

# 利用 Schmidt 方法研究压电材料 I<sub>2</sub> 型 界面裂纹问题\*

周振功<sup>1</sup>, 王彪<sup>2</sup>

(1. 哈尔滨工业大学 复合材料研究所, 哈尔滨 150001;

2. 中山大学 物理与工程学院, 广州 510275)

(我刊编委王彪来稿)

**摘要:** 在一定的假设条件下, 即不考虑界面裂纹尖端处裂纹面的相互叠入现象, 研究了压电材料 I<sub>2</sub> 型界面裂纹问题。利用 Fourier 变换使问题的求解转换为求解两对对偶积分方程。进而把裂纹表面位移差展开成 Jacobi 多项式形式来求解对偶积分方程。结果表明裂纹尖端应力场和电位移场的奇异性与均匀材料裂纹问题的奇异性相同。当上下半平面材料相同时, 解可以退化而得到其精确解。

**关键词:** 界面裂纹; 应力强度因子; 压电材料

**中图分类号:** O346.53 **文献标识码:** A

## 引 言

由于压电材料界面上的裂纹是多种器件结构强度降低的主要原因, 因而压电材料界面裂纹的研究是很重要的。许多研究者对于非压电材料界面裂纹问题进行了多年的研究工作, 尤其是文献[1]求解了 I<sub>2</sub> 型界面裂纹问题, 但发现在裂纹尖端处非常小的区域内裂纹面有相互叠入现象, 且应力场具有振荡奇异性。文献[2]又重新研究了这一问题。为了克服物理意义上不合理的裂纹尖端的应力振荡奇异性, 文献[3]提出了接触界面裂纹模型。此后, 文献[4]和文献[5]又发展了数值和解析方法。关于压电材料的界面裂纹, 文献[6]考虑了电学导通和电学绝缘裂纹表面, 研究了界面裂纹的奇异性, 尤其是发现了绝缘界面裂纹尖端一种新型的应力奇异性。文献[7]采用 Stroh 方法研究了远场混合载荷下的穿透型界面裂纹(在两个压电半无限平面之间的裂纹尖端有人为接触区假设)问题。但是, 文献[1]和文献[2], 及文献[6]、文献[7]得到的解在裂纹尖端含有振荡奇异应力场和振荡奇异电位移场, 只是对一些特定的材料组合例外。这与均匀材料中的裂纹问题有很大的差异, 在物理意义上是不合理的。因而, 与均匀材料中的裂纹问题相比, 界面裂纹的精确解较难获得, 而且没有关于界面裂纹应力强度因子足够的数据库, 长久以来这是一个有争议的问题, 到现在为止, 还认为这一问题还没有得到完全

\* 收稿日期: 2005\_01\_06; 修订日期: 2006\_03\_21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572043, 10572155); 黑龙江省杰出青年基金资助项目(JC04\_08)

作者简介: 周振功(1963—), 河南省镇平县人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人, Tel: + 86\_451\_86402396; Fax: + 86\_451\_86402386; E\_mail: zhouzhg@hit.edu.cn)。

解决。

从数学观点上看,文献[1]和文献[2]中界面裂纹问题的解是正确的,尽管解存在物理意义上的不合理性。然而,从工程观点上来看,需获得物理意义上可接受的解。本文重新分析了文献[7]已研究过的同一问题,但方法不同,即利用 Schmidt 方法<sup>[8]</sup>。同以前的研究<sup>[9]</sup>相同,在本文中也采用相同的假设:不考虑 I 型界面裂纹尖端处裂纹面的相互叠入现象,经 Fourier 变换使问题的求解转换为求解两对对偶积分方程,其中对偶积分方程的变量为裂纹表面位移差。为了问题的求解,把裂纹表面位移差展开成雅可比多项式形式。这一过程与文献[1]~文献[7]中的求解过程是不同的,文献[1]~文献[7]中对偶积分方程的未知变量是位错密度函数,这是最主要的不同点。结果显示了裂纹长度及材料性质对裂纹的应力及电位移强度因子的影响。与以前的有关界面裂纹问题的解相比,裂纹尖端应力奇异性与均匀材料中裂纹尖端应力的奇异性相同,同时当上下半平面材料相同时,可以得到其精确解。

## 1 基本方程

如图 1 所示,设沿  $x$  轴方向有一长度为  $2l$  的 I 型界面裂纹位于两不同压电材料半平面间。极化方向沿  $y$  轴的压电材料呈横观各向同性(六角对称),其本构方程如下

$$\sigma_x^{(j)}(x, y) = c_{11}^{(j)} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} + c_{13}^{(j)} \frac{\partial v^{(j)}}{\partial y} + e_{31}^{(j)} \frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial y}, \quad (1)$$

$$\sigma_y^{(j)}(x, y) = c_{13}^{(j)} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} + c_{33}^{(j)} \frac{\partial v^{(j)}}{\partial y} + e_{33}^{(j)} \frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\sigma_{xy}^{(j)}(x, y) = c_{44}^{(j)} \left( \frac{\partial u^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial x} \right) + e_{15}^{(j)} \frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial x}, \quad (3)$$

$$D_x^{(j)}(x, y) = e_{15}^{(j)} \left( \frac{\partial u^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial x} \right) - \epsilon_{11}^{(j)} \frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial x}, \quad (4)$$

$$D_y^{(j)}(x, y) = e_{31}^{(j)} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} + e_{33}^{(j)} \frac{\partial v^{(j)}}{\partial y} - \epsilon_{33}^{(j)} \frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial y}, \quad (5)$$

