

# 流体诱发水平悬臂输液管的 内共振和模态转换( I )<sup>\*</sup>

徐 鉴, 杨前彪

( 同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092 )

( 刘曾荣推荐 )

摘要: 运用牛顿法导出水平悬臂刚性输液管的非线性动力学数学模型。为了对该模型进行理论分析, 通过对各个相关实际物理量的量级定性分析, 给出了模型中各个物理参数的量级。在此基础上, 应用多尺度法首先得到输液管自由振动模态的特征函数, 利用悬臂管的边界条件给出了特征值满足的特征方程, 发现管内流体速度可以诱发第一阶模态和第二阶模态 3 种形式的内共振分别是 3:1、2:1 和 1:1 内共振, 从理论上解释了流速诱发水平悬臂输液管系统内共振的机理。由于 3:1 内共振所对应的流速最小, 因此这种形式的内共振是最先出现的, 也是最重要的。

关键词: 输液管; 内共振; 稳定性; 分岔

中图分类号: O322; U137.91 文献标识码: A

## 引 言

对于输液管的线性动力学已经有了很好的理解<sup>[1-7]</sup>。然而, 当输液管中流体的速度达到某一临界值导致响应的静态或动态失稳时, 线性模型就再不能描述系统的动力学行为<sup>[8]</sup>。近年来, 在各种边界条件下输液管的非线性动力学研究得到了广泛的开展, 原因在于它有着广阔的工业应用领域, 如热交换系统、核反应堆系统、动力水能工程、输油管道等。同时, 也在于对其研究有着科学意义, 可作为一个新的研究模型来发展非线性动力学<sup>[9,10]</sup>。Paboussis<sup>[10]</sup>和王玉盈<sup>[11]</sup>教授等分别于 1993 年和 1998 年综述了这个研究领域许多杰出的研究成果, 回顾了输液管的研究历史和发展, 并给出了许多有益的评论。2004 年作者<sup>[12]</sup>针对输液管模型及其非线性动力学研究进行了详细的综述。对于柔性输液管道的动力学模型, Semler 等<sup>[13]</sup>系统地比较了已有的非线性动力学模型, 同时, 利用牛顿法和能量法导出了更加精确的非线性动力学方程。Paboussis 专著<sup>[14]</sup>总结了许多已经被前人讨论过的并且是容易理解的现象, 列举了在该领域几乎所有重要的文献资料, 同时也给读者提供了一些方法以便将其应用到类似问题的研究中去。因此, 输液管动力学基础研究已经趋于成熟, 一般的基础性内容都可以在该书中找到。

上述研究成果都表明流体诱发输液管失稳的机理, 即是单一模态通过两种形式的分岔失

\* 收稿日期: 2004\_05\_25; 修订日期: 2006\_03\_01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472083); 国家自然科学基金(重点)资助项目(10532050)

作者简介: 徐鉴(1961—), 男, 浙江人, 教授, 博士(联系人, Tel: + 86\_21\_65981138; Fax: + 86\_21\_65983267; E\_mail: xujian@mail.tongji.edu.cn)。

去稳定性的,这两种形式是:1) 发散(divergence)失稳(流体引起的管道静力屈曲或静态分岔);2) 颤振(flutter)失稳(流体引起的振动或Hopf分岔)。然而,一个关键的问题仍然没有得到解决:哪一阶振动模式是重要的,在研究中不能被截断。最近,Ryu等<sup>[15]</sup>引入“特征值碰撞(collision of eigenvalues)”<sup>[16]</sup>的概念,研究了悬臂非柔性管道颤振时特征值与对应的不稳定模态之间的关系,结果表明,在不同的质量参数或流速范围内,引起颤振的模式是前三阶模态中的一个,同时伴随着质量参数和流速的不同,系统的能量在这3个模态中不断转化。这意味着转化过程中,存在的临界情形,也就是系统存在着内共振。作者在考虑时变流对输液动力学行为影响的研究中,也发现了类似的现象<sup>[17]</sup>,而Ryu的文章并没有提到内共振,也没有给出更多的细节。另一方面,在对悬臂输液管动力学研究中,对于流体诱发具有一定刚性或大抗弯刚度的输液管振动问题,特别是具有流体和外部谐波干扰联合作用下的输液管振动问题的研究却很少。所有这些构成了本文的研究动机和研究基础。

