

由纵向振动引起的质点与圆锥形杆 碰撞问题的解析解*

鲍四元¹, 邓子辰^{1,2}

(1. 西北工业大学 工程力学系, 西安 710072;

2. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

(岳珠峰推荐)

摘要: 给出细长圆锥形的截面杆受到质点纵向碰撞时的精确解析解。提出了一种新方法用于分析质点_圆锥形杆碰撞, 使用了叠加法给出杆的响应。其结果可验证数值解和其他解析解。所提出方法的优点之一是响应解的解析形式简洁。结论是质量比和一些描述杆几何形状的变量, 如倾斜度、杆长和半径在撞击分析中具有重要作用。

关键词: 圆锥形杆; 纵向碰撞; 模态; 叠加法

中图分类号: V214.2 文献标识码: A

引 言

杆的纵向碰撞问题是工程力学中最重要的问题之一。在过去 20 年里, 波传播法被广泛用于解决此问题, 其中波传播问题的经典理论以杆纵向受碰撞的 St. Venat 解为基础, 此方法由 Goldsmith^[1], Graf^[2] 研究并总结过。纵向撞击波问题的符号运算是最近的进展之一^[3,4]。对等截面杆而言, 除撞击持续时间外的其他重要变量, 如应变和位移, 都能用符号运算的方法获得。而对具有变截面的杆, 相应问题只有少数有解析解。如对于圆锥形杆落到地面的问题, 由计算机代数得到了复杂的符号运算结果^[3]。

然而, 还有其他一些方法来解决此问题。例如, St. Venat 以及 Timoshenko^[5] 使用脉冲函数响应法和模态叠加法分析质点与梁的横向撞击问题。这个方法被发展成为时间积分法并被广泛用来解决撞击问题。Sankzn 和 Yugarwa^[6] 使用拉氏变换法求解了杆撞击地面时的纵向振动方程。

文献[1]中提到的叠加法, 把撞击物和靶体看作两个独立的振动系统。其优点是模态不随撞击物质量改变而改变。然而, 其缺点是难以提高方程解的效率和精度。这个问题由诸、邢^[7]

* 收稿日期: 2005_09_26; 修订日期: 2006_03_28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10372084; 10572119) 教育部新世纪优秀人才基金资助项目(NCET-04_0958)

作者简介: 鲍四元(1980—), 博士(E-mail: bsiyuan@mail.nwpu.edu.cn);

邓子辰(1964—), 教授, 博士生导师(联系人, Tel: + 86_29_88460403; E-mail: dweifan@nwpu.edu.cn)。

使用直接叠加法得到解决, 他们认为质点和杆形成一个整体的振动系统。问题被简化为具有初始条件的振动系统, 应用模态叠加法获得有线性变形和无接触变形时间问题的解析解。

本文基于文献[7]和文献[8]给出质点和圆锥形截面杆碰撞的解析法, 这里要用到不等截面杆振动问题的结果, 如圆锥形杆振动问题的解由 Abrate^[9], Kumar 和 Sujith^[10] 研究过。据此, 本文给出圆锥形杆的位移和应变响应的精确解。

1 纵向碰撞的数学模型

考虑一个均匀的弹性杆, 在 $x = L$ 处受到一个运动的刚性质点的碰撞。此质点具有质量 m_{par} 和初速度 V_0 , 如图 1 所示。杆的弹性模量是 E , 密度 ρ , 截面积 $A(x)$, 长度为 L , 质量是 m_{rod} 。

锥形杆截面的半径是变量(见图 2), 距离左端 x 处的半径用 $r(x)$ 表示。引进参数 $a = \sqrt{\pi}[(r(L) - r(0))/L]$, $b = \sqrt{\pi}r(0)$, 锥形杆截面距离左端 x 处的半径是 $r(x) = (ax + b)/\sqrt{\pi}$, 截面积是 $A(x) = (ax + b)^2$, 右端截面积是 $A_0 = (aL + b)^2$ 。杆的质量 $m_{rod} = \rho A_0 [(1 + q + q^2)/3]$, 其中 $q = r(0)/r(L) = b/(b + aL)$ 。