其中  $(\sigma_x^{(j)}, \sigma_y^{(j)}, \sigma_{xy}^{(j)})$  和  $(D_x^{(j)}, D_y^{(j)})$  分别是应力张量和电位移向量的分量,  $(u^{(j)}, v^{(j)})$  和  $\phi^{(j)}$  分别是位移向量分量及电势,  $c_{11}^{(j)}, c_{13}^{(j)}, c_{33}^{(j)}, c_{44}^{(j)}$  是常电场状态下的弹性刚度系数,  $\epsilon_{11}^{(j)}, \epsilon_{33}^{(j)}$  是常应变状态下的介电常数,  $e_{15}^{(j)}, e_{31}^{(j)}, e_{33}^{(j)}$  是压电常数,本文中变量的右上标  $j = 1, 2$  分别对应于  $y \geq 0$  和  $y \leq 0$  两个半平面。平面应变状态下的二维压电耦合问题的控制方程如下

$$c_{11}^{(j)} \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial x^2} + c_{44}^{(j)} \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial y^2} + (c_{13}^{(j)} + c_{44}^{(j)}) \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial x \partial y} + (e_{31}^{(j)} + e_{15}^{(j)}) \frac{\partial^2 \phi^{(j)}}{\partial x \partial y} = 0, \quad (6)$$

$$c_{44}^{(j)} \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial x^2} + c_{33}^{(j)} \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial y^2} + (c_{13}^{(j)} + c_{44}^{(j)}) \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial x \partial y} + e_{15}^{(j)} \frac{\partial^2 \phi^{(j)}}{\partial x^2} + e_{33}^{(j)} \frac{\partial^2 \phi^{(j)}}{\partial y^2} = 0, \quad (7)$$

$$(e_{31}^{(j)} + e_{15}^{(j)}) \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial x \partial y} + e_{15}^{(j)} \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial x^2} + e_{33}^{(j)} \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial y^2} - \epsilon_{11}^{(j)} \frac{\partial^2 \phi^{(j)}}{\partial x^2} - \epsilon_{33}^{(j)} \frac{\partial^2 \phi^{(j)}}{\partial y^2} = 0. \quad (8)$$

界面裂纹的边界条件如下

$$\sigma_{xy}^{(1)}(x, 0^+) = \sigma_{xy}^{(2)}(x, 0^-) = 0, \quad \sigma_y^{(1)}(x, 0^+) = \sigma_y^{(2)}(x, 0^-) = -\sigma_0, \quad |x| \leq l, \quad (9)$$

$$\begin{cases} u^{(1)}(x, 0^+) = u^{(2)}(x, 0^-), & v^{(1)}(x, 0^+) = v^{(2)}(x, 0^-), \\ \sigma_y^{(1)}(x, 0^+) = \sigma_y^{(2)}(x, 0^-), & \sigma_{xy}^{(1)}(x, 0^+) = \sigma_{xy}^{(2)}(x, 0^-), \end{cases} \quad |x| > l, \quad (10)$$

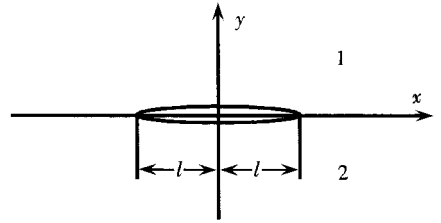


图 1 界面裂纹的几何形状

$$\phi^{(1)}(x, 0^+) = \phi^{(2)}(x, 0^-), \quad D_y^{(1)}(x, 0^+) = D_y^{(2)}(x, 0^-), \quad |x| \geq 0, \quad (11)$$

其中  $\sigma_0$  是均匀应力载荷的大小。

## 2 求 解

由于问题的对称性, 只需考虑  $x \geq 0, |y| < \infty$  的情况就可以了, 如文献[10]和文献[11]中的讨论, 方程(6)~ 方程(8)的解可表示为

$$u^{(1)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{(1)} (-\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} \lambda_i^{(1)^2}) \int_0^\infty A_i(s) s^4 \sin(sx) e^{-\lambda_i^{(1)} y} ds, \quad (12)$$

$$v^{(1)}(x, y) = -\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^3 (c_{11}^{(1)} \epsilon_{11}^{(1)} - \alpha_3^{(1)} \lambda_i^{(1)^2} + c_{44}^{(1)} \epsilon_{33}^{(1)} \lambda_i^{(1)^4}) \times \int_0^\infty A_i(s) s^4 \cos(sx) e^{-\lambda_i^{(1)} y} ds, \quad (13)$$

$$\phi^{(1)}(x, y) = -\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^3 (c_{11}^{(1)} e_{15}^{(1)} - \alpha_4^{(1)} \lambda_i^{(1)^2} + c_{44}^{(1)} e_{33}^{(1)} \lambda_i^{(1)^4}) \times \int_0^\infty A_i(s) s^4 \cos(sx) e^{-\lambda_i^{(1)} y} ds, \quad (14)$$

$$u^{(2)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{(2)} (\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} \lambda_i^{(2)^2}) \int_0^\infty B_i(s) s^4 \sin(sx) e^{\lambda_i^{(2)} y} ds, \quad (15)$$

$$v^{(2)}(x, y) = -\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^3 (c_{11}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} - \alpha_3^{(2)} \lambda_i^{(2)^2} + c_{44}^{(2)} \epsilon_{33}^{(2)} \lambda_i^{(2)^4}) \times \int_0^\infty B_i(s) s^4 \cos(sx) e^{\lambda_i^{(2)} y} ds, \quad (16)$$

$$\phi^{(2)}(x, y) = -\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^3 (c_{11}^{(2)} e_{15}^{(2)} - \alpha_4^{(2)} \lambda_i^{(2)^2} + c_{44}^{(2)} e_{33}^{(2)} \lambda_i^{(2)^4}) \times \int_0^\infty B_i(s) s^4 \cos(sx) e^{\lambda_i^{(2)} y} ds, \quad (17)$$

其中  $A_i(s)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 和  $B_i(s)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 分别是上半平面和下半平面的未知函数。 $\lambda_i^{(j)}$  ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2$ ) 是如下特征方程的根(此处假设特征根  $\lambda_i^{(j)^2} \neq \lambda_j^{(j)^2} \neq \lambda_3^{(j)^2} > 0$ 。用同样方法可以求解其他情况, 此处从略)。

$$a^{(j)} \lambda^{(j)^6} - b^{(j)} \lambda^{(j)^4} + c^{(j)} \lambda^{(j)^2} - d^{(j)} = 0, \quad (18)$$

