt{6}/3$



(l)  $(e, c^*) \in B_8$



$$(m(e, c^*) \in L_2, e < -\sqrt{6}/3 \quad (n(e, c^*) \in B_0$$

图 4 当  $\lambda^2 > c_1$  时, 系统(14)的相图分支

图 4 显示了当  $\lambda^2 > c_1$  时, 系统(14)的相图分支.

情形 III  $\lambda^2 < c_1$

作变换

$$(c_1 - \lambda^2)\xi \rightarrow \eta, \quad \sqrt{\frac{1}{c_1 - \lambda^2}}\phi \rightarrow \theta, \quad \sqrt{\frac{1}{c_1 - \lambda^2}}y \rightarrow y, \tag{16}$$

则式(9)变为

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{1}{c_1 - \lambda^2 y^2}, \\ \frac{dy}{d\eta} = \frac{1}{2}\theta^3 - \frac{3}{2}e\theta^2 - \theta + c^*, \end{cases} \tag{17}$$

其中  $e = \lambda \sqrt{1/(c_1 - \lambda^2)}, c^* = (1/(c_1 - \lambda^2))^{3/2}c_2$ .

系统(17)的 Hamilton 函数为

$$\mathcal{H}(\theta, y) = \frac{1}{2(c_1 - \lambda^2)}y^2 - \frac{1}{8}\theta^4 + \frac{1}{2}e\theta^3 + \frac{1}{2}\theta^2 - \theta c^*.$$

显然, 在  $(\theta, y)$  平面上, 系统(17)的平衡点的横坐标是函数

$$f_2(\theta) = \theta^3 - 3e\theta^2 - 2\theta + 2c^* = (\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2)(\theta - \theta_3)$$

的零点. 其中  $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3$ . 注意到

$$f_2'(\theta) = 3\theta^2 - 6e\theta - 2,$$

$f_2'(\theta)$  的两个零点分别为

$$\theta_{1,2}^* = \frac{1}{3}(3e \pm \sqrt{9e^2 + 6}).$$

设  $(\theta_e, 0)$  是系统(17)的一个平衡点. 则在这一点, 系统(17)所决定的 Jacobi 行列式有如下形式

$$J(\theta_e, 0) = -\frac{1}{2(c_1 - \lambda^2)}f_2'(\theta_e).$$

在  $(e, c^*)$  参数平面上, 存在 3 条分支曲线

$$L_1: c^* = \frac{3e^2 + 2}{9} \sqrt{9e^2 + 6} + e + e^3,$$

$$L_2: c^* = \frac{-3e^2 - 2}{9} \sqrt{9e^2 + 6} + e + e^3,$$

$$L_3: c^* = e + e^3.$$

这 3 条分支曲线把  $(\lambda, c^*)$  平面分成 4 个区域:  $C_1 \sim C_4$ . 见图 5.

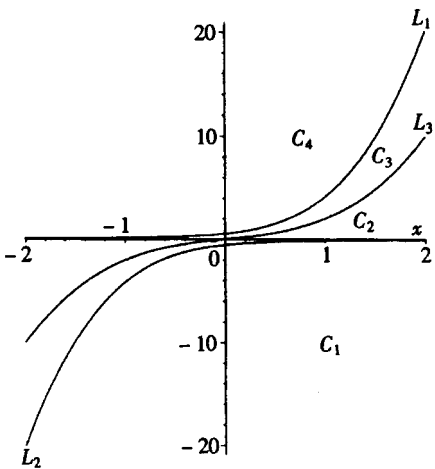


图 5 当  $\lambda^2 < c_1$  时, 系统(17)的参数平面的分割及分支曲线

当  $(e, c^*) \in L_1$  时, 有

$$f_2(\theta) = \theta^3 - 3e\theta^2 - 2\theta + \frac{6e^2+4}{9} \sqrt{9e^2+6} + 2e + 2e^3 = 0,$$

