

模糊随机桁架结构的动力特性 双因子分析法*

马 娟, 陈建军, 徐亚兰, 江 涛

(西安电子科技大学 机电工程学院, 西安 710071)

(岳珠峰推荐)

摘要: 针对模糊随机桁架结构的动力特性分析, 提出了一种新的模糊随机有限元方法。当结构的物理参数和几何尺寸同时具有模糊随机性时, 利用模糊因子法和随机因子法建立了结构刚度矩阵和质量矩阵; 从结构振动的 Rayleigh 商表达式出发, 利用区间运算推导出结构动力特性模糊随机变量的计算表达式; 之后利用随机变量的矩法和代数综合法, 推导出结构特征值的数字特征的计算式。通过算例分析了模糊随机桁架结构参数的模糊随机性对其动力特性的影响。该方法的优点是能准确反映结构某一参数的模糊随机性对结构特征值及其数字特征的影响。

关键词: 模糊随机桁架; 模糊因子法; 随机因子法; 动力特性模糊随机变量

中图分类号: O327; TU318 文献标识码: A

引 言

随机变量概念^[1]的产生和模糊变量概念^[2~5]的提出分别对概率论和模糊数学的发展产生了深远的影响。但无论是随机变量或是模糊变量, 都还只是对某一种不确定性因素的数学描述, 当人们想要对客观世界中大量存在的既具有随机性又具有模糊性的事件建立合理的数学模型时, 模糊随机变量^[6]概念的产生就已成为模糊随机数学理论发展的必然。

相应的, 在工程结构分析中往往有许多参数, 如材料的弹性模量、质量密度和 Poisson 比、结构的几何尺寸和边界条件以及外载荷等可能具有随机性或模糊性, 甚至具有模糊随机性。随机有限元法处理随机性; 模糊有限元法处理模糊性; 当要同时处理模糊性和随机性时则需要使用模糊随机有限元方法。文献[7]在模糊随机振动理论及其在地震工程中的应用方面做出了开拓性的工作, 提出了抗震结构模糊随机振动的研究课题。文献[8]~[10]先后阐述了模糊随机变量的分类及其各自的模糊数学期望和模糊方差的定义, 并应用摄动法求解了一类模糊随机结构的静力学问题^[9]。

本文针对桁架结构材料特性、几何特性中的某些模糊随机参数的取值具有模糊性而概率为清晰值, 即属于第一类模糊随机变量参数^[9]时, 对其结构动力特性的求解方法进行了研究。提出了一种基于双因子的模糊随机有限元方法, 即利用随机因子法^[11, 12]和模糊因子法^[13], 将

* 收稿日期: 2004_07_11; 修订日期: 2006_01_03

基金项目: 陕西省自然科学基金资助项目(A200214)

作者简介: 马娟(1972—), 女, 回族, 呼和浩特人, 博士研究生;

陈建军(联系人, Tel: + 86_29_88204489; E_mail: jjchen@xidian.edu.cn)。

任一模糊随机变量表示为其模糊因子、随机因子及其模糊主值的乘积,进而构建了模糊随机结构动力特性分析的有限元模型。再由区间运算^[14]推导出结构动力特性模糊随机变量的模糊取值的上、下限,然后用随机变量的矩法和代数综合法,进一步推导出结构动力特性模糊随机变量的模糊数字特征表达式。最后通过两个算例检查了结构参数的模糊随机性对结构动力特性的模糊随机性的影响,并获得了一些重要结论。

1 模糊随机参数、模糊因子法和随机因子法的数学描述

1.1 模糊随机变量及其模糊概率特征

模糊随机变量有多种定义,由 Kwakernaak 引入的模糊随机变量的定义^[9]为:

设 (Ω, A, P) 是概率测度空间,模糊集值映射: $X: \Omega \rightarrow F_0(R) = \{A \mid A \text{ 是有界闭模糊数}\}$ 称为(K)模糊随机变量。如果

1) 对 $\forall \lambda \in (0, 1]$, $X_\lambda(\omega)$, $X_\lambda(\omega)$ 为 (Ω, A, P) 上的随机变量;

2) 对 $\forall \lambda \in (0, 1]$, $X_\lambda(\omega)$, $X_\lambda(\omega) \in X_\lambda(\omega)$;

其中 $X_\lambda(\omega) = \inf X_\lambda(\omega) = \inf\{x \in R \mid X(\omega)(x) \geq \lambda\}$, $X_\lambda(\omega) = \sup X_\lambda(\omega) = \sup\{x \in R \mid X(\omega)(x) \geq \lambda\}$, $X_\lambda(\omega)$ 是 $X(\omega)$ 的 λ 水平截集; $X(\omega)(x)$ 是 $X(\omega)$ 的隶属函数。

