

流体诱发水平悬臂输液管的 内共振和模态转换(II) *

徐 鉴, 杨前彪

(同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092)

(刘曾荣推荐)

摘要: 基于得到的水平悬臂输液管非线性动力学控制方程, 详细研究了由流速最小临界值诱发的 3:1 内共振. 通过观察内共振调谐参数、主共振调谐参数和外激励幅值的变化, 发现在内共振临界流速附近, 流速导致系统出现模态转换、鞍结分岔、Hopf 分岔、余维 2 分岔和倍周期分岔等非线性动力学行为. 对应的管道系统的周期运动失稳出现跳跃、颤振和更加复杂的动力学行为. 通过理论结果与数值模拟比较, 表明了理论分析的有效性和正确性.

关键词: 输液管; 内共振; 稳定性; 分岔

中图分类号: O322; U137.91 文献标识码: A

引 言

在 (I) 部分中, 运用牛顿法导出水平悬臂 Euler-Bernoulli 型输液管无量纲非线性动力学数学模型为^[1]

$$\begin{aligned} \ddot{y} + u^2 y'' + y'''' + 2u\beta^2 y \dot{y}' + \nu + f_1 \cos \Omega t + 2u\beta^2 y \dot{y}'^2 + u^2 y'' y'^2 + \\ y'''' y'^2 + 4y' y'' y''' + y''^3 - y'' \left[\int_x^1 \int_0^x (y \dot{y}'^2 + y' \dot{y}'') dx \right] + \\ \int_x^1 (2u\beta^2 y' \dot{y}' + u^2 y' y'') dx \Big] + y' \int_0^x (y \dot{y}'^2 + y' \dot{y}'') dx = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

通过对方程(1)量级的分析知道 $\dot{y} \sim O(\varepsilon)$, $2u\beta^2 y \dot{y}' \sim O(\varepsilon^3)$, 解可以设为 $y(x, t) = \varepsilon y_1(T_0, T_2) + \varepsilon^3 y_3(T_0, T_2) + \dots$. 应用多尺度方法^[2]得到

$$y_1(T_0, T_2, x) = A_1(T_2) \phi_1(x) e^{i\omega_1 T_0} + A_2(T_2) \phi_2(x) e^{i\omega_2 T_0} + cc, \quad (2)$$

其中 $D_n = \partial/\partial T_n, T_n = \varepsilon^n t \quad (n = 0, 2, 4, \dots)$,

$$\phi_j(x) = C_1 \cos \lambda_j x + C_2 \sin \lambda_j x + C_3 \operatorname{ch} \lambda_j x + C_4 \operatorname{sh} \lambda_j x, \quad (3)$$

而

$$\lambda_j^2 = (1/2)(u^4 + 4\omega_j^2)^{1/2} - (1/2)u^2, \quad \lambda_{2j}^2 = (1/2)(u^4 + 4\omega_j^2)^{1/2} + (1/2)u^2 \quad (4)$$

和 $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0, \phi_j(1) = \dot{\phi}_j(1) = 0$, 而 y_3 满足

* 收稿日期: 2004_05_25; 修订日期: 2006_03_01
 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472083); 国家自然科学基金(重点)资助项目(10532050)
 作者简介: 徐鉴(1961—), 男, 浙江人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86_21_65981138; Fax: + 86_21_65983267; E_mail: xujian@mail.tongji.edu.cn)

$$D_0^2 y_3 + u^2 y_3'' + y_3''' = -2D_0 D_2 y_1 - 2u\beta^2 D_0 y_1' - u^2 y_1' y_1'' - y_1'^2 y_1''' - 4y_1' y_1'' y_1''' - y_1'''^3 + f_1 \cos \Omega + y_1'' \int_x^1 \int_0^x [(D_0 y_1')^2 + y_1' D_0^2 y_1'] dx dx + y_1'' \int_x^1 u^2 y_1' y_1'' dx - y_1' \int_0^x [(D_0 y_1')^2 + y_1' D_0^2 y_1'] dx, \quad (5)$$

$$y_3(0, t) = y_3'(0, t), \quad y_3(1, t) = y_3'(1, t) = 0 \quad (6)$$

如果考虑第一阶和第二阶模态运动, 利用悬壁管的边界条件给出了特征值满足的特征方程, 可以发现当流速 $u_{c3} \approx 3.5435577$ 时, 第二阶模态频率和3倍第一阶模态频率相交, 即 $3\omega_1 = \omega_2$, 此时 $\omega_1 = 5.828086$, $\omega_2 = 17.484528$, 系统存在3:1内共振. 同样地, 当流速 $u_{c2} \approx 4.1245686$ 时, 第二阶模态频率和2倍第一阶模态频率相交, 即 $2\omega_1 = \omega_2$, 此时 $\omega_1 = 7.513992$, $\omega_2 = 15.027985$, 系统存在2:1内共振; 如果流速继续增加, 第一阶模态频率和第二阶模态频率在 $u_{c1} \approx 4.4778220$ 时重合, 此时 $\omega_1 = \omega_2 = 10.998198$, 系统存在1:1内共振. 这种流体通过诱发管道的内共振时失去稳定性的现象与过去许多学者^[3-14]发现的失去稳定现象有所不同, 因此有必要进行深入研究. 由于 $u_{c3} < u_{c2} < u_{c1}$, 因此, 随着管内流体速度的增加, 3:1内共振最先发生, 也是最重要的. 本文就是对3:1内共振的详细分析, 以探讨流体诱发管道内共振失去稳定性机理.