即  $9\theta^3 - 27e\theta^2 - 18\theta + (6e^2+4) \sqrt{9e^2+6} + 18e + 18e^3 = 0$

其 3 个根分别为

$$\theta_1 = -2 \left[ \frac{3e^2+2}{9} \sqrt{9e^2+6} \right]^{1/3} + e, \quad \theta_2 = \theta_3 = \left[ \frac{3e^2+2}{9} \sqrt{9e^2+6} \right]^{1/3} + e.$$

当  $(e, c^*) \in L_2$  时, 有

$$f_2(\theta) = \theta^3 - 3e\theta^2 - 2\theta - \frac{6e^2+4}{9} \sqrt{9e^2+6} + 2e + 2e^3 = 0,$$

即  $9\theta^3 - 27e\theta^2 - 18\theta - (6e^2+4) \sqrt{9e^2+6} + 18e + 18e^3 = 0$

其 3 个根分别为

$$\theta_1 = \theta_2 = \left[ -\frac{3e^2+2}{9} \sqrt{9e^2+6} \right]^{1/3} + e, \quad \theta_3 = 2 \left[ \frac{3e^2+2}{9} \sqrt{9e^2+6} \right]^{1/3} + e.$$

当  $(e, c^*) \in L_1, L_2$  时, 系统(17) 有一个尖点和一个鞍点.

当  $(e, c^*) \in L_3$  时, 有

$$f_2(\theta) = \theta^3 - 3e\theta^2 - 2\theta + 2(e + e^3) = (\theta - e)(\theta^2 - 2e\theta - 2e^2 - 2) = 0$$

其 3 个根分别为

$$\theta_1 = e - \sqrt{3e^2+2}, \quad \theta_2 = e, \quad \theta_3 = e + \sqrt{3e^2+2}.$$

把这 3 个根分别代入系统(17) 的线性化系统的行列式, 得到

$$J(\theta_1, 0) = -\frac{1}{2(c_1 - \lambda^2)}(6e^4 + 4) < 0,$$

$$J(\theta_2, 0) = -\frac{1}{2(c_1 - \lambda^2)}(-3e^2 - 2) > 0,$$

$$J(\theta_3, 0) = -\frac{1}{2(c_1 - \lambda^2)}(6e^4 + 4) < 0.$$

当  $(e, c^*) \in L_3$  时, 系统(17) 有一个中心和两个鞍点, 且  $\mathcal{M}(\theta_1, 0) = \mathcal{M}(\theta_3, 0)$ , 则有系统(17) 的两条连接两个鞍点的两条异宿轨.

图 6 显示了当  $\lambda^2 < c_1$  时, 系统(17) 的相图分支.

## 2 由图 2, 4, 6 中相图确定的孤立波解和扭波解

在这一节里, 将给出图 2, 4, 6 的相图所讨论的在各种参数条件下的所有孤立波与扭结波的精确公式, 通过对行波系统(9) 与 Hamilton 函数(10) 的计算, 得到了下列结果:

情形 I  $\lambda^2 = c_1$  (见图 2)

记

$$p_{1i} = 3\phi_i(\phi_i - 2\lambda), \quad q_{1i} = \lambda - \phi_i,$$

$$r_{1i} = \sqrt{\frac{-\phi_i^2 + 2\lambda\phi_i + 2\lambda^2}{2}}, \quad \omega_{1i} = \frac{\sqrt{6\phi_i(\phi_i - 2\lambda)}}{2}, \quad i = 1, 3,$$

其中  $\phi_i (i = 1, 3)$  是在第 1 节定义的函数  $f(\phi)$  的两个根.