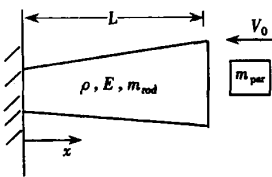


图 1 质点与锥形杆的纵向碰撞

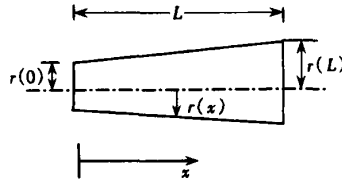


图 2 锥形杆的形状和变量

本文的方法基于如下的假设

- 1) 杆的横向波及撞击物的振动可以忽略, 因此此系统看作一个质点_杆系统。
 - 2) 在撞击瞬间, 根据 St. Venant 理论, 杆撞击端 ($x = L$) 的速度在瞬间达到 V_0 。
- 变截面杆的纵向运动方程为^[10]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EA(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \rho A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

锥形杆位置 x 处, 时刻 t 的轴向位移与应变分别用 $u(x, t)$ 和 $\epsilon(x, t)$ 表示。下列方程用来描述杆各点的速度、应变和应力: $v(x, t) = \partial u(x, t)/\partial t$, $\epsilon(x, t) = \partial u(x, t)/\partial x$, $\sigma(x, t) = E\epsilon(x, t)$ 。此质点_杆系统的边界条件为

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 & (\text{当 } x = 0 \text{ 处固支时}), \\ \epsilon(0, t) = \partial u(0, t)/\partial x = 0 & (\text{当 } x = 0 \text{ 处自由时}), \end{cases} \tag{2}$$

$$m_{par} \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial t^2} = -A_0 \sigma(L, t) \quad (\text{在撞击端 } x = L \text{ 处}), \tag{3}$$

初值条件为

$$v(L, 0) = -V_0. \tag{4}$$

微分方程(1), 边界条件(2)、(3)和初值条件(4) 构成质点_杆系统的动力学行为的控制方程。因此, 质点与圆锥形杆撞击的数学模型已经建立了。

定义无量纲位移: $u(x, t) = -[c/(V_0 L)] u(x, t)$, 其中 $c = \sqrt{E/\rho}$ 。假设方程(1) 的解按形式 $u(x, t) = U(x)e^{i\omega t}$ 变化, 当杆的截面积 $A(x) = (ax + b)^2$ 时, $U(x)$ 为^[9]

$$U(x) = \frac{1}{\alpha x + b} \left[c_1 \sin \left[\beta \frac{\alpha x + b}{a} \right] + c_2 \cos \left[\beta \frac{\alpha x + b}{a} \right] \right], \quad (5)$$

其中常数 $\beta = \omega \sqrt{\rho/E}$.

2 基于叠加原理的计算

对于不同的边界条件,使用基本解和边界条件,可以得到不同边界条件下的模态函数和频率方程,由叠加原理可得质点_杆系统的响应.

2.1 一端固支一端自由杆(图1)

引入无量纲坐标、时间和频率 $\xi = x/L$, $\tau = tc/L$, $\lambda = \beta L/\alpha L \sqrt{\rho/E}$, 及参数 $s = b/(aL)$, $\alpha_0 = 3\alpha/(1+q+q^2)$, 其中 $\alpha = m_{rod}/m_{par}$ 代表杆与质点的质量比. 对固定_自由杆,表1 概括问题的基本解,并与等截面杆问题的解作了对比.

表1 质点_杆(固支_自由)系统的特征和响应比较

项	等截面杆	锥形截面杆
频率方程	$\lambda \tan \lambda = \alpha$	$\tan \lambda \left[\frac{\lambda}{\alpha_0} + \frac{1-q}{\lambda} \right] = 1$
模态	$\phi_i(\xi) = \sin(\lambda_i \xi)$	$\phi_i(\xi) = \frac{\sin(\lambda_i \xi)}{\xi + s}$
广义质量 ($M_i = m_{par} \beta_i$)	$\beta_i = \frac{1}{2}(\alpha + \sin^2 \lambda_i)$	$\beta_i = \frac{q^2}{s^2} \times \left[\left[\frac{1}{2} - \frac{\sin 2\lambda_i}{4\lambda_i} \right] \alpha_0 + \sin^2 \lambda_i \right]$
位移 $u(x, t) = -\frac{V_0 L}{c} u(\xi, \tau)$	$u(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_i}{\lambda_i \beta_i} \sin \lambda_i \xi \sin \lambda_i \tau$	$u(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_i}{\lambda_i \beta_i (1+s)} \frac{\sin \lambda_i \xi}{\xi + s} \sin \lambda_i \tau$
内力 $P(x, t) = -EA \frac{V_0}{c} \varepsilon(\xi, \tau)$	$\varepsilon(\xi, \tau) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_i}{\beta_i} \cos \lambda_i \xi \sin \lambda_i \tau$	$\varepsilon(\xi, \tau) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_i \sin \lambda_i \tau}{\beta_i (1+s)} \left[\frac{\cos \lambda_i \xi}{\xi + s} - \frac{\sin \lambda_i \xi}{\lambda_i (\xi + s)^2} \right]$

