

杂交元假设应力模式的变形刚度分析*

张灿辉¹, 黄黔², 冯伟³

(1. 厦门大学 土木工程系, 厦门 361005;

2. 中国国际工程咨询公司, 北京 100044;

3. 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊编委黄黔来稿)

摘要: 通过本征变形模式提出识别杂交元零能变形模式和假设应力场中零能应力模式的新方法, 同时给出了在假设应力场中增加应力模式时杂交元变形刚度的计算公式。从而从理论上阐明了在假设应力场中增加零能应力模式不仅不能抑制单元零能变形模式而且可能增加非零能变形模式的刚度, 因此不宜用来假设应力场; 同时进一步指出寄生应力模式将使单元产生虚假应变而使单元显得过刚, 因此即使它能够抑制单元零能变形模式也不宜用来假设应力场, 从而为假设应力场提供了合理的建议。数值算例说明了包含零能应力模式和寄生应力模式时单元的性能。

关键词: 杂交应力元; 单元变形刚度; 零能变形模式; 零能应力模式

中图分类号: O242.21 **文献标识码:** A

引 言

在传统有限元分析中位移元显得过刚, 1964 年卞学^[1]利用独立假设应力场方法提出杂交应力元方法很好地克服了单元过刚问题。虽然可以根据不同需要十分灵活地假设应力场, 但是不合适的假设应力场将使单元包含零能变形模式。增加高阶应力模式是抑制单元零能变形模式的有效措施之一, 但过多的应力模式又将反过来增加单元的不必要变形刚度。许多科学家先后提出各种假设应力场方法, 包括本征函数法^[2]、等函数法^[3]、分类法^[4]、优化方法^[5]等, 从不同方面寻找性能优越的假设应力场。卞学^[1]和陈大鹏^[6]、吴长春等^[7]对零能变形模式进行了研究, 黄黔等^[2]也对此作了有益的探索。但杂交元零能变形模式的形成机制和假设应力场中应力模式的性质及其对单元变形刚度的影响仍然有待于作更深入的研究。

1 独立假设应力场的杂交元

在杂交元分析中, 独立假设单元应力场为

$$\sigma = \sum_{i=1}^M \sigma_i \beta_i = P\beta, \quad (1)$$

其中, σ_i 为假设应力模式, β_i 为对应应力参数, P 为应力矩阵。同时在单元内假设位移场

* 收稿日期: 2005_05_27; 修订日期: 2006_03_30

作者简介: 张灿辉(1967—), 男, 福建惠安人, 讲师, 博士(联系人, Tel: + 86_592_2183505; Fax: + 86_592_2186421; E_mail: chzhang@xmu.edu.cn)。

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N N_i \mathbf{q}_i = \mathbf{N}\mathbf{q}, \quad (2)$$

其中, N_i 为双线性形函数, \mathbf{N} 为形函数矩阵, \mathbf{q}_i 为单元节点位移. 于是单元应变场为 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{q}$, 其中, \mathbf{D} 为微分算子矩阵, $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{N}$ 为几何矩阵. 利用 Reissner-Hellinger 广义变分原理, 可以得到单元刚度阵和单元应力场

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}\mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}\mathbf{q}, \quad (3)$$

其中, $\mathbf{H} = \int_{V^e} \mathbf{P}^T \mathbf{S} \mathbf{P} dV$, $\mathbf{G} = \int_{V^e} \mathbf{P}^T \mathbf{B} dV$, 式中 \mathbf{S} 为材料柔度矩阵, V^e 为单元区域. 等函数方法^[3]给出的假设应力模式和进一步提出的高阶应力模式^[4]

$$(\sigma_1 \dots \sigma_9) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$(\sigma_{h1} \dots \sigma_{h9}) = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 & xy & 0 & 0 & y^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 & 0 & xy & 0 & 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 & 0 & xy & 0 & 0 & y^2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

为了分析不同应力模式之间关系, 引进以下内积^[8,9]

$$\langle \sigma_i, \mathbf{S}\sigma_j \rangle = \int_{V^e} \sigma_i^T \mathbf{S}\sigma_j dV, \quad (6)$$