由上述定义可知,若 X 是(K)模糊随机变量,则对 $\forall \lambda \in (0, 1]$, $X_\lambda(\omega) = [X_\lambda(\omega), X_\lambda(\omega)]$ 不仅是一个闭区间数,而且是一个随机区间。与普通随机变量的数字特征相对应,模糊随机变量也可用其数字特征来描述。其数字特征仍为有界闭模糊数。

1.2 随机因子法

随机因子法^[11]的基本思想是将随机变量分解成一个随机因子与一个确定性的量的乘积,该随机变量的随机性由其随机因子来体现。随机因子的均值为 1.0,它的变异系数等于该随机变量的变异系数。

1.3 模糊因子法

模糊因子法^[13]的基本思想如下所述。对模糊变量的描述可采用 L_R 型模糊数^[15]的表示方法。假设 M 为一 L_R 型模糊数: $M = (M_m, \alpha, \beta)_{LR}$, 其中 M_m 为 M 的主值,其值与不考虑 M 的模糊性时的值相同; α 和 β 分别为 M 的左右展形, α 和 β 越大则 M 越模糊。取足够小的隶属度 λ 对 M 的隶属度函数做 λ 水平截集,得到 M 取值的上、下界 M_R 和 M_L , 它们与主值 M_m 之差表示了变量取值的模糊分散性,则 M 可表示为模糊数 $M = (M_m, M_L, M_R)$ 。现引入模糊数 $y = M/M_m$ 作为 M 的模糊因子, y 的主值为 1.0, 其模糊取值范围为 $[y_L = M_L/M_m, y_R = M_R/M_m]$, 该取值范围的大小同样表示了变量取值的模糊分散程度。如此以来即可用模糊因子法将一个模糊变量表示为: $M = yM_m$ 。

任一可表示为 L_R 型模糊数的模糊变量均可表示为其模糊主值与其模糊因子的乘积。

1.4 模糊随机变量的双因子表示

若结构的某一参数 Y 具有模糊随机性,它的取值为模糊数,相应的概率为清晰数,则基于模糊因子法和随机因子法的思想和模糊随机变量的定义, Y 可被表示为: $Y = y^* \cdot y$, 其中 y^* 是随机因子,表示了模糊随机变量的随机性; y 是一个 L_R 型模糊数,反映了 Y 的模糊性;进一步将模糊数 y 按照模糊因子法表示为模糊因子 y 与其模糊主值 y_m 之积,则 Y 最终可表为

$$Y = y^* \cdot y = y^* \cdot y^* \cdot y_m \quad (1)$$

2 模糊随机桁架结构质量矩阵和刚度矩阵的建立

现对模糊随机桁架结构进行有限元分析。考虑结构参数同时具有模糊随机性,即:弹性模

量 E 、质量密度 ρ 、杆系截面积 A 、杆系长度 L 均为模糊随机变量。设结构中共有 n_e 个杆件且采用同种材料, 则各杆件的弹性模量 E_e 均相等, 各杆的密度 ρ_e 均相同。令 $E_e = E \cdot E^* \cdot E_m$, 其中 E_m 为弹性模量 E_e 的模糊主值; E 为 E_e 的模糊因子, 其主值为 1.0, 取值范围为 $[E_L = E_L/E_m, E_R = E_R/E_m]$, E_L 和 E_R 是按照模糊因子法求得的 E_e 模糊取值的下界和上界; E^* 为 E_e 的随机因子, 其均值为 1.0。同理, 令 $\rho = \rho \cdot \rho^* \cdot \rho_m$, 其中 ρ_m 为杆质量密度 ρ_e 的模糊主值, ρ 和 ρ^* 分别为其模糊因子和随机因子, ρ^* 的均值为 1.0; ρ 主值为 1.0, 取值范围为 $[\rho_L = \rho_L/\rho_m, \rho_R = \rho_R/\rho_m]$, ρ_R 和 ρ_L 是 ρ_e 的模糊取值的上、下界。