对等截面杆及 $a = -0.9, -0.1, 0, 0.1, 3$, $b = 1$ 和 $L = 1$ 时圆锥形杆,表2 给出质量比 α 分别为 0.001 和 5 时系统的无量纲频率. 由表2 可知,与等截面杆相比,圆锥形杆的前几阶频率主要受杆的倾斜度影响,而高阶频率接近于等截面杆对应的频率值. 有趣的是,增加倾斜度可以降低频率值,甚至使一阶模态消失. 例如对于 $\alpha = 0.5$ 的情形,只有 $a > -0.87$ 时才会出现第一阶模态. 对同一个杆,无量纲频率值随着质点质量减小而增加,特别是前两阶频率值,但高阶频率值受质量比的影响较小.

表2 当 $A(x) = (\alpha x + b)^2$, $b = 1$, $L = 1$ 时固支_自由杆的无量纲频率

质量比 α	模态数	$a = -0.9$	$a = -0.1$	$a = 0$	$a = 0.1$	$a = 3$
0.001	1	—	0.031 56	0.031 62	0.031 56	0.023 89
	2	3.141 6	3.141 88	3.141 91	3.141 94	3.142 32
	3	6.283 19	6.283 33	6.283 34	6.283 36	6.283 55
	4	9.424 78	9.424 87	9.424 88	9.424 89	9.425 02
5	1	1.134 75	1.354 24	1.313 84	1.275 75	0.758 651
	2	3.189 67	3.999 64	4.033 57	4.060 67	4.212 15
	3	6.305 29	6.866 5	6.909 6	6.946 43	7.219 75
	4	9.439 29	9.866 5	9.892 75	9.927 29	10.226 4

2.2 两端自由杆

当杆边界为两端自由时,表3 给出等截面杆与锥形杆对应的质点_杆系统的特征和响应的

比较· 表中变量 R_1, R_2, R_3 与 q, α_0, λ 有关, 这里略去其具体公式·

表 3 质点_杆 (两端自由) 系统的特征和响应比较

项	等截面杆	锥形截面杆
频率方程	$\lambda \cot \lambda = -\alpha$	$\lambda \cot \lambda \frac{\alpha_0 q \lambda^2 + \lambda^2(1-q) + (1-q)^2 \alpha_0}{-q\lambda^2 + (1-q)^2 \alpha_0}$
模态	$\phi_i(\xi) = \cos(\lambda_i \xi)$	$\phi_i(\xi) = \frac{\sin(\lambda_i \xi) + s \lambda_i \cos(\lambda_i \xi)}{\xi + s}$
广义质量 ($M_i = m_{\text{杆}} \beta_i$)	$\beta_i = \frac{1}{2}(\alpha + \cos^2 \lambda_i)$	$\beta_i = R_1 + R_2 \cos^2 \lambda_i + R_3 \frac{\sin 2\lambda_i}{\lambda_i}$
位移 $u(x, t) = -\frac{V_0 L}{c} u(\xi, \tau)$	$u(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_i}{\lambda_i \beta_i} \cos \lambda_i \xi \times \sin \lambda_i \tau + \frac{\tau}{1+\alpha}$	$u(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\sin \lambda_i + s \lambda_i \cos \lambda_i)}{\lambda_i (1+s) \beta_i} \times \frac{\sin \lambda_i \xi + s \lambda_i \cos \lambda_i \xi}{\xi + s} \sin \lambda_i \tau + \frac{\tau}{1+\alpha}$
内力 $P(x, t) = -\frac{EA(\xi)V_0}{c} \varepsilon(\xi, \tau)$	$\varepsilon(\xi, \tau) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_i}{\beta_i} \sin \lambda_i \xi \sin \lambda_i \tau$	$\varepsilon(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\sin \lambda_i + s \lambda_i \cos \lambda_i)}{\lambda_i (1+s) \beta_i} \sin \lambda_i \tau \times \frac{\xi \lambda_i \cos \lambda_i \xi - [1 + s \lambda_i^2 (\xi + s)] \sin \lambda_i \xi}{(\xi + s)^2}$