采用相同位移场(2)可形成与杂交元对应的位移元, 其刚度阵和应力场分别为

$$\mathbf{K}_d = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV, \quad \boldsymbol{\sigma}_d = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{q}, \quad (7)$$

式中, $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}$ 为材料刚度矩阵. 对单元进行特征分析

$$\mathbf{K}_d \boldsymbol{\varphi}_l = \lambda_l \boldsymbol{\varphi}_l \quad (l = 1, \dots, m), \quad (8)$$

其中, λ_l 为非零特征值, $\boldsymbol{\varphi}_l$ 为对应的特征向量即单元的本征变形模式^[2], n 为单元自由度, $m (= n - r)$ 为变形自由度, 而 r 为刚体自由度. 当消除刚体位移之后, 单元的任何变形都可以由这些本征变形模式线性表示.

2 杂交元本征变形模式及其变形刚度

定理 1(杂交元能量上界定理) 对杂交元及其对应位移元, 当单元以 \mathbf{q} 变形时

$$\mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \leq \mathbf{q}^T \mathbf{K}_d \mathbf{q}, \quad (9)$$

当且仅当 $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_d$ 时等式成立.

证明 利用(7)有

$$\int_{V^e} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_{V^e} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}_d dV \leq \sqrt{\int_{V^e} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} dV} \sqrt{\int_{V^e} \boldsymbol{\sigma}_d^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}_d dV}, \quad (10)$$

而由(3)和(7)可以得到

$$\int_{V^e} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad \int_{V^e} \boldsymbol{\sigma}_d^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}_d dV = \mathbf{q}^T \mathbf{K}_d \mathbf{q}, \quad \int_{V^e} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}_d dV = \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad (11)$$

把(11)代入(10)即可证得(9). 当 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\boldsymbol{\sigma}_d$ 线性无关时, 显然等式不成立; 而当 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\boldsymbol{\sigma}_d$ 线性相关即存在 $\alpha \neq 0$ 使得 $\boldsymbol{\sigma} = \alpha \boldsymbol{\sigma}_d$ 时

$$\mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = \int_{V^e} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \alpha \int_{V^e} \boldsymbol{\sigma}_d^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \alpha \mathbf{q}^T \mathbf{K}_d \mathbf{q}, \quad (12)$$

因此当且仅当 $\alpha = 1$ 即 $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_d$ 时等式成立. 根据定理 1, 由于等函数法直接采用位移元的应

力场构造假设应力场, 即 $\sigma = \sigma_d$, 所以所得到的杂交元与位移元完全等价. 这一结论也可以采用其他方法证明^[4].

如果本征变形模式 φ_u 和 φ_v 的对应特征值满足 $\lambda_u = \lambda_v = \lambda$ 容易验证

$$\delta_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_u + \varphi_v), \quad \delta_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_u - \varphi_v), \quad (13)$$

不仅满足特征方程(8)

$$\mathbf{K}\delta_u = \lambda\delta_u, \quad \mathbf{K}\delta_v = \lambda\delta_v, \quad (14)$$

而且满足本征变形模式的正交性和归一化条件

$$\delta_u^T \delta_v = 0, \quad \delta_u^T \varphi_k = 0, \quad \delta_v^T \varphi_k = 0, \quad \delta_u^T \delta_u = 1, \quad \delta_v^T \delta_v = 1 \quad (k \neq u, v). \quad (15)$$

定理 2(相同特征值的本征变形模式关系定理) 如果 φ_u 和 φ_v 的对应特征值满足 $\lambda_u = \lambda_v = \lambda$ 则式(13)的 δ_u 和 δ_v 为 $\lambda = \lambda_u = \lambda_v$ 的对应本征变形模式.