1 3:1内共振解及其稳定性、分岔

首先引入两个调谐参数分别为 σ_1 和 σ_2 , 使得

$$\omega_2 = 3\omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_1, \quad \Omega = \omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_2. \quad (7)$$

将(1)和(7)代入方程(5)得

$$D_0^2 y_3 + u^2 y_3'' + y_3''' = F_1(T_2, x) e^{i\omega_1 T_0} + F_2(T_2, x) e^{i\omega_2 T_0} + cc + NST, \quad (8)$$

其中

$$F_1(T_2, x) = -2i\omega_1(u_0\beta^2 A_1 \phi_1' + A_1' \phi_1) + h_{11}(x)A_1 A_1^2 + h_{12}(x)A_1 A_2 A_2 + g_{11}(x)A_2 A_1^2 e^{i\sigma_1 T_2} + (1/2)f_1 e^{i\sigma_2 T_2},$$

$$F_2(T_2, x) = -2i\omega_2(u_0\beta^2 A_2 \phi_2' + A_2' \phi_2) + h_{21}(x)A_1 A_1 A_2 + h_{22}(x)A_2 A_2 A_2 + g_{22}(x)A_1^3 e^{-i\sigma_1 T_2},$$

$h_{m,n}$ 和 $g_{m,n}$ 见附录. 如果取 $C_1 = -1$, $C_3 = 1$, 可得

$$C_2 = \Gamma_j = \frac{\lambda_{1j}^2 \cos \lambda_{1j} + \lambda_{2j}^2 \operatorname{ch} \lambda_{2j}}{\lambda_{1j}^2 \sin \lambda_{1j} + \lambda_{1j} \lambda_{2j} \operatorname{sh} \lambda_{2j}}, \quad C_4 = -\frac{\lambda_{1j}}{\lambda_{2j}} C_2,$$

则(3)变为

$$\phi_j(x) = \operatorname{ch} \lambda_{2j} x - \cos \lambda_{1j} x - \Gamma_j \left[\frac{\lambda_{1j}}{\lambda_{2j}} \operatorname{sh} \lambda_{2j} x - \operatorname{sh} \lambda_{1j} x \right]. \quad (9)$$

$\phi_j(x)$ 的自伴随函数

$$\psi_j(x) = k_j \left[\frac{u^2 \lambda_{2j} \operatorname{ch} \lambda_{2j} + \lambda_{2j}^3 \operatorname{ch} \lambda_{2j} - u^2 \lambda_{2j} \cos \lambda_{1j} + \lambda_{1j}^2 \lambda_{2j} \cos \lambda_{1j}}{u^2 \lambda_{2j} \operatorname{sh} \lambda_{2j} + \lambda_{2j}^3 \operatorname{sh} \lambda_{2j} + u^2 \lambda_{1j} \sin \lambda_{1j} - \lambda_{1j}^3 \sin \lambda_{1j}} \times (\cos \lambda_{1j} x - \operatorname{ch} \lambda_{2j} x) + \operatorname{sh} \lambda_{2j} x - \frac{\lambda_{2j}}{\lambda_{1j}} \sin \lambda_{1j} x \right], \quad (10)$$

满足 $\int_0^1 \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0$, ($m \neq n$), 而 k_j 为常数由方程 $\int_0^1 k_j \phi_j(x) \psi_j(x) dx = 1$ 确定. 利用可解性条件^[15] $\int_0^1 F_1(T_2, x) \phi_1(x) dx = 0$ 和 $\int_0^1 F_2(T_2, x) \phi_2(x) dx = 0$ 并设令 $A_k = \frac{1}{2} [p_k(T_2) - iq_k(T_2)] e^{i\omega_k(T_2)}$ ($k = 1, 2$), 则有