假设各杆件长度 l_e 取值的模糊随机分散程度均相等, 则可令: $l_e = l \cdot l^* \cdot l_{em}$, 其中 l_{em} 为第 e 根杆长的模糊主值。由于各杆长度主值不尽相同, 因此模糊取值的分散性虽然相同, 但各杆的模糊因子 l 不相同。取最短杆的模糊因子作为长度模糊因子, 既包括了其余长度模糊因子的取值范围又尽可能完整的考虑所有杆的模糊性。设 l 为最短杆长度的模糊因子, 其主值为 1.0, 取值范围为 $[l_L = l_L/l_m, l_R = l_R/l_m]$, l_m 、 l_R 和 l_L 分别是最短杆长度的模糊主值和上、下界; l^* 是杆长的随机因子, 其均值为 1.0。同理, 设各杆横截面积 A_e 取值的模糊分散程度均相等, 则 $A_e = A \cdot A^* \cdot A_{em}$, 其中 A_{em} 为第 e 根杆的横截面积; A^* 为其随机因子, 均值为 1.0; A 为最小杆截面积的模糊因子, 其主值为 1.0, 取值范围为 $[A_L = A_L/A_m, A_R = A_R/A_m]$, A_m 、 A_R 和 A_L 是最小杆件截面积的模糊主值和上、下界。

对多杆件桁架结构而言, 所有杆长和杆截面积均为模糊随机变量, 利用有限单元法, 结构中任意单元 e 在局部坐标系下的刚度矩阵为

$$K^{(e)} = \begin{pmatrix} E_e & A_e \\ E_e & l_e \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ lA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^* & A^* \\ l^* \end{pmatrix} \frac{E_m A_{em}}{l_{em}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \frac{E^* A^*}{l^*} K^{(e)\#}, \quad (2)$$

其中 $K^{(e)\#}$ 为 $K^{(e)}$ 中的确定量部分, 即为当 $E = E_m$, $A = A_{em}$ 和 $l = l_{em}$ 时的 e 单元的刚度矩阵。

进而可得在总体坐标系下 e 单元的刚度矩阵 $K^{(\wedge e)}$ 和结构的总体刚度矩阵 K 分别为:

$$K^{(\wedge e)} = \begin{pmatrix} EA \\ l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^* & A^* \\ l^* \end{pmatrix} T^{(e)T} K^{(e)\#} T^{(e)} = \begin{pmatrix} E \\ lA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^* & A^* \\ l^* \end{pmatrix} K^{(\wedge e)\#}, \quad (3)$$

$$K = \sum_{e=1}^{n_e} K^{(\wedge e)} = \begin{pmatrix} E \\ lA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^* & A^* \\ l^* \end{pmatrix} \sum_{e=1}^{n_e} K^{(e)\#} = \begin{pmatrix} E \\ lA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^* & A^* \\ l^* \end{pmatrix} K^{\#}, \quad (4)$$

其中 $T^{(e)}$ 为 e 单元的坐标转换矩阵, $T^{(e)T}$ 为其转置矩阵; $K^{(\wedge e)\#}$ 和 $K^{\#}$ 均为常量矩阵, 它们分别为 $E = E_m$, $A = A_{em}$ 和 $l = l_{em}$ 时总体坐标下 e 单元的刚度矩阵和结构的总体刚度矩阵。

同理, 利用模糊因子法和随机因子法, 可得单元 e 的质量矩阵为 $M^{(e)}$:

$$M^{(e)} = \frac{1}{2} (A_e l_e \rho_e) I = \frac{1}{2} (Al\rho) (A^* l^* \rho^*) A_{em} l_{em} \rho_m = (Al\rho) (A^* l^* \rho^*) M^{(e)\#}, \quad (5)$$

其中 $M^{(e)\#}$ 为 e 单元质量矩阵 $M^{(e)}$ 的确定部分, 即为 $\rho = \rho_m$, $A = A_{em}$ 和 $l = l_{em}$ 时 e 单元的质量矩阵。

对结构中 n_e 个单元的质量矩阵组集, 得结构的总体质量矩阵 M 为:

$$M = \sum_{e=1}^{n_e} \left\{ \frac{1}{2} (A_e l_e \rho_e) I \right\} = (Al\rho) (A^* l^* \rho^*) M^{\#}, \quad (6)$$

其中 $M^\#$ 为 $E = E_m, A = A_{em}$ 和 $l = l_{em}$ 时结构的总体质量矩阵。

3 模糊随机桁架结构的动力特性分析

利用 Rayleigh(瑞利)商,结构的各阶固有频率可表示为:

$$\omega_i^2 = \frac{\phi_i^T \cdot K \cdot \phi_i}{\phi_i^T \cdot M \cdot \phi_i} \quad (7)$$

式中: ω_i 为结构的第 i 阶固有频率; ϕ_i 为与 ω_i 相对应的结构的第 i 阶固有振型,亦为模糊随机量, ϕ_i^T 是其转置; K 与 M 分别为结构的总体刚度矩阵和总体质量矩阵。