其中  $a^{(j)}$ 、 $b^{(j)}$ 、 $c^{(j)}$  和  $d^{(j)}$  是依赖于上下半平面材料性质的常数。可由文献[11]和文献[12]得到, 此处从略。

把方程(12)~ 方程(17)分别代入方程(1)~ 方程(5)可得

$$\sigma_y^{(1)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{(1)} [c_{13}^{(1)} (-\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} \lambda_i^{(1)^2}) + c_{33}^{(1)} (c_{11}^{(1)} \epsilon_{11}^{(1)} - \alpha_3^{(1)} \lambda_i^{(1)^2} + c_{44}^{(1)} \epsilon_{33}^{(1)} \lambda_i^{(1)^4}) + e_{33}^{(1)} (c_{11}^{(1)} e_{15}^{(1)} - \alpha_4^{(1)} \lambda_i^{(1)^2} + c_{44}^{(1)} e_{33}^{(1)} \lambda_i^{(1)^4})] \int_0^\infty A_i(s) s^5 e^{-\lambda_i^{(1)} y} \cos(sx) ds, \quad (19)$$

$$\sigma_{xy}^{(1)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^3 [c_{44}^{(1)} \lambda_i^{(1)^2} (\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)} \lambda_i^{(1)^2}) + c_{44}^{(1)} (c_{11}^{(1)} \epsilon_{11}^{(1)} - \alpha_3^{(1)} \lambda_i^{(1)^2} + c_{44}^{(1)} \epsilon_{33}^{(1)} \lambda_i^{(1)^4}) +$$

$$e_{15}^{(1)}(c_{11}^{(1)}e_{15}^{(1)} - \alpha_4^{(1)}\lambda_i^{(1)2} + c_{44}^{(1)}e_{33}^{(1)}\lambda_i^{(1)4})J \int_0^\infty A_i(s) s^5 e^{-\lambda_i^{(1)}sy} \sin(sx) ds, \quad (20)$$

$$D_y^{(1)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{(1)} [e_{31}^{(1)}(-\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}\lambda_i^{(1)2}) + e_{33}^{(1)}(c_{11}^{(1)}\mathfrak{E}_{11}^{(1)} - \alpha_3^{(1)}\lambda_i^{(1)2} + c_{44}^{(1)}\mathfrak{E}_{33}^{(1)}\lambda_i^{(1)4}) - \mathfrak{E}_{33}^{(1)}(c_{11}^{(1)}e_{15}^{(1)} - \alpha_4^{(1)}\lambda_i^{(1)2} + c_{44}^{(1)}e_{33}^{(1)}\lambda_i^{(1)4})] J \int_0^\infty A_i(s) s^5 e^{-\lambda_i^{(1)}sy} \cos(sx) ds, \quad (21)$$

$$\sigma_y^{(2)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{(2)} [c_{13}^{(2)}(\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)}\lambda_i^{(2)2}) - c_{33}^{(2)}(c_{11}^{(2)}\mathfrak{E}_{11}^{(2)} - \alpha_3^{(2)}\lambda_i^{(2)2} + c_{44}^{(2)}\mathfrak{E}_{33}^{(2)}\lambda_i^{(2)4}) - e_{33}^{(2)}(c_{11}^{(2)}e_{15}^{(2)} - \alpha_4^{(2)}\lambda_i^{(2)2} + c_{44}^{(2)}e_{33}^{(2)}\lambda_i^{(2)4})] J \int_0^\infty B_i(s) s^5 e^{\lambda_i^{(2)}sy} \cos(sx) ds, \quad (22)$$

$$\sigma_{xy}^{(2)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^3 c_{44}^{(2)} \lambda_i^{(2)2} (\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)}\lambda_i^{(2)2}) + c_{44}^{(2)}(c_{11}^{(2)}\mathfrak{E}_{11}^{(2)} - \alpha_3^{(2)}\lambda_i^{(2)2} + c_{44}^{(2)}\mathfrak{E}_{33}^{(2)}\lambda_i^{(2)4}) + e_{15}^{(2)}(c_{11}^{(2)}e_{15}^{(2)} - \alpha_4^{(2)}\lambda_i^{(2)2} + c_{44}^{(2)}e_{33}^{(2)}\lambda_i^{(2)4}) J \int_0^\infty B_i(s) s^5 e^{\lambda_i^{(2)}sy} \sin(sx) ds, \quad (23)$$

$$D_y^{(2)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{(2)} [e_{31}^{(2)}(\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)}\lambda_i^{(2)2}) - e_{33}^{(2)}(c_{11}^{(2)}\mathfrak{E}_{11}^{(2)} - \alpha_3^{(2)}\lambda_i^{(2)2} + c_{44}^{(2)}\mathfrak{E}_{33}^{(2)}\lambda_i^{(2)4}) + \mathfrak{E}_{33}^{(2)}(c_{11}^{(2)}e_{15}^{(2)} - \alpha_4^{(2)}\lambda_i^{(2)2} + c_{44}^{(2)}e_{33}^{(2)}\lambda_i^{(2)4})] J \int_0^\infty B_i(s) s^5 e^{\lambda_i^{(2)}sy} \cos(sx) ds, \quad (24)$$

根据方程(9)~方程(11),我们注意到此种情况下对所有的 $x$ 值,  $\sigma_y^{(1)}(x, 0) = \sigma_y^{(2)}(x, 0)$ ,

$\sigma_{xy}^{(1)}(x, 0) = \sigma_{xy}^{(2)}(x, 0)$ 及  $D_y^{(1)}(x, 0) = D_y^{(2)}(x, 0)$ , 等价于下列方程