$$\begin{cases} p_1' = -\mu_1 p_1 - v_1 q_1 - \delta_1 [2p_1 q_1 p_2 - q_2 (p_1^2 - q_1^2)] + \\ \quad \gamma_{11} q_1 (p_1^2 + q_1^2) + \gamma_{12} q_1 (p_2^2 + q_2^2), \\ q_1' = -\mu_1 q_1 + v_1 p_1 - \delta_1 [2p_1 q_1 q_2 + p_2 (p_1^2 - q_1^2)] - \gamma_{11} p_1 (p_1^2 + q_1^2) - \\ \quad \gamma_{12} p_1 (p_2^2 + q_2^2) + f_1/2, \\ p_2' = -\mu_2 p_2 - v_2 q_2 + \delta_2 (3p_1^2 q_1 - q_1^3)] + \gamma_{21} q_2 (p_1^2 + q_1^2) + \gamma_{22} q_2 (p_2^2 + q_2^2), \\ q_2' = -\mu_2 q_2 + v_2 p_2 + \delta_2 (3p_1 q_1^2 - p_1^3)] - \gamma_{21} p_2 (p_1^2 + q_1^2) - \gamma_{22} p_2 (p_2^2 + q_2^2), \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu_m &= \int_0^1 u_0 \beta^2 \phi_m'(x) \phi_m(x) dx, \quad 8 \omega_m \gamma_{mn} = - \int_0^1 h_{mn}(x) \phi_m(x) dx, \quad m \neq n, \\ 8 \omega_m \delta_m &= - \int_0^1 b_m(x) \phi_m(x) dx, \quad 2 \omega_m \theta_{mn} = u_0 \int_0^1 \phi_m(x) \phi_n''(x) dx, \quad v_1 = \sigma_2, v_2 = 3\sigma_2 - \sigma_1, \end{aligned}$$

“'”表示对 T_2 的导数。

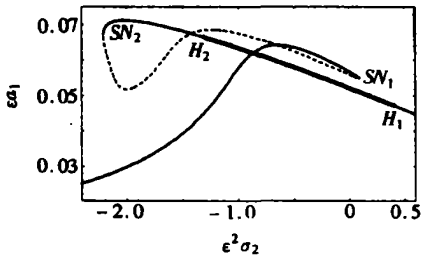
于是根据解的表达形式, 流体诱发的 3: 1 内共振和外干扰联合作用下得的一次近似解可以表示为

$$y(x, t) = \varepsilon [\phi_1(x) (p_1 \cos \Omega + q_1 \sin \Omega) + \phi_2(x) (p_2 \cos 3\Omega + q_2 \sin 3\Omega)], \quad (12)$$

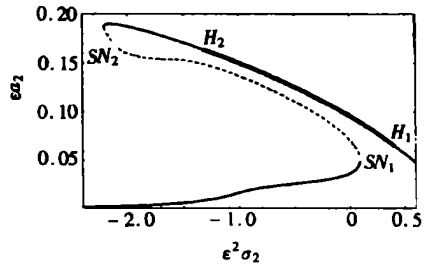
其中 p_1, q_1, p_2 和 q_2 由方程(11) 确定。方程(11) 的平衡解对应系统稳定的周期运动, 因此, 只要详细讨论方程(11) 平衡解的稳定性及分岔。为此, 取 $\varepsilon = 0.1, \beta = 0.31$, 并记 $a_1 = \sqrt{p_1^2 + q_1^2}, a_2 = \sqrt{p_2^2 + q_2^2}$ 分别表示应第一和第二模态周期运动振幅。

图 1(a) ~ 图 1(f) 表明固定外激励振幅而与流速有关的内共振调谐参数变化时, 系统的频振响应曲线, 实线表示稳定的平衡解, 虚线表示不稳定的平衡解, 粗实线表示不稳定的焦点, SN_j 代表鞍结分岔, H_j 代表 Hopf 分岔。当 σ_2 从小开始增大在到达 SN_2 ($\sigma_2 = -221.032153$) 前, 系统只有周期运动, 比较 2 个模态振幅的数值可以看出, 系统的能量主要集中在第一模态; 随着 σ_2 穿过 SN_2 (或 $\sigma_2 > -221.032153$) 在到达 H_2 前, 系统有 2 个共存的周期运动。对于小的分支, 第一阶模态振幅先增加后减小, 但第二阶模态振幅总是增加在 σ_2 到达 SN_1 ($\sigma_2 = 9.643889$) 之前, 这个过程表明能量逐步传递给第二阶模态。随着 σ_2 继续增加穿过 SN_1 , 对于 $\varepsilon^2 \sigma_1 = -0.15$ 和 $\varepsilon^2 \sigma_1 = 0$ (参看图 1(a) ~ 图 1(d)), 周期运动跳跃到复杂的运动上, 而对于 $\varepsilon^2 \sigma_1 = 0.15$ (图 1(e)、图 1(f)), 周期运动跳跃到另外的一个周期运动, 这时主要的能量在第二模态上, 说明模态之间的能量交换完成; 对于大的分支, 第二阶模态的振幅大于第一阶, 系统主要的能量来源于第二阶模态, 这是系统出现内共振所致, 这样的现象完全不同于线性振动。当 σ_2 增加穿过 H_2 ($\sigma_2 = -131.296652$) 时, 周期运动通过 Hopf 分岔失去稳定性使系统运动成为概周期或更复杂, 需要进一步研究。这样的运动伴随着 σ_2 穿过 H_1 ($\sigma_2 = 40.689144$) 又可以回到周期运。从图中可以看出在不同的 $\varepsilon^2 \sigma_2$ 区间上, 系统的动力学行为发生定性变化, 特别是当 $\varepsilon^2 \sigma_2$ 在 H_2 与 H_1 之间, 系统可能出现复杂的动力学行为。类似的可以分析 σ_2 从大减小的过程。