将式(4)和(6)代入式(7),可得:

$$\omega_i^2 = \frac{(EA)(E^* A^*)}{(\Omega l^2)(\rho^* A^* l^{*2})} \frac{\phi_i^T \cdot K^\# \cdot \phi_i}{\phi_i^T \cdot M^\# \cdot \phi_i} = \left[\frac{E}{\Omega^2} \right] \left[\frac{E^*}{\rho^* l^{*2}} \right] \frac{K_i^\#}{M_i^\#} = \left[\frac{E}{\Omega^2} \right] \left[\frac{E^*}{\rho^* l^{*2}} \right] (\omega_i^\#)^2, \quad (8)$$

式中,因 ϕ_i 具有模糊随机性, $K_i^\# = \phi_i^T \cdot K^\# \cdot \phi_i$ 是当 K 中各模糊因子 E, A 和 l 取其主值 1.0 且各随机因子 E^*, A^* 和 l^* 均取其均值 1.0 时结构的第 i 阶主刚度模糊随机变量; $M_i^\# = \phi_i^T \cdot M^\# \cdot \phi_i$ 是当 M 中各模糊因子 ρ, A 和 l 均取其模糊主值 1.0 且各随机因子 E^*, A^* 和 l^* 均取其均值 1.0 时结构的第 i 阶主质量模糊随机变量。由于其模糊随机性完全相关,故两者之比即 $K_i^\# / M_i^\# = (\omega_i^\#)^2$ 为确定性量,即为结构第 i 阶固有频率平方取值的模糊主值。

因分子、分母上的同一模糊因子 A 和随机因子 A^* 可以约去,式(8)又可表示为:

$$\omega_i^2 = \omega \cdot \omega^* \cdot \omega_i^{\#2}, \quad (9)$$

其中 ω 为 ω_i^2 的模糊因子,其取值范围将决定 ω_i^2 的模糊取值分散性的大小; $\omega^* = E^* / (\rho^* l^{*2})$ 为 ω_i^2 的随机因子,由随机变量的矩法知其均值仍为 1.0。

当 l, E, A, ρ 均取其各自主值 1.0 时,即得结构特征值模糊因子 ω 之主值。显然, ω 主值亦为 1.0,但其取值范围却需重新计算。由于 $l \in [l_L, l_R], E \in [E_L, E_R], \rho \in [\rho_L, \rho_R], l_L = l_L / l_m, l_R = l_R / l_m, E_L = E_L / E_m, E_R = E_R / E_m, \rho_L = \rho_L / \rho_m, \rho_R = \rho_R / \rho_m$, 按照区间运算规则^[14]中的乘、除法运算可知: $\omega_L = E_L / (\rho_R l_R^2), \omega_R = E_R / (\rho_L l_L^2)$, 其中 ω_R 和 ω_L 分别为结构固有频率平方的模糊因子 ω 模糊范围的上、下限。进一步,由区间的开方运算^[14]可得:

$$\omega = \sqrt{\omega \omega^* \omega_i^{\#2}} = \omega^\wedge (\omega^* \omega_i^{\#2})^{1/2}, \quad (10)$$

其中 ω^\wedge 为第 i 阶固有频率 ω_i 的模糊因子,其取值范围为 $[\sqrt{\omega_L}, \sqrt{\omega_R}]$; $\omega_i^\#$ 是 ω_i 的模糊主值; 当随机因子 ω^* 取其均值 1.0 时,得 ω_i 的模糊取值范围为 $[\sqrt{\omega_L} \cdot \omega_i^\#, \sqrt{\omega_R} \cdot \omega_i^\#]$, 即将 ω^\wedge 的模糊性还原回 ω_i 。又 ω_i^2 具有模糊随机性,可知结构第 i 阶固有频率模糊随机变量 ω_i 的均值 μ_{ω_i} 和均方差 σ_{ω_i} 均为闭区间模糊数。利用求解随机变量数字特征的矩法^[11],可求得 μ_{ω_i} 和 σ_{ω_i} 的计算表达式分别为:

$$\mu_{\omega_i} = \omega^\wedge (\omega_i^\#) \left(\frac{\mu_E}{\mu_\rho \mu_l} \right)^{1/2} \left\{ [1 + \nu_Z^2 + \nu_\rho^2 + \nu_Z^2 \nu_\rho^2 - C_{E\rho} \nu_E (\nu_Z^2 + \nu_\rho^2 + \nu_Z^2 \nu_\rho^2)^{1/2}]^2 - \frac{1}{2} [\nu_E^2 + \nu_Z^2 + \nu_\rho^2 + \nu_Z^2 \nu_\rho^2 - 2C_{E\rho} \nu_E (\nu_Z^2 + \nu_\rho^2 + \nu_Z^2 \nu_\rho^2)^{1/2}] \right\}^{1/4}, \quad (11)$$