由于篇幅过长,本文分成两部分(I)和(II)。在部分(I)中,运用牛顿法详细推导了水平悬臂 Euler-Bernoulli 型刚性或大抗弯刚度输液管的非线性运动方程,导出水平悬臂刚性输液管的动力学模型,在对各个相关物理量的量级定性分析的基础上,给出无量纲形式的动力学模型。在此基础上,应用多尺度法对模型进行理论分析,证明输液管随着管内流体速度的增加会出现 3:1 内共振、2:1 内共振和 1:1 内共振,并求出相应的临界流速。在部分(II)中,对 3:1 内共振进行了详细的分析,得到了共振解的近似表达形式,通过观察内共振调谐参数、主共振调谐参数和外激励幅值的变化,发现在内共振临界流速附近,流速导致系统通过鞍结分岔、Hopf 分岔、余维 2 分岔和倍周期分岔等非线性动力学现象进行模态能量的转换,使得对应的管道系统的周期运动失稳出现跳跃、颤振和更加复杂的动力学行为。通过对理论结果与数值模拟的比较,表明了理论分析的有效性和正确性。

从本文的研究结果可以看出,流体也可以诱发具有一定刚性或大抗弯刚度的输液管颤振失稳,只是这样的失稳可以通过内共振发生的,这与柔性管道有所不同。

## 1 数学模型

本节建立在文献[13]的基础上,给出水平悬臂 Euler-Bernoulli 型输液管的非线性运动方程。

假设管轴线曲率为  $\kappa$ , 则

$$\partial \tau / \partial s = \kappa n, \quad (1)$$

$$\kappa^2 = \left| \tau \times \frac{\partial \tau}{\partial s} \right|^2 = \frac{\partial \tau}{\partial s} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial s} = \left( \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \right)^2, \quad (2)$$

其中  $\tau$  和  $n$  分别是管轴线上任一质点  $x(s, t)$  和  $y(s, t)$  的切向量和法向量,  $s$  为质点的自然坐标。当管轴向不可伸长时,有

$$\left( \partial x / \partial s \right)^2 + \left( \partial y / \partial s \right)^2 = 1. \quad (3)$$

取单元管的长度为  $ds$ , 输液管的单位长度质量为  $m$ , 输液管中的流体的单位长度质量为  $M$  并且流速是  $u$ ,  $Q$  和  $M$  分别为作用在单元管左截面上的合力和弯矩;  $Q + dQ$  和  $M + dM$  相应地为作用在右截面上的合力和弯矩。单元管中的流体的速度和加速度可以分别表示为

$$V_f = V_p + u\tau = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = u \left[ \frac{\partial x}{\partial s} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial s} \mathbf{j} \right] = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial s} \right] (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = \frac{D\mathbf{r}}{Dt}, \quad (4)$$

$$a_f = (D^2 \mathbf{r} / Dt^2) = \left[ \partial / \partial t + u \partial / \partial s \right]^2 (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}). \quad (5)$$

考虑梁模型管,则由 Bernoulli-Euler 梁理论可知

$$\mathbf{M} = EI\tau \times \partial \tau / \partial s, \quad (6)$$

其中  $EI$  为输液管的抗弯刚度, 由弯矩的平衡关系可得

$$\mathbf{Q} = (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{Q}) \boldsymbol{\tau}_+ + \boldsymbol{\tau} \times (\partial \mathbf{M} / \partial s) = (N - P) \boldsymbol{\tau}_+ + \boldsymbol{\tau} \times (\partial \mathbf{M} / \partial s), \quad (7)$$

其中  $N$  和  $P$  分别为截面上轴向拉力和轴向压力. 方程(7) 向  $x$  和  $y$  轴上投影分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{i} = & (N - P) \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{i} + \boldsymbol{\tau} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} \cdot \mathbf{i} = (N - P) \frac{\partial x}{\partial s} + \boldsymbol{\tau} \times \frac{\partial}{\partial s} \left[ EI \boldsymbol{\tau} \times \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial s} \right] \cdot \mathbf{i} = \\ & (N - P) \frac{\partial x}{\partial s} + EI \left[ \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\tau}}{\partial s^2} \right] \boldsymbol{\tau} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{\tau}}{\partial s^2} \cdot \mathbf{i} = (N - P) \frac{\partial x}{\partial s} - EI \kappa^2 \frac{\partial x}{\partial s} - EI \frac{\partial^3 x}{\partial s^3}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{和 } \mathbf{Q} \cdot \mathbf{j} = (N - P) \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{j} + \boldsymbol{\tau} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} \cdot \mathbf{j} = (N - P) \frac{\partial y}{\partial s} - EI \kappa^2 \frac{\partial y}{\partial s} - EI \frac{\partial^3 y}{\partial s^3}. \quad (9)$$