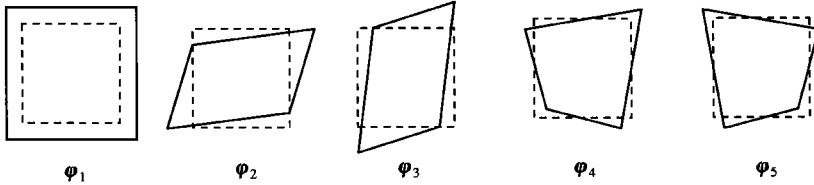


图 1 平面 4 节点单元本征变形模式

平面 4 节点单元(2D_Q4)的 5 个本征变形模式如图 1 所示, 虽然利用它们即可分析单元刚度, 但由于它们不反映单元的简单变形或基本变形, 所以结果不明显. 当材料的弹性模量为 E 而泊松比为 ν 时, 单元特征值为 $\lambda_1 = E/(1 - \nu)$, $\lambda_2 = \lambda_3 = E/(1 + \nu)$, $\lambda_4 = \lambda_5 = [E(3 - \nu)]/[6(1 + \nu^2)]$, 于是可根据定理 2 作等价处理(如图 2 所示).

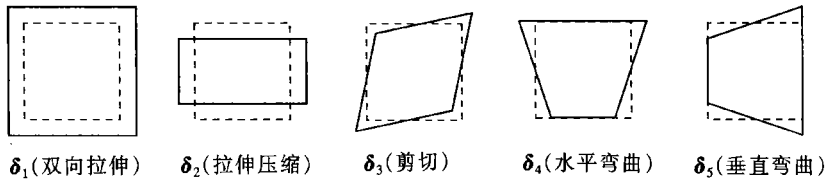


图 2 平面 4 节点单元本征变形模式(简单变形)

$$\begin{cases} \delta_1 = \varphi_1, \quad \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_2 - \varphi_3), \quad \delta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_2 + \varphi_3), \\ \delta_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_4 + \varphi_5), \quad \delta_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_4 - \varphi_5). \end{cases} \quad (16)$$

为了分析其变形特征, 可考察对应的应变模式 $\varepsilon_l = \mathbf{B}\delta_l (l = 1, \dots, m)$, 即

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad (17)$$

可见, 由于假设了双线性位移场, 所以 ε_4 和 ε_5 包含虚假的寄生剪切变形. 由于杂交元的假设位移场与对应位移元完全相同, 所以对应位移元的本征变形模式 $\delta_l (l = 1, \dots, m)$ 也可以表示该杂交元的任何变形

$$\mathbf{q} = \sum_{l=1}^m \alpha_l \delta_l, \quad (18)$$

因此,对不同假设应力场所形成杂交元,当考察了此时所有 $\delta_l (l = 1, \dots, m)$ 的特性,就可以毫不遗漏地掌握单元任何变形模式的特性。根据本文这一认识,对单元的零能变形模式和假设应力场中的零能应力模式进行了有效的分析。当单元变形时,由(18)和 $\delta_l (l = 1, \dots, m)$ 关于刚度阵的正交性,其变形能为

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \lambda, \quad (19)$$

因此,由(19)式可以利用特征值描述杂交元任何变形的刚度。令

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{M1} & \cdots & c_{MM} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_i = \int_{V^e} \sigma_i^T \mathbf{B} dV, \quad (20)$$

由于 $\mathbf{G}_i \delta_l = \int_{V^e} \sigma_i^T \mathbf{B} dV \delta_l = \int_{V^e} \sigma_i^T \boldsymbol{\varepsilon}_l dV = \int_{V^e} \sigma_i^T \mathbf{S} \sigma_{dl} dV = \langle \sigma_i, \mathbf{S} \sigma_{dl} \rangle$, 式中 $\sigma_{dl} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_l$ 为对应位移元应力场,所以当 $\langle \sigma_i, \mathbf{S} \sigma_{dl} \rangle = 0 (i = 1, \dots, M)$ 即本征变形模式 δ_l 与所有应力模式都正交时,则

$$\lambda = \delta_l^T \mathbf{K} \delta_l = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M c_{ij} (\mathbf{G}_i \delta_l) (\mathbf{G}_j \delta_l) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M c_{ij} \langle \sigma_i, \mathbf{S} \sigma_{dl} \rangle = 0 \quad (21)$$