对等截面杆及 $a = -0.3, -0.1, 0, 0.1, 3; b = 1$ 和 $L = 1$ 时圆锥形杆, 表 4 给出质量比 α 分别为 0.001 和 5 时系统的无量纲频率·

在表 3 中, 锥形杆无量纲位移 u 的第 2 部分 $\tau/(1+\alpha)$ 由刚体运动产生, 与无量纲坐标 ξ 和模态无关· 但对于固支_自由杆, 由于杆的左端固定, 因此位移解不含此项·

表 4 当 $A(x) = (ax + b)^2, b = 1, L = 1$ 时两端自由杆_质点系统的无量纲频率

质量比 α	模态数	$a = -0.3$	$a = -0.1$	$a = 0$	$a = 0.1$	$a = 3$
0.001	1	1.353 11	1.505 05	1.571 43	1.632 64	2.456 42
	2	4.648 08	4.691 27	4.712 6	4.733 74	5.233 34
	3	7.815 7	7.841 34	7.854 11	7.866 83	8.204 8
	4	10.968 3	10.986 6	10.995 7	11.004 8	11.256 2
5	1	2.501 21	2.608 71	2.653 66	2.695 06	—
	2	5.248 8	5.395 67	5.454 35	5.505 76	3.388 45
	3	8.213 01	8.338 33	8.391 35	8.438 87	6.153 24
	4	11.261 7	11.363 9	11.408 6	11.449 5	9.027 9

3 算 例

锥形杆一端固定, 一端自由· 对 $\alpha = 0.001$ 和 5.0 的两种情形, 无量纲应变 $\varepsilon(1, \tau)$ 和位移 $u(1, \tau)$ 可通过表 1 中的公式得到· 对于等截面杆和倾斜度 $a = 0.1$ 的锥形杆, 图 3 显示碰撞端的位移 $u(1, \tau)$ 和应变 $\varepsilon(1, \tau)$ 的曲线, 其中模态数取 500·

使用 1 500 阶模态, 图 4 显示当 $a = -0.5, b = 1, L = 1$ 时不同质量比 $\alpha = 0.001, 0.1, 0.5, 5$ 的情况下, 固支_自由杆的无量纲位移和应变响应· 由初速度条件(4), 撞击时的应变初始值均为 1, 而与质量比无关· 然后开始衰减, 分离时刻随质点质量的增大而延迟· 但 $\alpha = 0.001$ 的情形是个例外, 因为相应的第一阶模态不存在· 另外可得出撞击力与撞击速度与波速的比值成正比·