将(8)和(9)分别代入力的平衡关系可以得到

$$- EI \frac{\partial^4 x}{\partial s^4} + \frac{\partial}{\partial s} \left[ (N - P - EI \kappa^2) \frac{\partial x}{\partial s} \right] = m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + M \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial s} \right)^2 x, \quad (10)$$

$$- EI \frac{\partial^4 y}{\partial s^4} + \frac{\partial}{\partial s} \left[ (N - P - EI \kappa^2) \frac{\partial y}{\partial s} \right] = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + M \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial s} \right)^2 y. \quad (11)$$

悬臂输液管的边界条件为

$$y(0, t) = y'(0, t) = y''(L, t) = y'''(L, t) = 0. \quad (12)$$

为了简化(10)和(11)成为一个描述输液管系统横向( $y$ 轴方向)的运动方程, 首先对方程(10)两边关于变量  $s$  从  $s$  到  $L$  进行积分, 得到  $(N - P - EI \kappa^2)$  的表达式, 再代入方程(11), 并利用方程(3)和边界条件(12)消去  $x$ , 只保留3次和3次以下的非线性项, 得到关于  $y$  系统受到外部激励  $F \cos \Omega t$  扰动时的控制方程

$$\begin{aligned} (m + M) \dot{y} + 2Mu \dot{y}'(1 + y'^2) + y''Mu^2(1 + y'^2) + (m + M)g + \\ EI[y''''(1 + y'^2) + 4y'y''y'' + y''^3] + F \cos \Omega t - y'' \left[ \int_s^L \int_0^s (m + M)(y'^2 + \right. \\ \left. y'y') ds ds + \int_s^L (2Mu y'y' + Mu^2 y'y'') ds \right] + y' \int_0^s (m + M)(y'^2 + y'y') ds = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $L$  为管的长度;  $g$  为重力加速度; “点”和“撇”分别为表示对时间  $t$  和  $s$  坐标的导数.

## 2 模型分析

首先, 对方程(13)进行无量纲化, 为此令

$$t^* = \sqrt{\frac{EI}{m + M}} \frac{t}{L^2}, \quad s^* = \frac{s}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad u^* = \sqrt{\frac{M}{EI}} uL, \\ \beta = \left( \frac{M}{m + M} \right)^{1/4}, \quad \gamma = \frac{m + M}{EI} L^3 g, \quad f_1 = \frac{L^3}{EI} F,$$

并代入方程(13), 为了书写方便, 去掉\*号, 则有

$$\begin{aligned} \dot{y} + u^2 y'' + y'' + 2u\beta^2 y' \dot{y}' + \gamma + f_1 \cos \Omega t + 2u\beta^2 y' y'^2 + u^2 y'' y'^2 + \\ y'' y'^2 + 4y'y''y'' + y''^3 - y'' \left[ \int_x^1 \int_0^x (y'^2 + y'y') dx dx + \right. \\ \left. \int_x^1 (2u\beta^2 y'y' + u^2 y'y'') dx \right] + y' \int_0^x (y'^2 + y'y') dx = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

值得注意的是在方程(14)中, 只保留了3次非线性项. 为了分析(14), 有必要对其个项的量级进行分析. 根据 Pa&ubssis 的研究结果<sup>[14]</sup>, 相对管道的长度, 横向挠度可以认为是“小”的, 故引进一无量纲参数  $0 < \varepsilon < 1$ , 则设  $y \sim O(\varepsilon)$  并且当  $m$  和  $M$  取适当的值时总可以使得  $\beta = (M/(m + M))^{1/4}$  的量级为  $O(\varepsilon)$ . 如果  $u \sim O(1)$ (通过后面的计算可以看到  $u$  的量级为