即 δ_l 为零能变形模式。由于单元的任意变形可由本征变形模式表示,所以,(21)提供了识别单元零能变形模式的简单而有效方法。一般而言,当所有 $\delta_l (l = 1, \dots, m)$ 都为非零能变形模式时,单元将不包含任何零能变形模式。

为了避免单元零能变形模式,杂交元假设应力模式个数必须满足 $M \geq n - r$, 但是,这是一个必要条件,当假设应力场中包含零能应力模式时,单元仍然可能包含零能变形模式。为了识别和分析零能应力模式,考察假设应力场只包含单个应力模式 σ_i 的单元

$$U = \frac{1}{2} c_i \left[\sum_{l=1}^m \alpha_l^2 \langle \sigma_i, \mathbf{S} \sigma_{dl} \rangle^2 \right], \quad c_i = \left[\int_{V^e} \sigma_i^T \mathbf{S} \sigma_i dV \right]^{-1}, \quad (22)$$

若 $\langle \sigma_i, \mathbf{S} \sigma_{dl} \rangle = 0 (l = 1, \dots, m)$, 即单元的所有 $\delta_l (l = 1, \dots, m)$ 均为零能变形模式,则 $U = 0$, 从而 σ_i 为零能应力模式。换言之,零能应力模式不增加任何本征变形模式的刚度,所以,在假设应力场中增加零能应力模式并不能抑制单元的零能变形模式。若 σ_i 为非零能应力模式,则由此所独立形成杂交元将包含非零能变形模式,利用(22)可以考察其变形刚度从而考察 σ_i 对杂交元刚度的贡献。单独由 (σ_i) 或 (σ_{hi}) 构造杂交元,其本征变形模式及刚度如表 1 所示。

表 1 单独应力模式构造杂交元的刚度

(σ_i)	(σ_1)	(σ_2)	(σ_3)	(σ_4)	(σ_5)	(σ_6)	(σ_7)	(σ_8)	(σ_9)
δ_l	δ'_1	δ'_2	δ_3	\times	δ_5	δ_4	δ_4	\times	δ_5
λ_i	E	E	$E/(1+\nu)$	0	$E/3$	$E/(6(1+\nu))$	$E/3$	0	$E/(6(1+\nu))$
(σ_{hi})	(σ_{h1})	(σ_{h2})	(σ_{h3})	(σ_{h4})	(σ_{h5})	(σ_{h6})	(σ_{h7})	(σ_{h8})	(σ_{h9})
δ_l	δ'_1	δ'_2	δ_3	\times	\times	\times	δ'_1	δ'_2	δ_3
λ_i	$5E/9$	$5E/9$	$5E/(9(1+\nu))$	0	0	0	$5E/9$	$5E/9$	$5E/(9(1+\nu))$

表 1 中, $\delta'_1 = (1/\sqrt{2})(\delta_{1+} + \delta_{2-})$, $\delta'_2 = (1/\sqrt{2})(\delta_{1-} - \delta_{2+})$ 。 δ_4 和 δ_8 因为与所有本征变形模式都正交,所以为零能应力模式;而 σ_6 和 σ_9 的非零剪切应力分量与 δ_4 和 δ_5 所对应的虚假寄生剪切应变分量耦合,所以事实上表现为虚假剪切应力,将使对应的剪切变形发挥作用而产生虚假

的应变能

3 零能应力模式和寄生应力模式与杂交元变形刚度之间关系

当利用多个应力模式假设应力场时, 虽然零能应力模式与所有 $\delta_l (l = 1, \dots, m)$ 正交, 从而不单独形成任何变形模式刚度, 但是如果它们与其他应力模式耦合则仍然可能通过耦合应力模式对单元变形刚度产生影响, 通过应力模式正交化^[9]可以方便地分析这种影响. 对 $(\sigma_1 \dots \sigma_M)$, 利用正交化方法可以得到等价正交应力模式 $(\sigma_1 \dots \sigma_M)$, 于是单元应变能为