1 当  $(\lambda, c_2) \in$  图 2 中 (b) 和 (j) 时, 方程组(1) 有下列峰状孤立波解



$$\begin{cases} u(x, t) = \phi(\xi) = \phi_1 + \frac{p_{11}}{q_{11} + r_{11} \cosh(\omega_{11} \xi)}, \\ H(x, t) = \varphi(\xi) = \lambda \phi(\xi) - \frac{1}{2} \phi^2(\xi) + c_1, \xi = x - \lambda t; \end{cases}$$

2 当  $(\lambda, c_2) \in$  图 2 中(d) 和(h) 时, 方程组(1) 有下列峰状孤波解

$$\begin{cases} u(x, t) = \phi(\xi) = \phi_3 + \frac{p_{13}}{q_{13} - r_{13} \cosh(\omega_{13} \xi)}, \\ H(x, t) = \varphi(\xi) = \lambda \phi(\xi) - \frac{1}{2} \phi^2(\xi) + c_1, \xi = x - \lambda t; \end{cases}$$

3 当  $(\lambda, c_2) \in$  图 2 中(c) 和(i) 时, 方程组(1) 有下列扭波与反扭波解

$$\begin{cases} u(x, t) = \phi(\xi) = (1 \pm \sqrt{3}) \lambda \coth(\sqrt{3} \xi), \\ H(x, t) = \varphi(\xi) = \lambda \phi(\xi) - \frac{1}{2} \phi^2(\xi) + c_1, \xi = x - \lambda t. \end{cases}$$

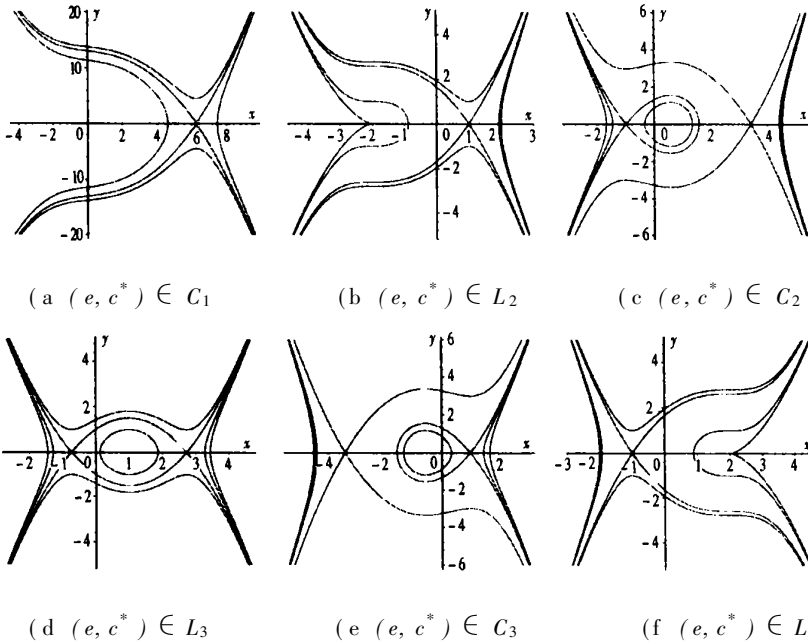


图 6 当  $\lambda^2 < c_1$  时, 系统(17)的相图分支

情形 II  $\lambda^2 > c_1$  (见图 4)

在这种情形下, 从第 1 节可以看出

$$\begin{aligned} c_2 \equiv c_3 &= \left( \frac{1}{\lambda^2 - c_1} \right)^{-3/2} \left[ \frac{3e^2 - 2}{9} \sqrt{9e^2 - 6} - e + e^3 \right], \\ c_2 \equiv c_4 &= \left( \frac{1}{\lambda^2 - c_1} \right)^{-3/2} \left[ -\frac{3e^2 + 2}{9} \sqrt{9e^2 - 6} - e + e^3 \right], \\ c_2 \equiv c_5 &= \left( \frac{1}{\lambda^2 - c_1} \right)^{-3/2} [e^3 - e], \end{aligned}$$