$O(1)$ ), 则可以得到  $\dot{y} \sim O(\varepsilon)$ ,  $u^2 \ddot{y} \sim O(\varepsilon)$ ,  $y''' \sim O(\varepsilon)$ ,  $2u\beta^2 \dot{y}' \sim O(\varepsilon^3)$ . 对于大抗弯刚度的非柔性管, 这里研究  $\nu$  至少是  $O(\varepsilon^4)$ . 例如, 一根悬臂输水钢管, 长 100 cm, 内径 3.2 cm, 外径 12 cm, 可以得到  $\beta = 0.31$ ,  $\nu = 1.96 \times 10^{-4}$ . 因此,  $\nu$  的影响可以被忽略, 正如 Ryu 研究的情形<sup>[15]</sup>. 如果在输液管的静态平衡位置上建立坐标系, 以管的轴线作为坐标系的横轴, 这时也可以不考虑管自重的影. 另外, 本文考虑的是弱的外激励干扰, 即  $f_1 \sim O(\varepsilon^3)$ , 于是外激励项的量级为  $O(\varepsilon^3)$ . 从以上的量级分析可以看出, 方程(14)中的项只有  $O(\varepsilon)$  和  $O(\varepsilon^3)$  项, 可以应用多尺度法进行分析, 为此令

$$T_n = \varepsilon^n t \quad (n = 0, 2, 4, \dots), \quad (15)$$

则有

$$d/dt = D_0 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad (16)$$

$$d^2/dt^2 = D_0^2 + 2\varepsilon^2 D_0 D_2 + \varepsilon^4 D_2^2 + \dots, \quad (17)$$

$$y(x, t) = \varepsilon y_1(T_0, T_2) + \varepsilon^3 y_3(T_0, T_2) + \dots, \quad (18)$$

并且重新标度  $\beta^2 \rightarrow \varepsilon^2 \beta^2$ ,  $f_1 \rightarrow \varepsilon^3 f_1$ , 则方程(14)和对应的边界条件为

$$O(\varepsilon): D_0^2 y_1 + u^2 y_1'' + y_1''' = 0, \quad (19)$$

$$y_1(0, t) = \dot{y}_1(0, t) = 0, \quad y_1(1, t) = y_1'(1, 0) = 0. \quad (20)$$

$$O(\varepsilon^3): D_0^2 y_3 + u^2 y_3'' + y_3''' = -2D_0 D_2 y_1 - 2u\beta^2 D_0 y_1' - u^2 y_1'^2 y_1'' - y_1'^2 y_1''' - 4y_1 y_1'' y_1''' - y_1^3 + f_1 \cos \Omega + y_1 \int_x^1 \int_0^x ((D_0 y_1')^2 + y_1' D_0^2 y_1) dx dx + y_1 \int_x^1 u^2 y_1' y_1'' dx - y_1 \int_0^x ((D_0 y_1')^2 + y_1' D_0^2 y_1) dx, \quad (21)$$

$$y_3(0, t) = \dot{y}_3(0, t) = 0, \quad y_3(1, t) = y_3'(1, t) = 0, \quad (22)$$

其中  $D_n = \partial/\partial T_n$ .

### 3 内共振现象

自由振动方程(19)和(20)的解可以表示成为

$$y_1(T_0, T_2, x) = \sum_{j=0}^N \phi_j(x) A_j(T_2) e^{i\omega_j T_0} + cc, \quad (23)$$

其中  $cc$  为其前面项的共轭项,  $\phi_j(x)$  是对应的具有相同边界条件梁的无量纲特征函数, 满足

$$\phi_j'''(x) + u^2 \phi_j''(x) - \omega_j^2 \phi_j(x) = 0, \quad (24)$$

$$\text{解得} \quad \phi_j(x) = C_1 \cos \lambda_j x + C_2 \sin \lambda_j x + C_3 \operatorname{ch} \lambda_j x + C_4 \operatorname{sh} \lambda_j x, \quad (25)$$

其中  $j = 1, 2, \dots, N$ , 而

$$\lambda_j^2 = (1/2)(u^4 + 4\omega_j^2)^{1/2} - (1/2)u^2, \quad \lambda_{2j}^2 = (1/2)(u^4 + 4\omega_j^2)^{1/2} + (1/2)u^2, \quad (26)$$

由边界条件(20)可得

$$\phi_j(0) = \dot{\phi}_j(0) = 0, \quad \phi_j(1) = \phi_j'(1) = 0, \quad (27)$$