$$\sigma_{\omega_i} = \omega^\wedge (\omega_i^\#) \left(\frac{\mu_E}{\mu_\rho \mu_l} \right)^{1/2} \left\{ [1 + \nu_Z^2 + \nu_\rho^2 + \nu_Z^2 \nu_\rho^2 - C_{E\rho} \nu_E (\nu_Z^2 + \nu_\rho^2 + \nu_Z^2 \nu_\rho^2)^{1/2}] - \right.$$

$$\left\{ [1 + \nu_Z^2 + \nu_{\rho}^2 + \nu_Z^2 \nu_{\rho}^2 - C_{EP} \nu_E (\nu_Z^2 + \nu_{\rho}^2 + \nu_Z^2 \nu_{\rho}^2)^{1/2}]^2 - \frac{1}{2} [\nu_E^2 + \nu_Z^2 + \nu_{\rho}^2 + \nu_Z^2 \nu_{\rho}^2 - 2C_{EP} \nu_E (\nu_Z^2 + \nu_{\rho}^2 + \nu_Z^2 \nu_{\rho}^2)^{1/2}]^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (12)$$

$$\nu_Z = \nu^2 = \frac{\sqrt{4\nu_i^2 + 2\nu_i^4}}{1 + \nu_i^2}, \quad (13)$$

式中, ω^{\wedge} 分别取其主值 1.0、上限 $\sqrt{\omega_R}$ 和下限 $\sqrt{\omega_L}$ 时, 即分别得到了均值 μ_{ω_i} 和均方差 σ_{ω_i} 的模糊取值的主值、上限和下限; C_{EP} 为变量 E 与 ρ 的相关系数; 符号 ν 表示随机变量的变异系数。

由式 (11) 和式 (12) 可以求得结构第 i 阶固有频率 ω_i 的变异系数 ν_{ω_i} 为

$$\nu_{\omega_i} = \sigma_{\omega_i} / \mu_{\omega_i}. \quad (14)$$

4 算 例

例 1 平面 28 杆模糊随机桁架结构

算例单元划分如图 1 所示, 其材料为钢, 弹性模量 E 、质量密度 ρ 、杆截面积 A 、杆长 l 均为模糊随机变量, 其参数的模糊取值均为对称正态模糊数 $M = (M_m, \alpha, \beta)_{LR}$: $E = (7.0 \times 10^{10} \text{ Pa}, 0.02 \times 10^{10} \text{ Pa}, 0.02 \times 10^{10} \text{ Pa})_{LR}$, $\rho = (7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, 0.02 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, 0.02 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)_{LR}$, $A = (3.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2, 0.02 \times 10^{-4} \text{ m}^2, 0.02 \times 10^{-4} \text{ m}^2)_{LR}$; 各杆长度最可能的取值如图 1 所示: $\{L\} = (\{l\}, 0.02\{l\}, 0.02\{l\})_{LR}$, 且各杆长和截面积的模糊随机不确定性分别相同。取隶属度 $\lambda = 1.365 \times 10^{-11}$ 作水平截集后, 各结构参数的模糊取值可被转化为模糊数 $M = (M_m, M_L, M_R)$: $E = (7.0 \times 10^{10} \text{ Pa}, 6.9 \times 10^{10} \text{ Pa}, 7.1 \times 10^{10} \text{ Pa})$, $\rho = (7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, 7.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, 7.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)$, $A = (3.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2, 2.9 \times 10^{-4} \text{ m}^2, 3.1 \times 10^{-4} \text{ m}^2)$, $\{L\} = (\{l\}, 0.9\{l\}, 1.1\{l\})$ 。所有模糊随机参数的概率分布均为正态分布。

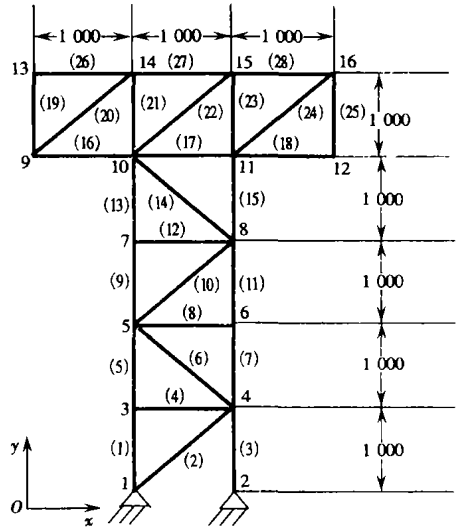


图 1 平面 28 杆桁架结构(单位: mm)

按照上述推导可计算出各结构参数模糊随机变量的模糊因子 l 、 E 和 ρ , 结构固有频率模糊因子 ω^{\wedge} 以及结构前两阶模糊固有频率, 见表 1。