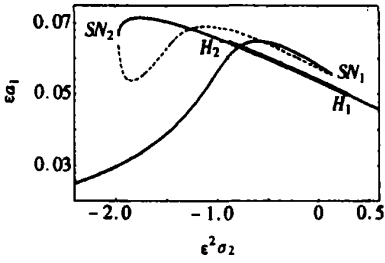
固定与流速有关的内共振调节参数而将外激励振幅作为可变参数, 可以观察外激励摄动对系统的影响, 如图 2 所示, 其中粗实线为 H_2 点组成的 Hopf 分岔边界, 细实线为 H_1 点组成的 Hopf 分岔边界, 点画线为鞍结分岔 SN_1 , O 为余维 2 分岔点, 对应的是 $f_1 = 110.910767, \sigma_2 = 8.130791$ 。Hopf 分岔和鞍结分岔边界把 $\varepsilon^2 \sigma_1 - \varepsilon^3 f_1$ 参数平面分岔平面分成 4 个区域。从图上可以看出, 随着 f_1 的减小, 2 个 Hopf 分岔之间的间隔 H_1, H_2 以及 2 个鞍结分岔 SN_1 与 SN_2 之间的距离变的越来越小。当 $\varepsilon^3 f_1 = 0.09$ 时, 2 个 Hopf 分岔已完全消失, 这意味着 Hopf 分岔和鞍结分岔的强烈地依赖于外激励 f_1 的取值。在 0.15 与 0.09 之间存在着关于 $\varepsilon^3 f_1$ 的临界值,



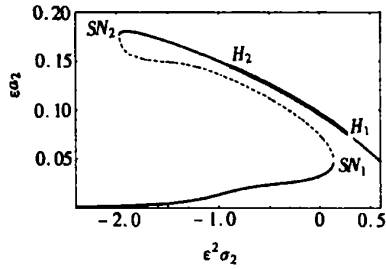
(a) $\varepsilon^3 f_1 = 0.125, \varepsilon \beta = 0.31, \varepsilon^2 \sigma_1 = -0.15$



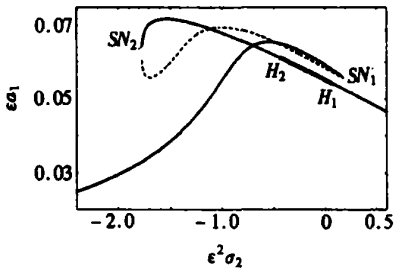
(b) $\varepsilon^3 f_1 = 0.125, \varepsilon \beta = 0.31, \varepsilon^2 \sigma_1 = -0.15$



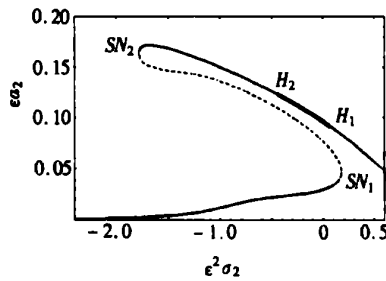
(c) $\varepsilon^3 f_1 = 0.125, \varepsilon \beta = 0.31, \varepsilon^2 \sigma_1 = 0$



(d) $\varepsilon^3 f_1 = 0.125, \varepsilon \beta = 0.31, \varepsilon^2 \sigma_1 = 0$



(e) $\varepsilon^3 f_1 = 0.125, \varepsilon \beta = 0.31, \varepsilon^2 \sigma_1 = 0.15$



(f) $\varepsilon^3 f_1 = 0.125, \varepsilon \beta = 0.31, \varepsilon^2 \sigma_1 = 0.15$

图 1 系统第一和第二模态频幅响应, 其中外激励振幅被取定

使鞍结分岔 SN_1 和 Hopf 分岔 H_1 同时出现, 即系统存在着与 σ_1 和 f_1 有关的余维 2 分岔。更进一步, 鞍型平衡曲线和其他 2 个稳定平衡曲线的交点(参看图 1(a))组成的边界又把区域 ③ 成 3 个部分(参看 在图 2 中的 I, II, III)。由分岔理论知道, 在每个区域中, 方程(11)的平衡解具有相同的稳定性, 即: 在区域 ① 中, 系统仅有 1 个稳定的平衡解; 在区域 ② 中, 系统只有 1 个不稳定的焦点; 在区域 ③ 中, 系统存在 1 个稳定的平衡解、1 个不稳定的鞍型平衡解和 1 个不稳定的焦点。在区域 ④ 中, $\varepsilon^2 \sigma_2 < H_2$, 系统具有 2 个稳定的平衡解和 1 个不稳定的鞍型平衡解。