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i^{(1)} [c_{13}^{(1)}(-\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}\lambda_i^{(1)2}) + c_{33}^{(1)}(c_{11}^{(1)}\mathfrak{E}_{11}^{(1)} - \alpha_3^{(1)}\lambda_i^{(1)2} + c_{44}^{(1)}\mathfrak{E}_{33}^{(1)}\lambda_i^{(1)4}) + e_{33}^{(1)}(c_{11}^{(1)}e_{15}^{(1)} - \alpha_4^{(1)}\lambda_i^{(1)2} + c_{44}^{(1)}e_{33}^{(1)}\lambda_i^{(1)4})] A_i(s) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{(2)} [c_{13}^{(2)}(\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)}\lambda_i^{(2)2}) - c_{33}^{(2)}(c_{11}^{(2)}\mathfrak{E}_{11}^{(2)} - \alpha_3^{(2)}\lambda_i^{(2)2} + c_{44}^{(2)}\mathfrak{E}_{33}^{(2)}\lambda_i^{(2)4}) - e_{33}^{(2)}(c_{11}^{(2)}e_{15}^{(2)} - \alpha_4^{(2)}\lambda_i^{(2)2} + c_{44}^{(2)}e_{33}^{(2)}\lambda_i^{(2)4})] B_i(s), \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^3 c_{44}^{(1)} \lambda_i^{(1)2} (\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)}\lambda_i^{(1)2}) + c_{44}^{(1)}(c_{11}^{(1)}\mathfrak{E}_{11}^{(1)} - \alpha_3^{(1)}\lambda_i^{(1)2} + c_{44}^{(1)}\mathfrak{E}_{33}^{(1)}\lambda_i^{(1)4}) + e_{15}^{(1)}(c_{11}^{(1)}e_{15}^{(1)} - \alpha_4^{(1)}\lambda_i^{(1)2} + c_{44}^{(1)}e_{33}^{(1)}\lambda_i^{(1)4})] A_i(s) = \sum_{i=1}^3 c_{44}^{(2)} \lambda_i^{(2)2} (\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)}\lambda_i^{(2)2}) + c_{44}^{(2)}(c_{11}^{(2)}\mathfrak{E}_{11}^{(2)} - \alpha_3^{(2)}\lambda_i^{(2)2} + c_{44}^{(2)}\mathfrak{E}_{33}^{(2)}\lambda_i^{(2)4}) + e_{15}^{(2)}(c_{11}^{(2)}e_{15}^{(2)} - \alpha_4^{(2)}\lambda_i^{(2)2} + c_{44}^{(2)}e_{33}^{(2)}\lambda_i^{(2)4})] B_i(s), \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i^{(1)} [e_{31}^{(1)}(-\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}\lambda_i^{(1)2}) + e_{33}^{(1)}(c_{11}^{(1)}\mathfrak{E}_{11}^{(1)} - \alpha_3^{(1)}\lambda_i^{(1)2} + c_{44}^{(1)}\mathfrak{E}_{33}^{(1)}\lambda_i^{(1)4}) - \mathfrak{E}_{33}^{(1)}(c_{11}^{(1)}e_{15}^{(1)} - \alpha_4^{(1)}\lambda_i^{(1)2} + c_{44}^{(1)}e_{33}^{(1)}\lambda_i^{(1)4})] A_i(s) =$$

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i^{(2)} [e_{31}^{(2)} (\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} \lambda_i^{(2)^2}) - e_{33}^{(2)} (c_{11}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} - \alpha_3^{(2)} \lambda_i^{(2)^2} + c_{44}^{(2)} \epsilon_{33}^{(2)} \lambda_i^{(2)^4}) + \epsilon_{33}^{(2)} (c_{11}^{(2)} e_{15}^{(2)} - \alpha_4^{(2)} \lambda_i^{(2)^2} + c_{44}^{(2)} e_{33}^{(2)} \lambda_i^{(2)^4})] B_i(s) \cdot \quad (27)$$

为了问题的求解, 裂纹表面的位移差定义成如下形式

$$f_1(x) = u^{(1)}(x, 0) - u^{(2)}(x, 0), \quad (28)$$

$$f_2(x) = v^{(1)}(x, 0) - v^{(2)}(x, 0), \quad (29)$$

这里  $f_1(x)$  是一奇函数,  $f_2(x)$  是一偶函数, 且它们是要根据边界条件确定的未知函数。而以前求解类似问题时用的是以位错函数  $\partial f_i(x)/\partial x (i = 1, 2)$  为未知量的。

把方程(12)~方程(17)代入方程(28)和方程(29), 应用 Fourier 变换技术及边界条件, 可以得到

$$\frac{f_1(s)}{s^4} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{(1)} (-\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} \lambda_i^{(1)^2}) A_i(s) - \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{(2)} (\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} \lambda_i^{(2)^2}) B_i(s), \quad (30)$$

$$\frac{f_2(s)}{s^4} = - \sum_{i=1}^3 (c_{11}^{(1)} \epsilon_{11}^{(1)} - \alpha_3^{(1)} \lambda_i^{(1)^2} + c_{44}^{(1)} \epsilon_{33}^{(1)} \lambda_i^{(1)^4}) A_i(s) + \sum_{i=1}^3 (c_{11}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} - \alpha_3^{(2)} \lambda_i^{(2)^2} + c_{44}^{(2)} \epsilon_{33}^{(2)} \lambda_i^{(2)^4}) B_i(s), \quad (31)$$

$$- \sum_{i=1}^3 (c_{11}^{(1)} e_{15}^{(1)} - \alpha_4^{(1)} \lambda_i^{(1)^2} + c_{44}^{(1)} e_{33}^{(1)} \lambda_i^{(1)^4}) A_i(s) + \sum_{i=1}^3 (c_{11}^{(2)} e_{15}^{(2)} - \alpha_4^{(2)} \lambda_i^{(2)^2} + c_{44}^{(2)} e_{33}^{(2)} \lambda_i^{(2)^4}) B_i(s) = 0 \cdot \quad (32)$$