表 1 各模糊随机变量的模糊因子取值

| 取值 | 结构参数模糊因子 | | | 结构固有频率模糊因子 | 模糊固有频率 | |
|------|----------|-------|--------|-------------------|------------|------------|
| | l | E | ρ | ω^{\wedge} | ω_1 | ω_2 |
| 主值 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12.81 | 51.10 |
| 取值下界 | 0.99 | 0.986 | 0.987 | 0.977 | 12.52 | 49.92 |
| 取值上界 | 1.01 | 1.014 | 1.013 | 1.024 | 13.12 | 52.33 |

为考察结构参数模糊随机变量的模糊随机不确定性对结构固有频率的模糊随机不确定性的影响, 采用了确定性模型和模糊随机模型 I ~ VII 其中分别计算了物理参数为模糊随机变

量、几何尺寸为模糊随机变量和两类参数同时为模糊随机变量的几种不同情况下, 结构前 2 阶固有频率数字特征的模糊取值范围。各模型对应的计算结果均以 $M = (M_m, M_L, M_R)$ 的形式给出, 其中 M_m 为 M 的主值, M_R 和 M_L 分别是变量 M 的上、下界, 见表 2。

表 2 平面 28 杆模糊随机桁架结构动力特性分析结果 ω/Hz

| 固有频率 | 模 型 | | |
|------------|---|---|---|
| | 确定性模型 | 模糊随机模型 I | 模糊随机模型 II |
| | | $\nu_E = \nu_\rho = 0.1, E = \rho = [0.95, 1.05]$ | $\nu_A = \nu_l = 0.1, A = l = [0.95, 1.05]$ |
| ω_1 | $\mu_{\omega_1} = 12.81$ | $\mu_{\omega_1} = (12.82, 12.21, 13.98)$ $\sigma_{\omega_1} = (0.283, 0.270, 0.297)$ | $\mu_{\omega_1} = (12.99, 12.55, 13.88)$ $\sigma_{\omega_1} = (1.250, 1.190, 1.316)$ |
| ω_2 | $\mu_{\omega_2} = 51.10$ | $\mu_{\omega_2} = (51.13, 48.70, 53.82)$ $\sigma_{\omega_2} = (1.133, 1.077, 1.191)$ | $\mu_{\omega_2} = (51.82, 50.09, 55.36)$ $\sigma_{\omega_2} = (4.986, 4.747, 5.250)$ |
| 固有频率 | 模 型 | | |
| | 模糊随机模型 III | 模糊随机模型 IV | 模糊随机模型 V |
| | $\nu_E = \nu_\rho = 0.01, E = \rho = [0.95, 1.05]$ | $\nu_A = \nu_l = 0.01, A = l = [0.95, 1.05]$ | $\nu_E = \nu_\rho = 0.1, E = \rho = [0.995, 1.005]$ |
| ω_1 | $\mu_{\omega_1} = (12.81, 12.20, 13.48)$ $\sigma_{\omega_1} = (0.058, 0.055, 0.061)$ | $\mu_{\omega_1} = (12.81, 12.38, 13.69)$ $\sigma_{\omega_1} = (0.128, 0.122, 0.135)$ | $\mu_{\omega_1} = (12.82, 12.77, 12.90)$ $\sigma_{\omega_1} = (0.284, 0.283, 0.286)$ |
| ω_2 | $\mu_{\omega_2} = (51.10, 48.67, 53.79)$ $\sigma_{\omega_2} = (0.230, 0.219, 0.242)$ | $\mu_{\omega_2} = (51.10, 49.40, 54.60)$ $\sigma_{\omega_2} = (0.511, 0.486, 0.538)$ | $\mu_{\omega_2} = (51.13, 50.94, 51.45)$ $\sigma_{\omega_2} = (1.133, 1.129, 1.140)$ |
| 固有频率 | 模 型 | | |
| | 模糊随机模型 VI | 模糊随机模型 VII | |
| | $\nu_A = \nu_l = 0.1, A = l = [0.995, 1.005]$ | $\nu_A = \nu_l = \nu_E = \nu_\rho = 0.1, E = \rho = A = l = [0.95, 1.05]$ | |
| ω_1 | $\mu_{\omega_1} = (14.37, 13.03, 15.91)$ $\sigma_{\omega_1} = (1.250, 1.244, 1.258)$ | $\mu_{\omega_1} = (14.33, 13.01, 15.87)$ $\sigma_{\omega_1} = (1.367, 1.239, 1.514)$ | |
| ω_2 | $\mu_{\omega_2} = (57.3, 51.95, 63.45)$ $\sigma_{\omega_2} = (4.986, 4.961, 5.016)$ | $\mu_{\omega_2} = (57.25, 51.78, 63.42)$ $\sigma_{\omega_2} = (5.462, 4.954, 6.047)$ | |