图 5(a) 是 $a = 0.5, \alpha = 1, b = 1, L = 1$ 时, 固支_自由杆系统的波传播曲线· 图 5(b) 给出

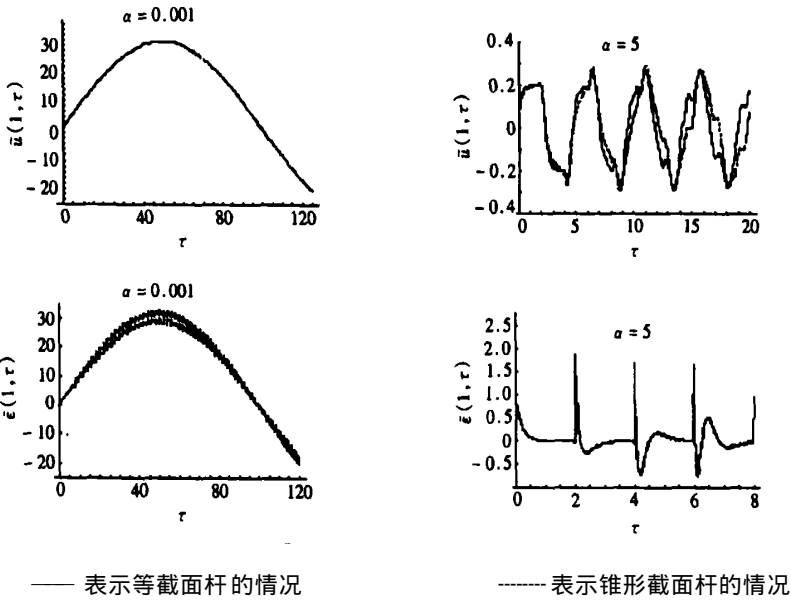


图3 当 $\alpha = 0.1, b = 1, L = 1$ 具有不同质量比时撞击端响应的比较

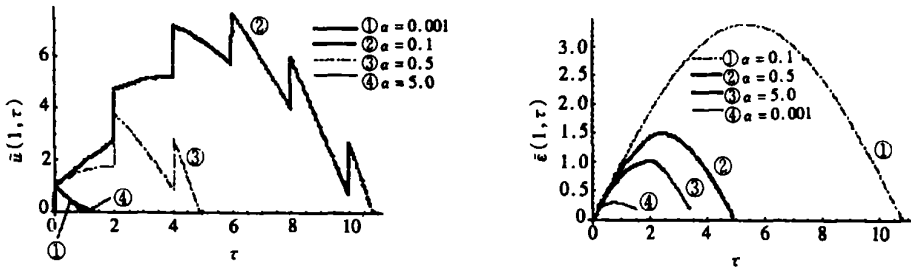
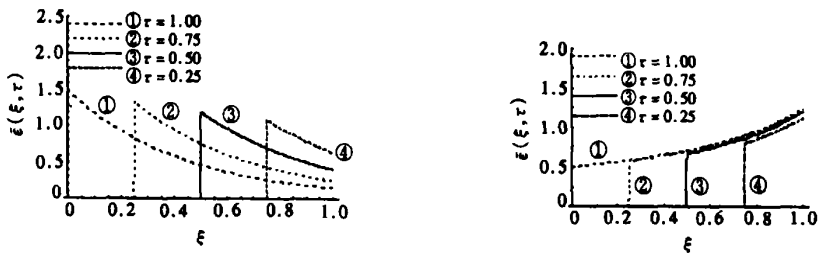


图4 当 $\alpha = -0.5, b = 1, L = 1$ 时固支_自由杆撞击端的响应



(a) $\alpha = 1, a = 0.5, b = 1, L = 1$

(b) $\alpha = 1, a = -0.5, b = 1, L = 1$

图5 固支_自由杆的波传播情况

$\alpha = -0.5$ 的情形。这里使用了 5 700 阶模态。图 6(a)~ 图 6(d) 是使用 2 000 阶模态数得到的两端自由杆的波传播曲线。与文献[7]的图形比较可知: 倾斜度为正时, 无量纲应变的变化趋势与等截面杆系统相同。但当倾斜度为负时, 两者的变化趋势不同。图 5 中, 如果倾斜度为正, 固支端无量纲应变 $\varepsilon(0, 1) > 1$, 而倾斜度为负时 $\varepsilon(0, 1) < 1$, 且图 6 中自由端无量纲应变与倾斜度的正负号之间存在同样关系。所以, $\tau = 1$ 即扰动波传播到支持端时, 杆的倾斜度影响着波传播情况(这里指应变)。而 $\tau < 1$ 即扰动波未传播到支持端时, 波传播情况和支承条件