本文中变量上的一横杠表示是经过 Fourier 变换后的变量。

求解有 6 个未知函数的 6 个方程(25)~方程(27)和方程(30)~方程(32), 把解代入方程(19)~方程(20), 并应用边界条件方程(9)和方程(10), 可以得到

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty s [\beta_1 f_1(s) + \beta_2 f_2(s)] \cos(sx) ds = -\sigma_0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (33)$$

$$\sigma_{xy}^{(1)}(x, 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty s [\beta_3 f_1(s) + \beta_4 f_2(s)] \sin(sx) ds = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (34)$$

$$\int_0^\infty f_1(s) \sin(sx) ds = 0, \quad x > l, \quad (35)$$

$$\int_0^\infty f_2(s) \cos(sx) ds = 0, \quad x > l, \quad (36)$$

其中  $\beta_j (j = 1, 2, 3, 4)$  是非 0 常数, 与上下半平面的材料性质有关, 具体形式见附录。当上下半平面材料相同时, 可得  $\beta_1 = \beta_4 = 0$ , 此时本文的解可以转换为均匀压电材料中的裂纹问题的解。为了确定未知函数  $f_1(s)$  和  $f_2(s)$ , 必须求解上述两对对偶积分方程(33)~方程(36)。

### 3 对偶积分方程的解

如引言中的讨论, 本文是在一定假设条件下进行求解的, 即不考虑界面裂纹尖端处裂纹面的相互叠入现象。裂纹表面位移差可展开为如下级数

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_{2n+1}^{(1/2, 1/2)} \left( \frac{x}{l} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right)^{1/2}, \quad \text{当 } 0 \leq x \leq l, \quad (37)$$

$$f_1(x) = 0, \quad \text{当 } l < x, \quad (38)$$

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n^{(1/2, 1/2)}\left(\frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^{1/2}, \quad \text{当 } 0 \leq x \leq l, \quad (39)$$

$$f_2(x) = 0, \quad \text{当 } l < x, \quad (40)$$

其中  $a_n$  和  $b_n$  是未知系数,  $P_n^{(1/2, 1/2)}(x)$  是 Jacobi 多项式<sup>[13]</sup>。

方程(37) ~ 方程(40)经 Fourier 变换后为<sup>[14]</sup>

$$f_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n \frac{1}{s} J_{2n+2}(sl), \quad Q_n = \sqrt{\pi}(-1)^n \frac{\Gamma(2n+2+1/2)}{(2n+1)!}, \quad (41)$$

$$f_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n R_n \frac{1}{s} J_{2n+1}(sl), \quad R_n = \sqrt{\pi}(-1)^n \frac{\Gamma(2n+1+1/2)}{(2n)!}, \quad (42)$$

其中  $\Gamma(x)$  和  $J_n(x)$  分别为伽玛函数和贝塞尔函数。

把方程(41)和方程(42)代入到方程(33) ~ 方程(36), 可知, 方程(35)和方程(36)自动满足, 而对于方程(33)和方程(34), 对变量  $x$  在区间  $[0, x]$  上积分后可得

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^3 \int_0^{\infty} \frac{1}{s} [\beta_1 a_n Q_n J_{2n+2}(sl) + \beta_2 b_n R_n J_{2n+1}(sl)] \sin(sx) ds = -\sigma_0 x, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (43)$$

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^3 \int_0^{\infty} \frac{1}{s} [\beta_3 a_n Q_n J_{2n+2}(sl) + \beta_4 b_n R_n J_{2n+1}(sl)] [\cos(sx) - 1] ds = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (44)$$

方程(43)和方程(44)中的半无限积分可以直接获得。从而方程可以利用 Schmidt<sup>[8], [12]</sup>方法来求解未知系数  $a_n$  和  $b_n$ , 具体方法参阅文献[12], 本文中, 此方法从略。当上下半平面材料性质相同时, 可得到  $\beta_1 = \beta_4 = 0$ , 因而根据方程(43)和方程(44), 可得  $a_n = 0$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ),  $b_0 = -\sigma_0 \sqrt{\pi} l / \beta_2$  及  $b_n = 0$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ )。

## 4 强度因子

通过未知系数  $a_n$  和  $b_n$  的获得, 从而就可以确定全部应力场。而对于断裂力学来说, 重点是确定裂纹尖端处的应力场  $\sigma_y^{(1)}$ 、 $\sigma_{xy}^{(1)}$  和电位移场  $D_y^{(1)}$ 。沿裂纹线上  $\sigma_y^{(1)}$ 、 $\sigma_{xy}^{(1)}$  和  $D_y^{(1)}$  可表示为

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) = \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_1 a_n Q_n \int_0^{\infty} J_{2n+2}(sl) \cos(sx) ds + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_2 b_n R_n \int_0^{\infty} J_{2n+1}(sl) \cos(sx) ds \right\}, \quad (45)$$

$$\sigma_{xy}^{(1)}(x, 0) = \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_3 a_n Q_n \int_0^{\infty} J_{2n+2}(sl) \sin(sx) ds + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_4 b_n R_n \int_0^{\infty} J_{2n+1}(sl) \sin(sx) ds \right\}, \quad (46)$$

$$D_y^{(1)}(x, 0) = \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_5 a_n Q_n \int_0^{\infty} J_{2n+2}(sl) \cos(sx) ds + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_6 b_n R_n \int_0^{\infty} J_{2n+1}(sl) \cos(sx) ds \right\}, \quad (47)$$