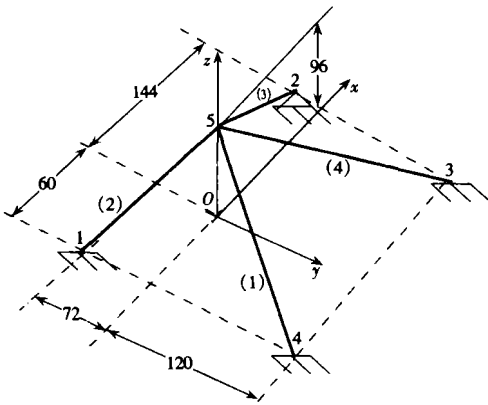


图 2 4 杆空间桁架(单位: in; 1 in= 25.4 mm)

从表 2 中的结果可以看出:

1) 在模型 I、II 中, 当物理参数和几何尺寸分别为模糊随机变量, 且它们的模糊随机不确定性相同(即各参数模糊因子的取值范围和变异系数的取值分别相等)的情况下, 几何尺寸对固有频率的模糊随机不确定性的影响更为显著(即模型 II 中各阶固有频率均方差的主值, 均大于模型 I 中相对应的各阶固有频率均方差的主值, 且模型 II 中各阶固有频率均值和均方差的模糊取值范围, 均大于模型 I 中相对应的各阶固有频率均值和均方差的模糊取值范围)。由此获得几何尺寸的模糊随机性在结构动力特性分析中不容忽视的结论。

2) 在仅考虑物理参数为模糊随机变量的 3 种模型 I、II 和 V 中, 当其模糊不确定性减小 (V) 或其随机性变小时 (II), 与模型 I 的结果相比后可知, 物理参数随机性 (即变异系数) 的减小, 对固有频率随机性 (即均方差的主值) 的影响较大, 而固有频率的模糊不确定程度 (其均值和均方差的模糊取值范围), 则始终由物理参数的模糊不确定性 (即模糊因子的取值范围) 决定。

3) 在仅考虑几何参数为模糊随机变量的 3 种模型 II、IV 和 VI 中, 当几何参数的模糊不确定性降低 (VI) 或其随机分散程度减小 (IV) 时, 与模型 II 的结果相比后可得, 几何参数随机分散程度 (即其变异系数) 的减小, 对固有频率随机性的影响较为显著, 而固有频率的模糊不确定性, 则仅由几何参数的模糊不确定性 (即模糊因子的取值范围) 决定。与模型 I、II 相比, 同时考虑结构参数的模糊随机性对动力特性的模糊随机性的影响更大 (模型 VII)。

例 2 空间四杆模糊随机桁架结构

图 2 中四杆空间结构的物理参数和几何尺寸仍为模糊随机变量, 各模糊随机变量的模糊取值及概率分布同例 1。为了考察物理参数和几何尺寸的模糊随机不确定性对动力特性的影响, 计算中分别采用了确定性模型和两种模糊随机模型 VIII、IX。

表 3 空间四杆模糊随机桁架结构动力特性分析结果 ω/Hz

| | | 模 型 | |
|------------|---------------------------|---|---|
| 固有频率 | 确定性模型 | 模糊随机模型 VIII | 模糊随机模型 IX |
| | | $V_l = V_E = V_\rho = 0.1;$ $E = \rho = l = [0.95, 1.05]$ | $V_l = V_E = V_\rho = 0.01;$ $E = \rho = l = [0.995, 1.005]$ |
| ω_1 | $\mu_{\omega_1} = 147.88$ | $\mu_{\omega_1} = (147.88, 134.13, 163.77)$ $\sigma_{\omega_1} = (12.95, 11.75, 14.34)$ $\mu_{\omega_2} = (156.13, 141.61, 172.84)$ | $\mu_{\omega_1} = (147.88, 146.40, 149.39)$ $\sigma_{\omega_1} = (1.431, 1.417, 1.445)$ $\mu_{\omega_2} = (156.13, 154.57, 157.69)$ |
| ω_2 | $\mu_{\omega_2} = 156.13$ | $\sigma_{\omega_2} = (14.89, 13.51, 16.48)$ | $\sigma_{\omega_2} = (1.515, 1.500, 1.530)$ |