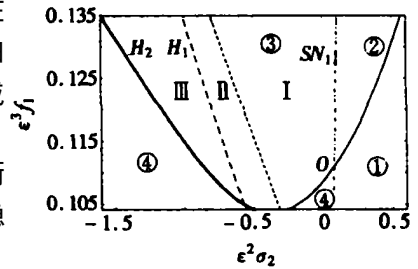


图 2 方程(11)平衡解分岔集

2 数值模拟

本节应用 Runge_Kutta 方法对图 2 中各个参数区域进行数值模拟, 来验证上述理论分析结果的正确性, 结果被表明在图 3, 其中的参数同图 2•

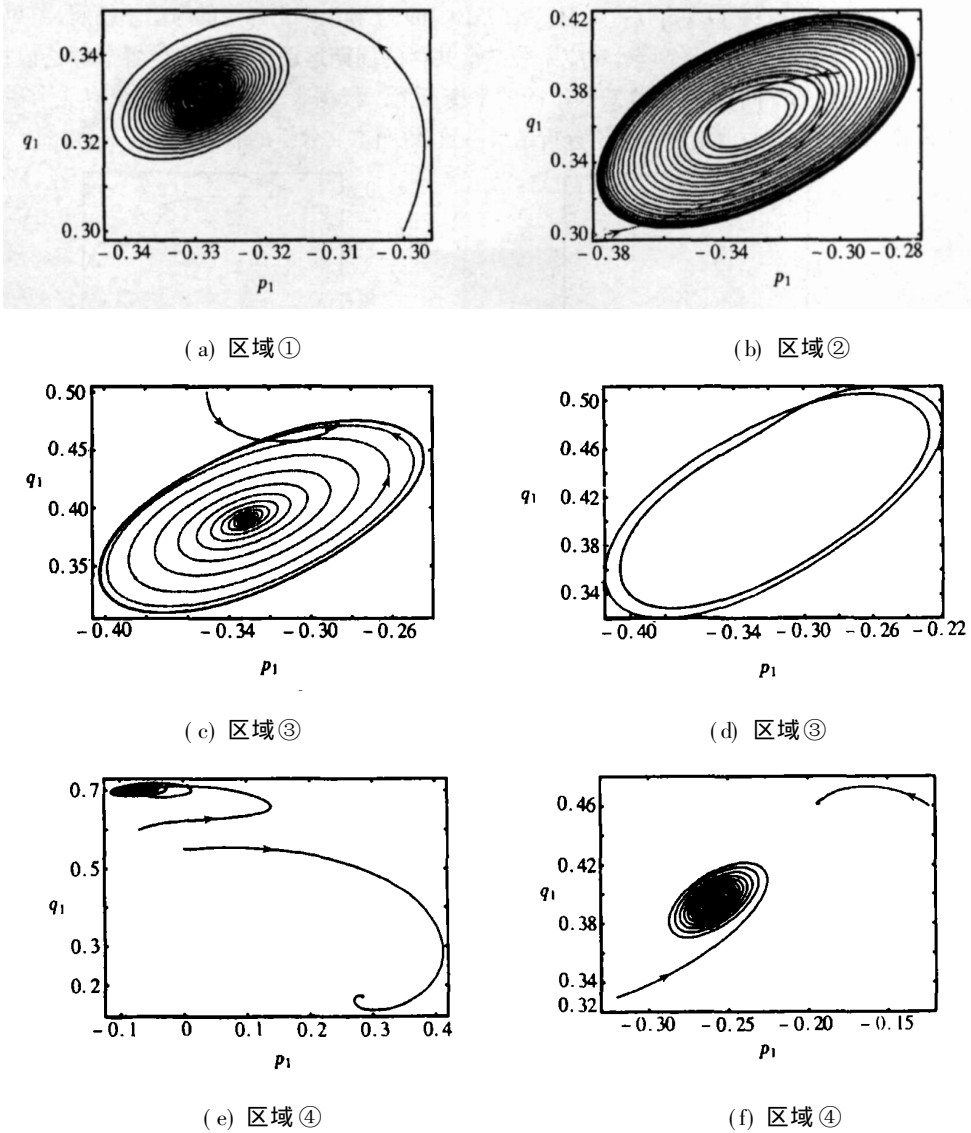
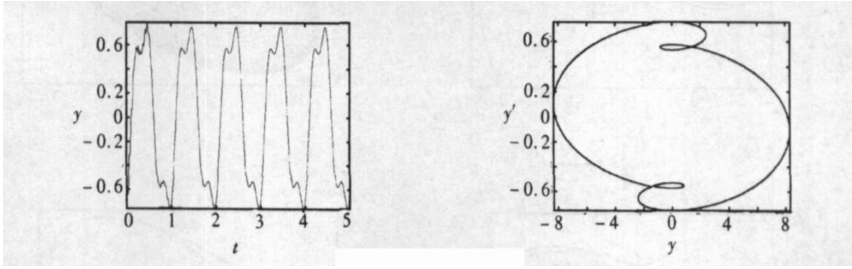