这里的  $c_3, c_4, c_5$  分别对应当  $(e, c^*) \in$  图 3 中  $L_1, L_2, L_3$  时  $c_2$  的值. 记

$$p_{2i} = 3\phi_i^2 - 6\lambda\phi_i + 2(\lambda - c_1), \quad q_{2i} = \lambda - \phi_i,$$

$$r_{2i} = \sqrt{\frac{-\phi_i^2 + 2\lambda\phi_i + 2c_1}{2}}, \quad \omega_{2i} = \sqrt{\frac{6\phi_i(\phi_i - 2\lambda) + 2(\lambda^2 - c_1)}{2}}, \quad i = 1, 3,$$

其中  $\phi_i (i = 1, 3)$  是在第 1 节定义的函数  $f(\phi)$  的两个根。

1 当  $(e, c^*) \in$  图 4 中(c 和(l 时, 方程组(1 有下列峰状孤波解

$$\begin{cases} u(x, t) = \phi(\xi) = \phi_1 + \frac{p_{21}}{q_{21} + r_{21} \cosh(\omega_{21} \xi)}, \\ H(x, t) = \varphi(\xi) = \lambda \phi(\xi) - \frac{1}{2} \phi^2(\xi) + c_1, \xi = x - \lambda t; \end{cases}$$

2 当  $(e, c^*) \in$  图 4 中(e 和(j 时, 方程组(1 有下列谷状孤波解

$$\begin{cases} u(x, t) = \phi(\xi) = \phi_3 + \frac{p_{23}}{q_{23} - r_{23} \cosh(\omega_{23} \xi)}, \\ H(x, t) = \varphi(\xi) = \lambda \phi(\xi) - \frac{1}{2} \phi^2(\xi) + c_1, \xi = x - \lambda t; \end{cases}$$

3 当  $(e, c^*) \in$  图 4 中(d 和(k 时, 方程组(1 有下列扭波与反扭波解

$$\begin{cases} u(x, t) = \phi(\xi) = (\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 2c_1}) \coth(\sqrt{\lambda^2 + 2c_1} \xi), \\ H(x, t) = \varphi(\xi) = \lambda \phi(\xi) - \frac{1}{2} \phi^2(\xi) + c_1, \xi = x - \lambda t. \end{cases}$$

情形 III  $\lambda^2 < c_1$  (见图 6)

在这种情形下, 从第 1 节可以看出

$$\begin{aligned} c_2 \equiv c_6 &= \left[ \frac{1}{c_1 - \lambda^2} \right]^{-3/2} \left[ \frac{3e^2 + 2}{9} \sqrt{9e^2 + 6 + e + e^3} \right], \\ c_2 \equiv c_7 &= \left[ \frac{1}{c_1 - \lambda^2} \right]^{-3/2} \left[ -\frac{3e^2 - 2}{9} \sqrt{9e^2 + 6 + e + e^3} \right], \\ c_2 \equiv c_8 &= \left[ \frac{1}{c_1 - \lambda^2} \right]^{-3/2} [e^3 + e]. \end{aligned}$$

这里的  $c_6, c_7, c_8$  分别对应当  $(e, c^*) \in$  图 5 中  $L_1, L_2, L_3$  时  $c_2$  的值。记

$$\begin{aligned} p_{3i} &= 3\phi_i^2 - 6\lambda\phi_i + 2(\lambda - c_1), \quad q_{3i} = \lambda - \phi_i, \\ r_{3i} &= \sqrt{\frac{-\phi_i^2 + 2\lambda\phi_i + 2c_1}{2}}, \quad \omega_{3i} = \frac{\sqrt{6\phi_i(\phi_i - 2\lambda) + 2(\lambda^2 - c_1)}}{2}, \quad i = 1, 3, \end{aligned}$$