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M c_i \left(\sum_{l=1}^m \alpha_l^2 \langle \sigma_i, \mathbf{S} \sigma_{dl} \rangle^2 \right), \quad c_i = \left[\int_{V^e} \sigma_i^T \mathbf{S} \sigma_i dV \right]^{-1}, \quad (23)$$

如果在假设应力场中增加应力模式 σ_{M+1} , 即应力矩阵为 $(\sigma_1 \dots \sigma_M \sigma_{M+1})$, 进一步正交化可得 $(\sigma_1 \dots \sigma_M \sigma_{M+1})$, 于是单元应变能为 $U' = U + \Delta U_{M+1}$, 其中

$$\Delta U_{M+1} = \frac{1}{2} c_{M+1} \sum_{l=1}^m \alpha_l^2 \langle \sigma_{M+1}, \mathbf{S} \sigma_{dl} \rangle^2, \quad c_{M+1} = \left[\int_{V^e} \sigma_{M+1}^T \mathbf{S} \sigma_{M+1} dV \right]^{-1}, \quad (24)$$

表 2 应力模式引起各本征变形模式刚度的增量

应力模式 (σ_i)		δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	备注
低阶应力模式	$\Delta \lambda_i(\sigma_1)$	750	750	0	0	0	
	$\Delta \lambda_i(\sigma_2)$	1 250	450	0	0	0	
	$\Delta \lambda_i(\sigma_3)$	0	0	1 200	0	0	
	$\Delta \lambda_i(\sigma_4)$	0	0	0	0	0	零能应力模式
	$\Delta \lambda_i(\sigma_5)$	0	0	0	0	533.3	
	$\Delta \lambda_i(\sigma_6)$	0	0	0	200	0	
	$\Delta \lambda_i(\sigma_7)$	0	0	0	500	0	
	$\Delta \lambda_i(\sigma_8)$	0	0	0	33.3	0	
	$\Delta \lambda_i(\sigma_9)$	0	0	0	0	200	
$\Delta \lambda_i(\sigma_1 \dots \sigma_9)$		2 000	1 200	1 200	733.3	733.3	与对应位移元等价
高阶应力模式	$\Delta \lambda_i(\sigma_{10})$	0	0	0	0	0	零能应力模式
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	$\Delta \lambda_i(\sigma_{10})$	0	0	0	0	0	零能应力模式
$\Delta \lambda_i(\sigma_1 \dots \sigma_9 \sigma_{10} \dots \sigma_{10})$		2 000	1 200	1 200	733.3	733.3	与对应位移元等价

由于 $c_{M+1} > 0$, 所以 $\Delta U_{M+1} \geq 0$. 利用等函数法应力模式(4)进行不同组合可形成不同杂交元, 例如对应力模式组合 $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_7 \sigma_5 \sigma_8)$, 虽然 σ_8 为零能应力模式, 但是, 由于 $\langle \sigma_7, \mathbf{S} \sigma_8 \rangle \neq 0$, 因此, σ_8 将通过 σ_7 对杂交元刚度产生影响. 采用正交化方法可以得到等价的正交应力模式

$$(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_7 \sigma_5 \sigma_8) = \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 & y & 0 & \psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

显然, 经过正交化以后 σ_8 已经成为非零能应力模式, 因此, 零能应力模式在杂交元中产生了影响, 第 4 个本征变形模式的刚度为

$$\lambda_4' = \lambda_4 + \Delta \lambda_4(\sigma_8) = \frac{E}{3} + \frac{E\nu^2}{3(1-\nu^2)} = \frac{E}{3(1-\nu^2)}. \quad (26)$$

采用类似方法可以分析寄生应力模式对单元变形刚度的影响. 例如包含寄生应力模式的假设

应力模式组合 $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_7 \sigma_5 \sigma_6)$, 等价正交应力模式为

$$(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_7 \sigma_5 \sigma_6) = \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \quad (27)$$