其中  $\beta_5$  和  $\beta_6$  是非 0 常数, 见附录。

当上下半平面材料性质相同时, 可得  $\beta_5 = 0$  及

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x, 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \beta_2 b_0 R_0 J_1(sl) \cos(sx) ds =$$

$$- \sigma_0 l \int_0^{\infty} J_1(sl) \cos(sx) ds = \begin{cases} -\sigma_0, & x < l, \\ \frac{\sigma_0 l^2}{\sqrt{x^2 - l^2} [x + \sqrt{x^2 - l^2}]}, & x > l, \end{cases} \quad (48)$$

$$\sigma_{xy}^{(1)}(x, 0) = 0, \quad (49)$$

$$D_y^{(1)}(x, 0) = \frac{2}{\pi} \beta_6 b_0 R_0 \int_0^{\infty} J_{2n+1}(sl) \cos(sx) ds =$$

$$- \frac{\sigma_0 \beta_6 l}{\beta_2} \int_0^{\infty} J_1(sl) \cos(sx) ds = \begin{cases} -\frac{\sigma_0 \beta_6}{\beta_2}, & x < l, \\ \frac{\sigma_0 \beta_6 l^2}{\beta_2 \sqrt{x^2 - l^2} [x + \sqrt{x^2 - l^2}]}, & x > l, \end{cases} \quad (50)$$

在这种情况下, 利用 Schmidt 方法可获得均匀压电材料裂纹问题的精确解<sup>[11]</sup>。根据方程(45) ~ 方程(47), 应力场和电位移场的奇异部分可以分别表述如下 ( $l < x$ )

$$\sigma = -\frac{2\beta_2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n R_n H_n(x), \quad \tau = -\frac{2\beta_3}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n Z_n(x), \quad D = -\frac{2\beta_6}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n R_n H_n(x), \quad (51)$$

其中  $H_n(x) = \frac{(-1)^n l^{2n+1}}{\sqrt{x^2 - l^2} [x + \sqrt{x^2 - l^2}]^{2n+1}}, \quad Z_n(x) = \frac{(-1)^n l^{2n+2}}{\sqrt{x^2 - l^2} [x + \sqrt{x^2 - l^2}]^{2n+2}}.$

从而应力强度因子  $K_I$  和  $K_{II}$  以及电位移强度因子  $K_D$  可表示为

$$K_I = \lim_{x \rightarrow l^+} \sqrt{2\pi(x-l)} \cdot \sigma = -\frac{2\beta_2}{\sqrt{l}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\Gamma(2n+1+1/2)}{(2n)!}, \quad (52)$$

$$K_{II} = \lim_{x \rightarrow l^+} \sqrt{2\pi(x-l)} \cdot \tau = -\frac{2\beta_3}{\sqrt{l}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(2n+2+1/2)}{(2n+1)!}, \quad (53)$$

$$K_D = \lim_{x \rightarrow l^+} \sqrt{2\pi(x-l)} D = -\frac{2\beta_6}{\sqrt{l}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\Gamma(2n+1+1/2)}{(2n)!}. \quad (54)$$

## 5 数值计算和讨论

如文献[12]和文献[15]及文献[16]中的讨论, 可知取方程(43)和方程(44)中级数的前10项, Schmidt 方法就可以满足有关精度要求。计算中必须首先检查特征根  $\lambda_j^{(i)}$  ( $i = 1, 2; j = 1, 2, 3$ ) 之间的关系。从而系数  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) 可以得到。假设所研究的材料是容易获得的 PZT\_4, P\_7 及 PZT\_19, 材料常数可见相关文献[7]和文献[10]。数值计算了无量纲化的应力及电位移强度因子, 计算结果如图2至图7所示。从结果中可以得到如下结论

(i) 本文的目的是在一定假设条件下, 给出一种方法来求解压电材料 I 型界面裂纹问题, 即在不考虑裂纹尖端处裂纹面的相互叠入效应的情况下求解。求解过程不同于文献[1]~文献[7]和文献[10]及文献[11]的工作。与以前有关界面裂纹问题的解<sup>[1, 2, [6]]</sup>相比, 本文所得的应立场的奇异性与均匀材料中裂纹应力场的奇异性相同。本文的解可以退化到均匀压电材料裂纹问题的解<sup>[11]</sup>, 当上下半平面材料相同时, 可以得到其精确解, 如方程(48)~方程(50)所示, 图2和图3给出了此种情况数值计算结果。求解过程中对偶积分方程的未知变量是裂纹表面的位移差, 而以前类似问题求解时, 对偶积分方程的未知量是位错密度函数, 这是主要不同之处。

(ii) 求解过程中不会遇到如以前求解类似压电材料中界面裂纹问题时遇到的数学困难,

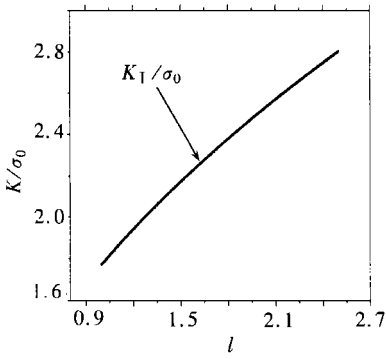


图 2 应力强度因子与  $l$  的关系(PZT\_4/PZT\_4)

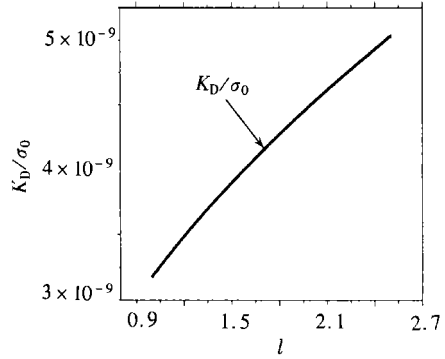


图 3 电位移强度因子与  $l$  的关系(PZT\_4/PZT\_4)

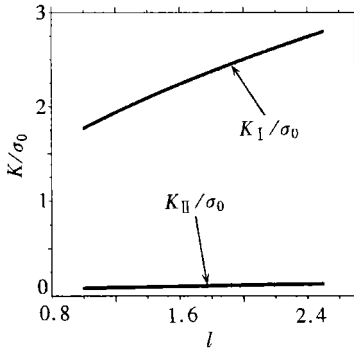


图 4 应力强度因子与  $l$  的关系(PZT\_4/P\_7)