其中  $\phi_i (i = 1, 3)$  是在第 1 节定义的函数  $f(\phi)$  的两个根。

1 当  $(e, c^*) \in$  图 6 中(c 时, 方程组(1 有下列峰状孤波解

$$\begin{cases} u(x, t) = \phi(\xi) = \phi_1 + \frac{p_{31}}{q_{31} + r_{31} \cosh(\omega_{31} \xi)}, \\ H(x, t) = \varphi(\xi) = \lambda \phi(\xi) - \frac{1}{2} \phi^2(\xi) + c_1, \xi = x - \lambda t; \end{cases}$$

2 当  $(e, c^*) \in$  图 6 中(e 时, 方程组(1 有下列谷状孤波解

$$\begin{cases} u(x, t) = \phi(\xi) = \phi_3 + \frac{p_{33}}{q_{33} - r_{33} \cosh(\omega_{33} \xi)}, \\ H(x, t) = \varphi(\xi) = \lambda \phi(\xi) - \frac{1}{2} \phi^2(\xi) + c_1, \xi = x - \lambda t; \end{cases}$$

3 当  $(e, c^*) \in$  图 6 中(d 时, 方程组(1 有下列扭波与反扭波解

$$\begin{cases} u(x, t) = \phi(\xi) = (\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 2c_1}) \coth(\sqrt{\lambda^2 + 2c_1} \xi), \\ H(x, t) = \varphi(\xi) = \lambda \phi(\xi) - \frac{1}{2} \phi^2(\xi) + c_1, \xi = x - \lambda t. \end{cases}$$

总而言之, 从上面的讨论, 可以得出下列定理:

定理 1 有 9 种不同的参数条件使得一类变形的 Boussinesq 方程组(1) 有 9 个孤立波与扭波的公式.

致谢 本文得到电子科技大学青年基金重点项目(JX04042) 的资助, 在此表示衷心的感谢.

### [参 考 文 献]

- [1] LI Ji\_bin, ZHANG Li\_jun. Bifurcations of travelling wave solutions in generalized Pochhammer-Chree equation[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2002, **14**(4): 581—593.
- [2] LI Ji\_bin, LIU Zheng\_rong. Travelling wave solutions for a class of nonlinear dispersive equations[J]. Chinese Ann Math, Ser B, 2002, **23**(3): 397—418.
- [3] 张解放. 变更 Boussinesq 方程和 Kupershmidt 方程的多孤子解[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(2): 171—175.
- [4] YAN Zhen\_ya, ZHANG Hong\_qing. New explicit and exact travelling wave solutions for a system of the variant Boussinesq equations in mathematical physics[J]. Physics Letters A, 1999, **252**(6): 291—296.
- [5] WANG Ming\_liang. Solitary wave solutions of variant Boussinesq equations[J]. Physics Letters A, 1995, **199**(3): 169—172.
- [6] Andronov A, Leontovich E A, Gordon I I, et al. Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane[M]. New York: Wiley, 1973.
- [7] Chow S N, Hale J K. Method of Bifurcation Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1981.
- [8] Debnath L. Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers [M]. Boston: Birkhauser, 1997.
- [9] Guckenheimer J, Holmes P J. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields [M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

## Bifurcations of Travelling Wave Solutions in Variant Boussinesq Equations

YUAN Yu\_bo<sup>1</sup>, PU Dong\_mei<sup>1,2</sup>, LI Shu\_min<sup>2</sup>

(1. School of Applied Mathematics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, P. R. China;

2. School of Science, University of Science and Technology of Kunming, Kunming 650093, P. R. China

**Abstract:** The bifurcations of solitary waves and kink waves for variant Boussinesq equations were studied by using the bifurcation theory of planar dynamical systems. The bifurcation sets and the numbers of solitary waves and kink waves for the variant Boussinesq equations are presented. Several types explicit formulas of solitary wave solutions and kink wave solutions are obtained. In the end, several formulas of periodic wave solutions are presented.

**Key words:** Hamiltonian system; Boussinesq equation; bifurcation; solitary wave solution; kink wave solutions