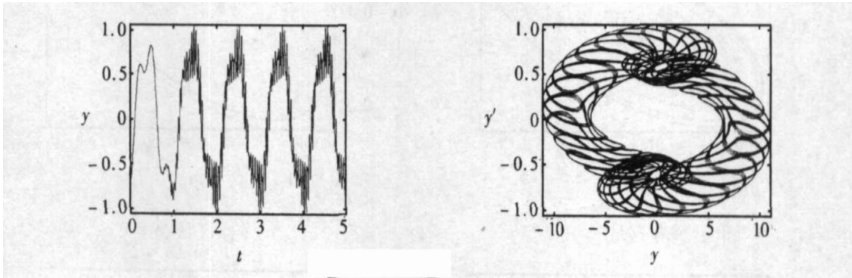
图 3 对图 2 各个分岔集的数值模拟

图 3(a) 模拟图 2 区域 ① 这时的参数 $\varepsilon^3 f_1 = 0.125$, $\varepsilon^2 \sigma_2 = 0.45$ • 数值结果得到方程(11) 仅有 1 个稳定的平衡解 $(p_1, q_1) = (-0.3288, 0.3308)$, 通过(12) 可知原系统存在 3: 1 共振解 (参看图 4(a))• 在区域 ② 中, 取 $\varepsilon^3 f_1 = 0.125$, $\varepsilon^2 \sigma_2 = 0.25$, 可得到 1 个不稳定的焦点 $(p_1, q_1) = (-0.3312, 0.3626)$ 且收敛到 1 个稳定的极限环(参看图 3(b))• 图 3(c) 和图 3(d) 分别取 $\varepsilon^2 \sigma_2 = 0.08$ 和 $\varepsilon^2 \sigma_2 = -0.05$, 而 $\varepsilon^3 f_1 = 0.125$ • 数值计算得到方程(11) 有 1 个不稳定的焦点 $(p_1, q_1) = (-0.3311, 0.3903)$ 、1 个稳定的平衡解 $(p_1, q_1) = (-0.2871, 0.4726)$ 和 1 个不稳定的鞍型平衡解 $(p_1, q_1) = (-0.0345, 0.508)$, 它收敛到稳定的平衡解• 当 $\varepsilon^2 \sigma_2 = 0.08$ 时,

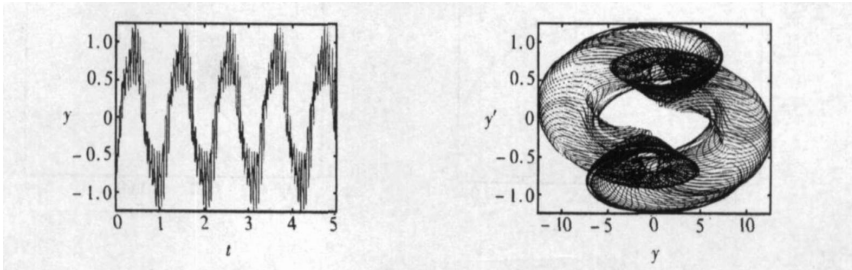
不稳定的焦点收敛到稳定的极限环, 而 $\varepsilon^2 \sigma_2 = -0.05$ 时, 收敛到倍周期极限环, 对应的管道悬臂端的呈现出概周期运动或更加复杂的运动行为(参看图 4(b) 和图 4(c)), 而不稳定的平衡解收敛到稳定的平衡解, 对应的系统出现从 1 个周期运动跳跃到另 1 个周期运动。系统的这两种运动形式依赖于系统的初始条件。在区域 ④中, 取 $\varepsilon^2 \sigma_2 = -1.8$, 得到 2 个稳定的平衡解 $(p_1, q_1) = (-0.0799, 0.6991)$ 、 $(p_1, q_1) = (0.28275, 0.1693)$ 和 1 个不稳定的鞍型平衡解, 图 3(e) 所示, 相平面上有 2 个稳定的平衡点, 对应系统 2 个共存的周期运动。平衡点位置与理论值相符, 并随着初始条件的不同, 轨线会收敛到不同的平衡点上。根据表达式 (12) 原系统有 2 个稳定的周期解共存。图 3 的数值结果与理论分析结果一致, 说明本文分析的有效性和正确性。



(a) 周期运动



(b) 概周期运动



(c) 复杂运动

图 4 管悬臂端的振动的历程和相平面

最后, 应用解析解的表达形式 (12) 观察对应于图 3(a)、图 3(b) 和图 3(c) 输液管自由端的动力学行为。时间历程和相平面图被画在图 4(a)、图 4(b) 和图 4(c), 其中 $\phi_1(1) = 16.027146$, $\phi_2(1) = -3.140719$ 。图 4(a)~图 4(c) 有助于直观的理解悬臂输液管运动规律, 图 4(a) 表明悬臂输液管自由端 3 s 内共振解是周期的, 图 4(b) 显示伴有自由端颤振的概周期运动, 表明管道的悬臂端宏观上仍然是周期运动, 但局部伴有颤振, 而图 4(c) 表明颤振的加剧和更加复杂。