通过模型 VIII、IX 的结果比较可见, 当物理参数和几何尺寸的模糊随机不确定程度同时减小时, 固有频率的模糊随机不确定程度亦显著减小。

5 结 论

1) 文中构建了结构参数同时具有模糊随机性的桁架结构的动力特性分析有限元模型, 此种模型具有一般性。常规的确定性模型 (各模糊随机变量的模糊因子恒取其主值 1.0 且各随机因子恒取其均值 1.0)、模糊性模型 (各模糊随机变量的随机因子恒取其均值 1.0) 和随机性模型 (各模糊随机变量的模糊因子恒为主值 1.0), 均属于这一模型中的特例。

2) 文中将模糊随机变量表为模糊主值和双因子的乘积, 与通常利用摄动法处理带有模糊随机参数的结构分析的方法相比, 其特点在于可以充分客观地显示结构某一参数的模糊随机性对结构固有频率模糊随机性的影响, 且可以直接推广应用到动力响应分析的问题上, 其计算过程清晰且简便易行。算例表明: 文中提出的方法是可行有效的。

[参 考 文 献]

[1] ZHAO Lei, CHEN Qiu. Neumann dynamic stochastic finite element method of vibration for structures with stochastic parameters to random excitation[J]. Computers & Structures, 2000, 77(6): 651—657.
 [2] 郭书祥, 吕震宙. 结构的失效可能度及模糊概率计算方法[J]. 应用数学和力学, 2003, 24(3): 300—304.

- [3] 王光远. 论不确定性结构力学的进展[J]. 力学进展, 2002, 32(2): 205—211.
- [4] 郭书祥, 吕震宙. 基于可能性理论的结构模糊可靠性方法[J]. 计算力学学报, 2002, 19(1): 189—193.
- [5] Rao S S, Cao L. Fuzzy boundary element method for the analysis of imprecisely defined system[J]. AIAA J, 2001, 39(9): 1788—1797.
- [6] 吕震宙, 岳珠峰, 冯蕴雯. 韧脆转变的一种细观随机模糊统计分析[J]. 应用数学和力学, 2003, 24(10): 1027—1034.
- [7] 王光远, 欧进萍. 在地震作用下结构的模糊随机振动[J]. 力学学报, 1988, 20(2): 173—180.
- [8] 吕恩琳, 钟佑明. 模糊密度随机变量的数学描述[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(8): 861—869.
- [9] 吕恩琳. 模糊随机有限元平衡方程的摄动解法[J]. 应用数学和力学, 1997, 18(7): 631—638.
- [10] 吕恩琳, 钟佑明. 模糊概率随机变量[J]. 应用数学和力学, 2003, 24(4): 434—440.
- [11] CHEN Jian_jun, CHE Jian_wen, SUN Huai_an, et al. Probabilistic Dynamic analysis of truss structures [J]. Structural Engineering and Mechanics, 2002, 13(2): 231—239.
- [12] GAO Wei, CHEN Jian_jun. Optimal placement of active bars in active vibration control for piezoelectric intelligent truss structures with random parameters [J]. Computers & Structures, 2003, 81(1): 53—60.
- [13] 马娟, 陈建军, 黄平, 等. 模糊桁架结构在模糊激励下的动力响应分析[J]. 力学学报, 2005, 37(3): 378—384.
- [14] Alefeld G, Claudio D. The basic properties of interval arithmetic, its software realizations and some applications[J]. Computers & Structures, 1998, 67(1/3): 3—8.
- [15] Dubois D, Prade H. Fuzzy Sets and System: Theory and Applications [M]. New York: Academic Press, 1980.

Dynamic Characteristic Analysis of Fuzzy Stochastic Truss Structures Based on Fuzzy Factor Method and Random Factor Method

MA Juan, CHEN Jian_jun, XU Ya_lan, JIANG Tao

(School of Electromechanical Engineering, Xidian University, Xi'an, 710071, P. R. China)

Abstract: A new fuzzy stochastic finite element method based on the fuzzy factor method and random factor method is given and the analysis of structural dynamic characteristic for fuzzy stochastic truss structures is presented. Considering the fuzzy randomness of the structural physical parameters and geometric dimensions simultaneously, the structural stiffness and mass matrices were constructed based on the fuzzy factor method and random factor method; from the Rayleigh's quotient of structural vibration, the structural fuzzy random dynamic characteristic was obtained by means of the interval arithmetic; the fuzzy numeric characteristics of dynamic characteristic were then derived by using the random variable's moment function method and algebra synthesis method. Two examples were used to illustrate the validity and rationality of the method given. The advantage of this method is that the effect of the fuzzy randomness of one of the structural parameter on the fuzzy randomness of the dynamic characteristic can be reflected expediently and objectively.

Key words: fuzzy stochastic truss; fuzzy factor method; random factor method; fuzzy random dynamic characteristic