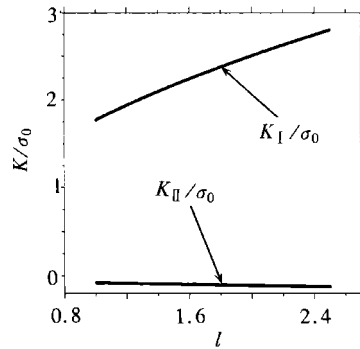


图 5 应力强度因子与  $l$  的关系(P\_7/PZT\_4)

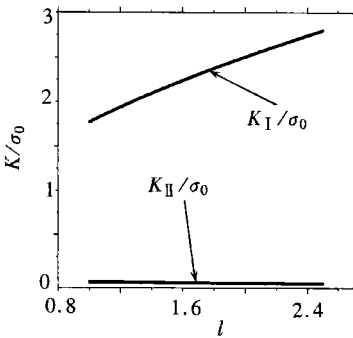


图 6 应力强度因子与  $l$  的关系(PZT\_19/P\_7)

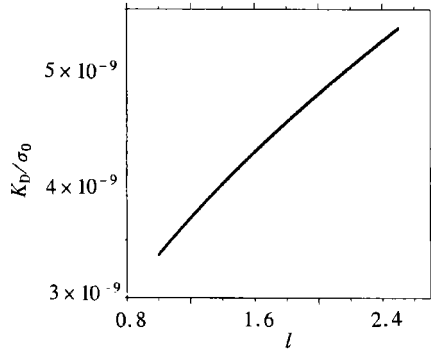


图 7 电位移强度因子与  $l$  的关系(PZT\_4/P\_7)

即遇到应力振荡奇异性问题及裂纹面的相互叠入现象。

(ii) 如图 4~ 图 6 所示, 应力强度因子  $K_I/\sigma_0$  随着裂纹长度的增加而近似线性增加。而剪应力强度因子  $K_{II}/\sigma_0$  远远小于应力强度因子  $K_I/\sigma_0$ , 剪应力强度因子  $K_{II}/\sigma_0$  可为负。

(iv) 如图 4 和图 5 所示, 当上下半平面的材料交换时, 剪应力强度因子  $K_{II}/\sigma_0$  的符号将改变。但此时, 应力强度因子  $K_I/\sigma_0$  不发生变化。

(v) 尽管假设在裂纹表面电位移和电势是连续的, 但在裂纹尖端处电位移仍含有奇异性。如图 7 所示, 电位移强度因子随着  $K_D/\sigma_0$  裂纹长度的增加而近似线性增加。当上下半平面的材料交换时, 电位移强度因子  $K_D/\sigma_0$  不发生变化。不同于非穿透型裂纹问题中<sup>[6]</sup>的电位移强度因子, 穿透型裂纹表面的电位移强度因子非常小。



## 附 录

当  $\lambda_i^{(j)^2} \neq \lambda_j^{(j)^2} \neq \lambda_3^{(j)^2} > 0$ , ( $j = 1, 2$ ) 时, 可以通过下面的公式得到非零常数  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ )

$$\mathbf{M} = [m_{\bar{j}}], \quad \mathbf{Q} = [q_{\bar{j}}], \quad \mathbf{N} = [n_{\bar{j}}], \quad \mathbf{P} = [p_{\bar{j}}], \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$m_{1i} = \lambda_i^{(1)} [c_{13}^{(1)} (-\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} \lambda_i^{(1)^2) + c_{33}^{(1)} (c_{11}^{(1)} \epsilon_{11}^{(1)} - \alpha_3^{(1)} \lambda_i^{(1)^2 + c_{44}^{(1)} \epsilon_{33}^{(1)} \lambda_i^{(1)^4) + e_{33}^{(1)} (c_{11}^{(1)} e_{15}^{(1)} - \alpha_4^{(1)} \lambda_i^{(1)^2 + c_{44}^{(1)} e_{33}^{(1)} \lambda_i^{(1)^4}] \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$m_{2i} = c_{44}^{(1)} \lambda_i^{(1)^2 [(\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)} \lambda_i^{(1)^2) + c_{44}^{(1)} (c_{11}^{(1)} \epsilon_{11}^{(1)} - \alpha_3^{(1)} \lambda_i^{(1)^2 + c_{44}^{(1)} \epsilon_{33}^{(1)} \lambda_i^{(1)^4) + e_{15}^{(1)} (c_{11}^{(1)} e_{15}^{(1)} - \alpha_4^{(1)} \lambda_i^{(1)^2 + c_{44}^{(1)} e_{33}^{(1)} \lambda_i^{(1)^4}] \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$m_{3i} = \lambda_i^{(1)} [e_{31}^{(1)} (-\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} \lambda_i^{(1)^2) + e_{33}^{(1)} (c_{11}^{(1)} \epsilon_{11}^{(1)} - \alpha_3^{(1)} \lambda_i^{(1)^2 + c_{44}^{(1)} \epsilon_{33}^{(1)} \lambda_i^{(1)^4) - \epsilon_{33}^{(1)} (c_{11}^{(1)} e_{15}^{(1)} - \alpha_4^{(1)} \lambda_i^{(1)^2 + c_{44}^{(1)} e_{33}^{(1)} \lambda_i^{(1)^4}] \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$q_{1i} = \lambda_i^{(2)} [c_{13}^{(2)} (\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} \lambda_i^{(2)^2) - c_{33}^{(2)} (c_{11}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} - \alpha_3^{(2)} \lambda_i^{(2)^2 + c_{44}^{(2)} \epsilon_{33}^{(2)} \lambda_i^{(2)^4) - e_{33}^{(2)} (c_{11}^{(2)} e_{15}^{(2)} - \alpha_4^{(2)} \lambda_i^{(2)^2 + c_{44}^{(2)} e_{33}^{(2)} \lambda_i^{(2)^4}] \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$q_{2i} = c_{44}^{(2)} \lambda_i^{(2)^2 [(\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} \lambda_i^{(2)^2) + c_{44}^{(2)} (c_{11}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} - \alpha_3^{(2)} \lambda_i^{(2)^2 + c_{44}^{(2)} \epsilon_{33}^{(2)} \lambda_i^{(2)^4) + e_{15}^{(2)} (c_{11}^{(2)} e_{15}^{(2)} - \alpha_4^{(2)} \lambda_i^{(2)^2 + c_{44}^{(2)} e_{33}^{(2)} \lambda_i^{(2)^4}] \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$q_{3i} = \lambda_i^{(2)} [e_{31}^{(2)} (\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} \lambda_i^{(2)^2) - e_{33}^{(2)} (c_{11}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} - \alpha_3^{(2)} \lambda_i^{(2)^2 + c_{44}^{(2)} \epsilon_{33}^{(2)} \lambda_i^{(2)^4) + \epsilon_{33}^{(2)} (c_{11}^{(2)} e_{15}^{(2)} - \alpha_4^{(2)} \lambda_i^{(2)^2 + c_{44}^{(2)} e_{33}^{(2)} \lambda_i^{(2)^4}] \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$n_{1i} = \lambda_i^{(1)} (-\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} \lambda_i^{(1)^2), \quad n_{2i} = - (c_{11}^{(1)} \epsilon_{11}^{(1)} - \alpha_3^{(1)} \lambda_i^{(1)^2 + c_{44}^{(1)} \epsilon_{33}^{(1)} \lambda_i^{(1)^4) \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$n_{3i} = - (c_{11}^{(1)} e_{15}^{(1)} - \alpha_4^{(1)} \lambda_i^{(1)^2 + c_{44}^{(1)} e_{33}^{(1)} \lambda_i^{(1)^4) \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$p_{1i} = - \lambda_i^{(2)} (\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} \lambda_i^{(2)^2), \quad p_{2i} = (c_{11}^{(2)} \epsilon_{11}^{(2)} - \alpha_3^{(2)} \lambda_i^{(2)^2 + c_{44}^{(2)} \epsilon_{33}^{(2)} \lambda_i^{(2)^4) \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$p_{3i} = c_{11}^{(2)} e_{15}^{(2)} - \alpha_4^{(2)} \lambda_i^{(2)^2 + c_{44}^{(2)} e_{33}^{(2)} \lambda_i^{(2)^4} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & * \\ \beta_3 & \beta_4 & * \\ \beta_5 & \beta_6 & * \end{bmatrix} = \mathbf{M} (\mathbf{N} + \mathbf{P} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{M})^{-1},$$