3 结 论

基于文献[1]建立的水平悬臂输液管非线性动力学控制方程,详细研究了由流速最小临界值诱发的3:1内共振。随着内共振、主共振和外激励扰动振幅的变化,当流速在临界值附近变化时,观察到一些非线性动力学行为,如模态转换、鞍结分岔、Hopf分岔、余维2分岔。系统的周期运动通过跳跃、颤振或更复杂的形式失去稳定性。从理论上解释了流速诱发水平悬臂输液管系统内共振、颤振、模态转化的机理,并通过数值模拟,结果表明了理论分析的正确性。

附 录

方程(8)的系数计算公式

$$\begin{aligned}
 h_{11} &= 2\omega_1^2 \phi_1'(x) \int_0^x \phi_1'(x)^2 dx - 2\omega_1^2 \phi_1''(x) \int_x^1 \int_0^x \phi_1'(x)^2 dx dx + \frac{3}{2} u^2 \phi_1'(1)^2 \phi_1''(x) - \\
 &\quad \frac{9}{2} [u^2 \phi_1'(x)]^2 \phi_1''(x) - 3\phi_1''(x)^3 - 12\phi_1'(x) \phi_1''(x) \phi_1'''(x) - 3\phi_1'(x)^2 \phi_1^{(4)}(x), \\
 h_{12} &= 2\omega_1^2 \phi_2'(x) \int_0^x \phi_1'(x) \phi_2'(x) dx + 2\omega_2^2 \phi_1'(x) \int_0^x \phi_1'(x) \phi_2'(x) dx - \\
 &\quad 2\omega_2^2 \phi_2''(x) \int_x^1 \int_0^x \phi_1'(x) \phi_2'(x) dx dx - 2\omega_1^2 \phi_2''(x) \int_x^1 \int_0^x \phi_1'(x) \phi_2'(x) dx dx + \\
 &\quad u^2 \phi_2'(1) \phi_1''(x) - 3u^2 \phi_2''(x)^2 \omega_1^2 \phi_1''(x) + 2u^2 \phi_1'(1) \phi_2'(1) \phi_2''(x) - 6\phi_1'(x)^2 \phi_2'(x) \phi_2''(x) - \\
 &\quad 6\phi_1'(x) \phi_2''(x)^2 - 8\phi_2''(x) \phi_2''(x) \phi_2'''(x) - 8\phi_2''(x) \phi_1''(x) \phi_2'''(x) - 8\phi_1'(x) \phi_2''(x) \phi_2'''(x) - \\
 &\quad 2\phi_2''(x)^2 \phi_1'''(x) - 4\phi_1'(x) \phi_2''(x) \phi_2'''(x), \\
 h_{21} &= 2\omega_1^2 \phi_1'(x) \int_0^x \phi_1'(x) \phi_2'(x) dx + 2\omega_2^2 \phi_1'(x) \int_0^x \phi_1'(x) \phi_2'(x) dx - \\
 &\quad 2\omega_2^2 \phi_1''(x) \int_x^1 \int_0^x \phi_1'(x) \phi_2'(x) dx dx - 2\omega_1^2 \phi_1''(x) \int_x^1 \int_0^x \phi_1'(x) \phi_2'(x) dx dx + \\
 &\quad 2u^2 \phi_1'(1) \phi_2'(1) \phi_1''(x) - 6u^2 \phi_1'(x) \phi_2'(x) \phi_1''(x) + u^2 \phi_1'(1)^2 \phi_2''(x) - 3u^2 \phi_1'(x)^2 \phi_2''(x) - \\
 &\quad 6\phi_1'(x)^2 \phi_2''(x) - 8\phi_2''(x) \phi_1''(x) \phi_1'''(x) - 8\phi_1'(x) \phi_2''(x) \phi_1'''(x) - 8\phi_1'(x) \phi_1''(x) \phi_2'''(x) - \\
 &\quad 4\phi_1'(x) \phi_2''(x) \phi_1^{(4)}(x) - 2\phi_1'(x)^2 \phi_2^{(4)}(x), \\
 h_{22} &= 2\omega_2^2 \phi_2'(x) \int_0^x \phi_2'(x)^2 dx - 2\omega_2^2 \phi_2''(x) \int_x^1 \int_0^x \phi_2'(x)^2 dx dx + \frac{3}{2} u^2 \phi_2'(1)^2 \phi_2''(x) - \\
 &\quad \frac{9}{2} u^2 \phi_2''(x)^2 \phi_2'''(x) - 3\phi_2''(x)^3 - 12\phi_2'(x) \phi_2''(x) \phi_2'''(x) - 3\phi_2''(x)^2 \phi_2^{(4)}(x), \\
 g_{11} &= 2\omega_1^2 \phi_2'(x) \int_0^x \phi_1'(x)^2 dx + u^2 \phi_1'(1) \phi_2'(1) \phi_1''(x) - 3u^2 \phi_1'(x) \phi_2'(x) \phi_1''(x) + \\
 &\quad (\omega_1 - \omega_2)^2 [\phi_1'(x) \int_0^x \phi_1'(x) \phi_2'(x) dx - \phi_1''(x) \int_x^1 \int_0^x \phi_1'(x) \phi_2'(x) dx dx] - \\
 &\quad 2\omega_1^2 \phi_2''(x) \int_x^1 \int_0^x \phi_1'(x)^2 dx dx + \frac{1}{2} u^2 \phi_1'(1)^2 \phi_2''(x) - \frac{3}{2} u^2 \phi_1'(x)^2 \phi_2''(x) - \\
 &\quad 3\phi_1''(x)^2 \phi_2''(x) - 4\phi_2''(x) \phi_1''(x) \phi_1'''(x) - 4\phi_1'(x) \phi_2''(x) \phi_1'''(x) - \\
 &\quad 4\phi_1'(x) \phi_1''(x) \phi_2'''(x) - 2\phi_1'(x) \phi_2''(x) \phi_1^{(4)}(x) - \phi_1'(x)^2 \phi_2^{(4)}(x), \\
 g_{22} &= 2\omega_1^2 \phi_1'(x) \int_0^x \phi_1'(x)^2 dx - 2\omega_1^2 \phi_1''(x) \int_x^1 \int_0^x \phi_1'(x)^2 dx dx + \frac{1}{2} u^2 \phi_1'(1)^2 \phi_1''(x) - \\
 &\quad \frac{3}{2} u^2 \phi_1''(x)^2 \phi_1'''(x) - \phi_1''(x)^3 - 4\phi_1'(x) \phi_1''(x) \phi_1'''(x) - \phi_1'(x)^2 \phi_1^{(4)}(x).
 \end{aligned}$$