单元第 4 个本征变形模式刚度为

$$\lambda_4' = \lambda_4 + \Delta \lambda_4(\sigma_6) = \frac{E}{3} + \frac{E}{6(1+\nu)} = \frac{E(3+2\nu)}{6(1+\nu)} \quad (28)$$

可见, 当杂交元包含寄生应力模式时, 由于与单元寄生变形耦合而使单元包含虚假应变能, 所以增加单元不必要的刚度。

二维 4 节点杂交元, 如果弹性模量和泊松比为 E 和 ν , 假设应力模式为 $(\sigma_1 \dots \sigma_9 \sigma_{h1} \dots \sigma_{h9})$, 则依次正交化可得 $(\sigma_1 \dots \sigma_9 \sigma_{h1} \dots \sigma_{h9})$ 为

$$\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 & x & y & 0 & y & 0 & f(x) & Y(x) & 0 & xy & Yy & 0 & f(y) & Y(y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & f(x) & 0 & 0 & xy & 0 & 0 & f(y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & f(x) & 0 & 0 & xy & 0 & 0 & f(y) \end{pmatrix}, \quad (29)$$

式中, $f(x) = -1/3 + x^2, f(y) = -1/3 + y^2$, 若已知 $E = 1500$ 和 $\nu = 0.25$, 则应力模式引起各本征变形模式刚度的增量如表 2 所示。可见, 当采用等函数法应力模式构造假设应力场, 由于包含所有零能应力模式和寄生应力模式, 所以得到与对应位移元完全等价的杂交元。但由于杂交元刚度以其对应位移元为上界, 所以继续增加任何应力模式包括高阶应力模式, 对杂交元刚度都没有影响。

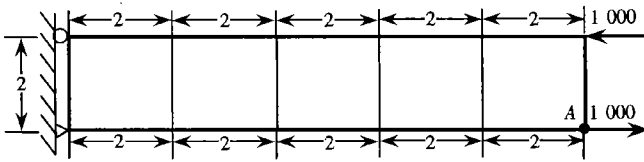


图 3 纯弯载荷下简支悬臂梁计算模型 ($E = 1500, \nu = 0.25, t = 1$)

4 数值算例

在以下 4 节点平面杂交应力有限元分析中, 分别采用 6 种不同形式的假设应力场

$$P_I = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_7 \sigma_5), \quad P_{II} = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_7 \sigma_5 \sigma_4),$$

$$P_{III} = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_7 \sigma_5 \sigma_9), \quad P_{IV} = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_7 \sigma_5 \sigma_8),$$

$$P_V = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_7 \sigma_5 \sigma_6), \quad P_{VI} = (\sigma_1 \dots \sigma_9)$$

所形成杂交应力元分别记为 $H(P_I), H(P_{II}), H(P_{III}), H(P_{IV}), H(P_V), H(P_{VI})$, 纯弯载荷下简支悬臂梁分别采用这 6 种单元进行分析, 其数值结果如表 3 所示。

表 3 纯弯载荷下简支悬臂梁数值计算结果

单元	$H(P_I)$	$H(P_{II})$	$H(P_{III})$	$H(P_{IV})$	$H(P_V)$	$H(P_{VI})$	理论解
v_A	100.013	100.013	100.013	93.762 5	71.438 1	68.190 9	100
$\Delta\%$	0.01	0.01	0.01	- 6.24	- 28.56	- 31.81	

对水平弯曲而言, δ_4 是单元的主要本征变形模式, 由表 1 可见, 单元性能将与 σ_6 和 σ_7 有关, 其中, σ_7 对应弯曲变形而 σ_6 对应虚假的寄生变形。另外, 虽然 σ_8 为零能应力模式, 但是由于 σ_8 与弯曲应力模式 σ_7 耦合从而将通过 σ_7 对单元性能产生影响。由 $H(P_I)$ 和 $H(P_{VI})$