对于其他情况, 用同样的方法可以得到非零常数  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ), 本文从略。

## [参 考 文 献]

- [1] England A H. A crack between dissimilar media [J]. Journal of Applied Mechanics, 1965, **32**(3): 400—402.
- [2] Rice J R. Elastic fracture mechanics concept for interface cracks [J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1988, **55**(2): 98—103.
- [3] Comninou M. The interface crack [J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1977, **44**(4): 631—636.
- [4] Comninou M. The interface crack in shear field [J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1978, **45**(2): 287—290.
- [5] Comninou M, Schmueser D. The interface crack in combined tension compression and shear field [J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1979, **46**(3): 345—348.
- [6] Suo Z, Kuo C M, Barnett D M, et al. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1992, **40**(4): 739—765.
- [7] Herrmann K P, Loboda V V. Fracture mechanical assessment of electrically permeable interface

- cracks in piezoelectric bimetals by consideration of various contact zone models[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2000, **70**(1): 127—143.
- [8] Morse P M, Feshbach H. *Methods of Theoretical Physics* [M]. New York: McGraw\_Hill, 1958, **1**: 926.
- [9] Erdogan F, Wu B H. Interface crack problems in layered orthotropic materials[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1993, **41**(5): 889—917.
- [10] Ding H J, Chen B, Liang J. General solutions for coupled equations for piezoelectric media[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, **33**(16): 2283—2296.
- [11] Yang F Q. Fracture mechanics for a Mode I crack in piezoelectric materials[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **38**(21): 3813—3830.
- [12] ZHOU Zhen\_gong, SUN Jian\_liang, WANG Biao. Investigation of the behavior of a crack in a piezoelectric material subjected to a uniform tension loading by use of the non\_local theory[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2004, **42**(19/20): 2041—2063.
- [13] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. *Table of Integrals, Series and Products* [M]. New York: Academic Press, 1980, 923—967.
- [14] Erdelyi A. *Tables of Integral Transforms* [M]. New York: McGraw\_Hill, 1954, 68—105.
- [15] 周振功, 王彪. 采用新方法研究非局部理论中 I<sub>I</sub> 型裂纹的断裂问题[J]. *应用数学和力学*, 1999, **20**(10): 1025—1032.
- [16] 周振功, 王彪. 采用新方法研究加层压电材料中平行界面共线双裂纹的断裂问题[J]. *应用数学和力学*, 2003, **24**(1): 1—11.

## Investigation of the Behavior of a Model <sub>I</sub> Interface Crack in Piezoelectric Materials by Using the Schmidt Method

ZHOU Zhen\_gong<sup>1</sup>, WANG Biao<sup>2</sup>

(1. Center for composite materials, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P. R. China;

2. School of Physics and Engineering, Sun Yat\_Sen University, Guangzhou 510275, P. R. China)

**Abstract:** The behavior of a Mode <sub>I</sub> interface crack in piezoelectric materials is investigated under the assumptions that the effect of the crack surface overlapping very near the crack tips is negligible. By use of the Fourier transform, the problem can be solved with the help of two pairs of dual integral equations in which the unknown variables are the jumps of displacements across the crack surfaces. To solve the dual integral equations, the jumps of the displacements across the crack surfaces are expanded in a series of Jacobi polynomials. Contrary to the previous solution of the interface crack in piezoelectric materials, it is found that the stress and the electric displacement singularities of the present interface crack solution are the same as those of the ordinary crack in homogenous materials. The solution can be returned to the exact solution when the upper half plane material is the same as the lower half plane material.

**Key words:** interface crack; intensity factors; piezoelectric materials