无关,但与倾斜度有关。由这些图形可知,锥形杆的撞击特性比等截面杆复杂很多。

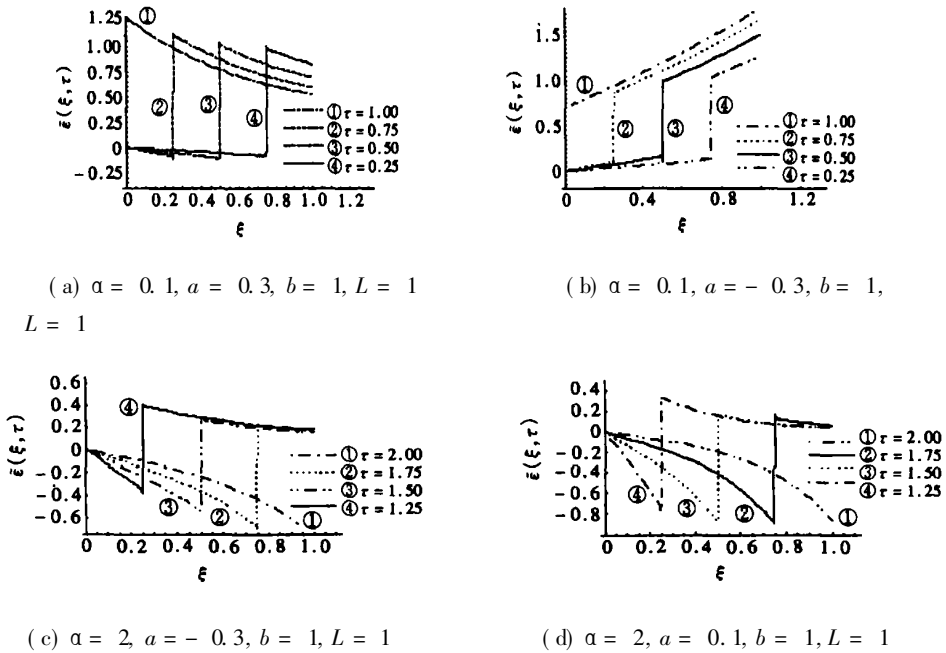


图 6 两端自由杆的波传播情况

4 结 论

在分析碰撞问题时,波传播法和模态叠加法都有效且互相补充^[11]。波传播法有助于理解边界反射波中小的高频部分。模态法(不考虑反射波)概念简单,通过模态截断可获得满足精度要求的解。

本文把杆与质点作为一个系统,用 St. Venat 理论描述锥形杆纵向波传播时的边界条件。对于分离变量后的振动方程,由边界条件得到频率方程与锥形杆响应的解析解,并可验证其他使用有限元或边界元的数值结果。对固支_自由杆,通常情况下撞击时间随着撞击物质质量的增加而增加,但当质量比太小时,如图 4 中 $\alpha = 0.001$,由于相应的第一阶频率不存在而可能成为例外。

本文讨论如下情况: 1) 对于相同截面形状和质量量的杆,撞击质点的质量变化。2) 撞击质点的质量和杆中参数 $b = 1, L = 1$ 不变,而倾斜度取不同值。计算显示,锥形杆的特征比等截面杆复杂很多,运算量也变大。值得注意的是对于很小的质量比 α ,需要选取较多的模态数才能得到满意的结果。较少的模态数得到的响应曲线会沿着正确结果波动^[7]。

由分析知,不同截面杆与质点的碰撞问题可统一到一个理论框架中。

致谢 衷心感谢大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金及西北工业大学博士创新基金(CX200314)对本文的资助!

[参 考 文 献]

[1] Goldsmith W. Impact: the Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids [M]. London: Edward Arnold Ltd, 1960.

[2] Graff K F. Wave Motion in Elastical Solids [M]. Oxford: Clarendon, 1975.

- [3] HU B, Eberhard P, Schiehlen W. Symbolic impact analysis for a falling conical rod against the rigid ground[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, **240**(1): 41—57.
- [4] HU Bin, Eberhard Peter. Symbolic computation of longitudinal impact wave[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2001, **190**(3): 4805—4815.
- [5] Timoshenko S. *Vibration Problems in Engineering* [M]. 2nd ed. New York: Van Nostrand, 1937.
- [6] Sankuzn, Yugarwa. Longitudinal vibrations of elastic rods of stepwise_variable cross_section colliding with a rigid obstacle[J]. *J Appl Maths Mech*, 2001, **65**(3): 427—433.
- [7] 诸德超, 邢誉峰. 点弹性碰撞问题之解析解[J]. *力学学报*, 1996, **28**(1): 99—103.
- [8] ZHU De_chao, XING Yu_feng. Analytical solution of impact problems of rod structures with springs [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1998, **160**(2): 315—323.
- [9] Abrate S. Vibration of non_uniform rods and beams[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, **185**(4): 703—786.
- [10] Kumar B M, Sujith R. Exact solutions for the longitudinal vibration of non_uniform rods[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, **207**(5): 721—729.
- [11] Anindya Chatterjee. The short_time impulse response of euler_bernoulli beams[J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2004, **71**(3): 208—218.

Analytical Solutions for Response of Collision of Particle With Conical Rod Caused by Longitudinal Vibration

BAO Si_yuan¹, DENG Zi_chen^{1, 2}

(1. Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University,
Xi'an 710072, P. R. China;

2. State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116023, P. R. China)

Abstract: The objective is to present analytical solutions of longitudinal impact analysis for slender conical rods struck by a particle and a new method is proposed for conical rod_particle impact analysis, in which the superposition method is used and the response of the rod is presented. These analytical results are exact and can be used to validate the numerical methods or other analytical results. The numerical example shows that one of the advantages of the present method is that the analytical form is very simple. The result is that mass ratio and some variables describing the geometrical shape of rods such as taper, length and radius play an important role in impact dynamic system.

Key words: conical rod; longitudinal impact; mode shape; superposition method