的数值结果可见 σ_8 增加了单元刚度从而使位移减少; 由 $H(P_I)$ 和 $H(P_V)$ 的数值结果可见寄生应力模式 σ_6 由于与寄生剪切变形耦合而使单元增加了更大的刚度而使位移进一步减少。由 $H(P_I)$ 和 $H(P_{II})$ 以及 $H(P_{III})$ 的数值结果完全相同可见 σ_4 和 σ_9 对水平弯曲的求解没有影响。 $H(P_{VI})$ 不仅包含了寄生剪切而且包含了零能应力模式, 所以位移结果最小。

5 结 论

1) 提出识别单元零能变形模式和假设应力场中零能应力模式的有效方法; 给出了在假设应力场中增加不同应力模式时计算杂交元变形刚度增量的公式; 2) 从理论上阐明了在假设应力场中增加零能应力模式只能增加单元非零能变形模式的变形刚度; 同时进一步指出当采用寄生应力模式构造假设应力场时, 即使它能够抑制单元的零能变形模式, 但单元将产生虚假的变形成; 3) 位移元或由等函数法构造的杂交元之所以显得过刚, 就是因为包含了零能应力模式和寄生应力模式, 从而增加了额外和不必要的变形刚度, 因此, 不宜用来假设杂交元的应力场。

[参 考 文 献]

- [1] Pian T H H. Derivation of element stiffness matrices[J]. AIAA, 1964, 2(3): 576—577.
- [2] HUANG Qian. Modal analysis of deformable bodies with finite degree of deformation freedom_ an approach to determination of natural stress modes in hybrid finite elements[A]. In: CHIEN Wei_zang, FU Zi_zhi, Eds. Advances in Applied Mathematics & Mechanics in China [C]. Beijing: IAP (International Academic Publishers), 1991, 3: 283—303.
- [3] Han J, Hoa S V. A three_dimensional multilayer composite finite element for stress analysis of composite laminates[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1993, 36(22): 3903—3914.
- [4] FENG Wei, Hoa S V, HUANG Qian. Classification of stress modes in assumed stress fields of hybrid finite elements[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, 40(23): 4313—4339.
- [5] 吴长春, 卞学 . 非协调数值分析与杂交元方法[M]. 北京: 科学出版社, 1997, 128—174.
- [6] Pian T H H, Chen D P. On the suppression of zero energy deformation modes[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1983, 19(12): 1741—1752.
- [7] Cheung Y K, Wu C C. A study on the stability of 3_fild finite elements by theory of zero energy modes [J]. International Journal of Solids & Structures, 1992, 29(2): 215—229.
- [8] 张灿辉, 冯伟, 黄黔. 杂交元本征应力模式和应力子空间的性质研究[J]. 力学季刊, 2002, 23(1): 9—14.
- [9] 张灿辉, 冯伟, 黄黔. 杂交应力元的应力子空间和柔度矩阵 H 对角化方法[J]. 应用数学和力学, 2002, 23(11): 1124—1132.

Deformation Rigidity Analysis of Assumed Stress Modes in Hybrid Elements

ZHANG Can_hui¹, HUANG Qian², FENG Wei³

(1. Department of Civil Engineering, Xiamen University,
Xiamen 361005, P. R. China;

2. China International Engineering Consulting Corporation,
Beijing 100044, P. R. China;

3. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University,
Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract: The new methods to determine the zero_energy deformation modes in the hybrid elements and the zero_energy stress modes in their assumed stress fields are presented by the natural deformation modes of the elements. And the formula of the additional element deformation rigidity due to additional mode into the assumed stress field is derived. Based on That, it is concluded in theory that the zero_energy stress mode cannot suppress the zero_energy deformation modes but increase the extra rigidity to the nonzero_energy deformation modes of the element instead. So they should not be employed to assume the stress field. In addition, the parasitic stress modes will produce the spurious parasitic energy and result in the element behaving over rigidity. Thus, they should not be used into the assumed stress field even though they can suppress the zero_energy deformation modes of the element. The numerical examples show the performance of the elements including the zero_energy stress modes or the parasitic stress modes.

Key words: hybrid stress element; element deformation rigidity; zero_energy stress mode; zero_energy deformation mode