将(25)代入(27)可得关于  $C_1, C_2, C_3, C_4$  的方程组, 该方程组有非零解的充分必要条件是其特征行列式为零, 即

$$\lambda_j^4 + \lambda_{2j}^4 + \lambda_j \lambda_{2j} [2\lambda_j \lambda_{2j} \cos \lambda_j \operatorname{ch} \lambda_{2j} + (\lambda_j^2 - \lambda_{2j}^2) \sin \lambda_j \operatorname{sh} \lambda_{2j}] = 0. \quad (28)$$

如果考虑第一阶和第二阶模态运动, 则通过(28)可以发现流体速度诱发的第一阶模态和第二阶模态3种形式的内共振(参看图1~图3). 在图1中, 横坐标为流速  $u$ , 纵坐标为振动频率  $\omega$ , 细线代表第二阶模态频率, 粗线代表3倍第一阶模态频率. 从图中可以看出, 当流速  $u_{c3} \approx$

3. 543 557 7 时, 第二阶模态频率和 3 倍第一阶模态频率相交,  $\omega_2 = 17.484\ 258$ , 系统存在 3: 1 内共振。同样地, 在图 2 中当流速  $u_{c2} \approx 4.124\ 568\ 6$  时, 第二阶模态频率和 2 倍第一阶模态频率相交, 即  $2\omega_1 = \omega_2$ , 此时  $\omega_1 = 7.513\ 992$ ,  $\omega_2 = 15.027\ 985$ , 系统存在 2: 1 内共振。在图 3 中可以清楚地看出, 如果流速继续增加, 第一阶模态频率和第二阶模态频率在  $u_{c1} \approx 4.477\ 822\ 0$  时重合, 此时  $\omega_1 = \omega_2 = 10.998\ 198$ , 系统存在 1: 1 内共振。相应的流速满足  $u_{c3} < u_{c2} < u_{c1}$ , 因此, 随着管内流体速度的增加, 3: 1 内共振最先发生, 2: 1 内共振为次之, 1: 1 内共振最后

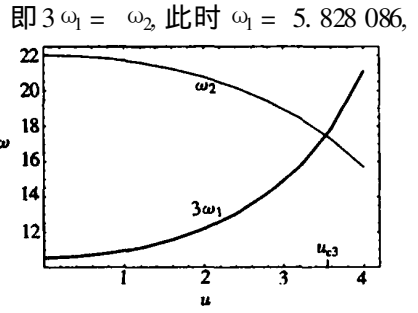


图 1 流诱发 3: 1 内共振

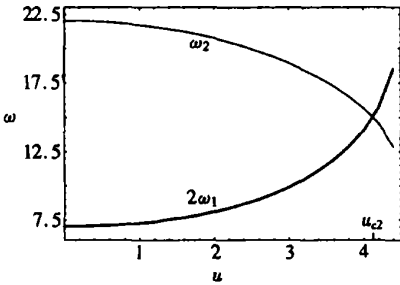


图 2 流诱发 2: 1 内共振

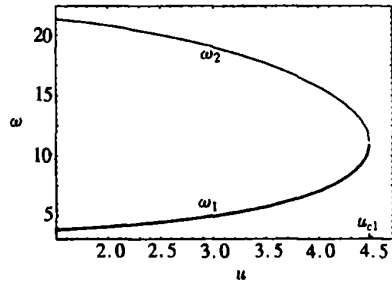


图 3 流诱发 1: 1 内共振

发生。这样的内共振时的悬臂输液管通过颤振失去稳定性。在部分(II)<sup>[18]</sup>中将详细讨论最主要的 3: 1 内共振。

## 4 结 论

本文的部分(I)运用牛顿法对水平悬臂输液管进行数学建模, 得到形式简单但又蕴涵着丰富而复杂的动力学内容的控制方程, 在对物理量级进行定性分析的基础上运用多尺度法对控制方程进行非线性分析, 发现流速可以诱发系统出现 3: 1、2: 1 和 1: 1 内共振。对应的流速临界值分别是  $u_{c3} \approx 3.543\ 557\ 7$ 、 $u_{c2} \approx 4.124\ 568\ 6$  和  $u_{c1} \approx 4.477\ 822\ 0$ , 从理论上解释了流速诱发水平悬臂输液管系统内共振的机理。由于  $u_{c3} < u_{c2} < u_{c1}$ , 则 3: 1 内共振是最先出现的, 因此也是最重要的。对于流体诱发的 3: 1 内共振的详细分析, 将在文章的部分(II)中讨论<sup>[18]</sup>。