[参 考 文 献]

[1] 徐鉴,杨前彪. 流体诱发水平悬臂输液管的内共振和模态转换(I)[J]. 应用数学和力学, 2006, 27(7): 819—824.

- [2] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillations [M]. New York: Wiley, 1979, 444—544.
- [3] Long R H. Experimental and theoretical study of transverse vibration of a tube containing flowing fluid[J]. Journal of Applied Mechanics, 1955, **77**(1): 65—68.
- [4] Handelman G H. A note on the transverse vibration of a tube containing flowing fluid[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1955, **13**(3): 326—330.
- [5] Naguleswaran S, Williams C J H. Lateral vibrations of a pipe conveying a fluid[J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 1968, **10**(2): 228—238.
- [6] Stein R A, Torbiner W M. Vibrations of pipes containing flowing fluids[J]. Journal of Applied Mechanics, 1970, **37**(6): 906—916.
- [7] Paddoussis M P, Laithier B E. Dynamics of Timoshenko beams conveying fluid[J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 1976, **18**(2): 210—220.
- [8] Paddoussis M P, Lu T P, Laithier B E. Dynamics of finite_length tubular beams conveying fluid[J]. Journal of Sound and Vibration, 1986, **106**(2): 311—331.
- [9] Lee U, Pak C H, Hong S C. The dynamics of piping system with internal unsteady flow[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, **180**(2): 297—311.
- [10] Holmes P J. Bifurcations to divergence and flutter in flow_induced oscillations: a finite_dimensional analysis[J]. Journal of Sound and Vibration, 1977, **53**(4): 471—503.
- [11] Rousselet J, Hermann G. Dynamic behaviour of continuous cantilevered pipes conveying fluid near critical velocities[J]. Journal of Applied Mechanics, 1981, **48**(6): 943—947.
- [12] Paddoussis M P, Li G X. Pipes conveying fluid: a model dynamical problem[J]. Journal of Fluid and Structures, 1993, **7**(2): 137—204.
- [13] Semler C, Li X, Paddoussis M P. The non_linear equations of motion of pipes conveying fluid[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, **169**(3): 577—599.
- [14] Paddoussis M P. Fluid_Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow [M]. San Diego: Academic Press, 1998, 415—430.
- [15] XU Jian, CHUANG Kwow_wai, CHAN Henry Shui_ying. Co_dimension 2 bifurcation and chaos in cantilevered pipe conveying time varying fluid with three_to_one in internal resonances[J]. Acta Mechanica Sinica, 2003, **6**(3): 245—255.

Flow_Induced Internal Resonances and Mode Exchange in Horizontal Cantilevered Pipe Conveying Fluid(II)

XU Jian, YANG Qian_biao

(School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China)

Abstract: Based on the nonlinear mathematical model of motion of a horizontally cantilevered rigid pipe conveying fluid, the 3 1 internal resonance induced by the minimum critical velocity is studied in details. With the detuning parameters of internal and primary resonances and the amplitude of the external disturbing excitation varying, the flow in the neighborhood of the critical flow velocity yields that some nonlinearly dynamical behaviors occur in the system such as mode exchange, saddle_node, Hopf and co_dimension 2 bifurcations. Correspondingly, the periodic motion loses its stability by jumping or flutter, and more complicated motions occur in the pipe under consideration. The good agreement between the analytical analysis and the numerical simulation for several parameters ensures the validity and accuracy of the present analysis.

Key words: pipe conveying fluid; internal resonance; stability; bifurcation