### [参 考 文 献]

- [1] Long R H. Experimental and theoretical study of transverse vibration of a tube containing flowing fluid[J]. Journal of Applied Mechanics, 1955, 77(1): 65—68.
- [2] Handelman G H. A note on the transverse vibration of a tube containing flowing fluid[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1955, 13(3): 326—330.
- [3] Naguleswaran S, Williams C J H. Lateral vibrations of a pipe conveying a fluid[J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 1968, 10(2): 228—238.
- [4] Stein R A, Torbiner W M. Vibrations of pipes containing flowing fluids[J]. Journal of Applied Mechanics, 1970, 37(6): 906—916.
- [5] Paidoussis M P, Lathier B E. Dynamics of Timoshenko beams conveying fluid[J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 1976, 18(2): 210—220.
- [6] Paidoussis M P, Luu T P, Lathier B E. Dynamics of finite length tubular beams conveying fluid[J].

- Journal of Sound and Vibration, 1986, **106**(2): 311—331.
- [7] Lee U, Pak C H, Hong S C. The dynamics of piping system with internal unsteady flow[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, **180**(2): 297—311.
- [8] Holmes P J. Bifurcations to divergence and flutter in flow induced oscillations: a finite dimensional analysis[J]. Journal of Sound and Vibration, 1977, **53**(4): 471—503.
- [9] Rousselet J, Hermann G. Dynamic behaviour of continuous cantilevered pipes conveying fluid near critical velocities[J]. Journal of Applied Mechanics, 1981, **48**(6): 943—947.
- [10] Paidoussis M P, Li G X. Pipes conveying fluid: a model dynamical problem[J]. Journal of Fluid and Structures, 1993, **7**(2): 137—204.
- [11] 黄玉盈, 邹时智, 徐鉴, 等. 输液管的非线性振动、分叉与混沌—现状与展望[J]. 力学进展, 1998, **28**(1): 30—42.
- [12] 徐鉴, 杨前彪. 输液管模型及其非线性动力学近期研究进展[J]. 力学进展, 2004, **34**(2): 1—13.
- [13] Semler C, Li X, Paidoussis M P. The non-linear equations of motion of pipes conveying fluid[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, **169**(3): 577—599.
- [14] Paidoussis M P. Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow [M]. San Diego: Academic Press, 1998.
- [15] Ryu S U, Sugiyama Y, Ryu B J. Eigenvalue branches and modes for flutter of cantilevered pipes conveying fluid[J]. Computers and Structures, 2002, **80**(14/15): 1231—1241.
- [16] Seyranian A P. Collision of eigenvalues in linear oscillatory systems[J]. PMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1994, **58**(5): 805—13.
- [17] XU Jian, CHUNG Kwow\_wai, CHAN HENRY Shui\_ying. Co\_dimension 2 bifurcation and chaos in cantilevered pipe conveying time varying fluid with three\_to\_one in internal resonances[J]. Acta Mechanica Solid Sinica, 2003, **6**(3): 245—255.
- [18] 徐鉴, 杨前彪. 流体诱发水平悬臂输液管的内共振和模态转换(II)[J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(7): 825—832.

## Flow\_Induced Internal Resonances and Mode Exchange in Horizontal Cantilevered Pipe Conveying Fluid ( I )

XU Jian, YANG Qian\_biao

(School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China)

**Abstract:** The Newtonian method is employed to obtain nonlinear mathematical model of motion of a horizontally cantilevered and inflexible pipe conveying fluid. The order magnitudes of relevant physical parameters are analyzed qualitatively to establish a foundation on the further study of the model. The method of multiple scales is used to obtain eigenfunctions of the linear free\_vibration modes of the pipe. The boundary conditions yield the characteristic equations from which eigenvalues can be derived. It is found that flow velocity in the pipe may induced the 3:1, 2:1 and 1:1 internal resonances between the first and second modes such that the mechanism of flow\_induced internal resonances in the pipe under consideration is explained theoretically. The 3:1 internal resonance first occurs in the system and is, thus, the most important since it corresponds to the minimum critical velocity.

**Key words:** pipe conveying fluid; internal resonance; stability; bifurcation