应用数学和力学, 第 27 卷 第 7 期
2006 年 7 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 27, No. 7, Jul. 15, 2006

文章编号: 1000_0887(2006) 07_0852_07



# 具材料阻尼的非线性双曲型方程整体解的不存在性*

宋长明[1,2]

(1. 上海交通大学 数学系, 上海 200240;
2. 中原工学院 数学系, 郑州 450007)

(戴世强推荐)

摘要: 考虑了一类具材料阻尼的非线性双曲型方程初边值问题整体解的不存在性• 分别采用能量方法、Jensen 不等式和凹性方法证明了该问题整体解的不存在性定理• 作为主要结果的应用, 给出了 3 个例子•

关 键 词: 整体解的不存在性; 初边值问题; 双曲型方程; 材料阻尼
中图分类号: O177.92 文献标识码: A

## 引 言

本文考虑下面一类具材料阻尼的非线性双曲型方程初边值问题

$$u_{tt} + k_1\Delta^2 u + k_2\Delta^2 u_t + \Delta g(\Delta u) = 0, \qquad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \tag{1}$$

$$u\mid_{\partial\Omega} = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \qquad t > 0, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \ u_t(x, 0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

整体解的不存在性, 其中 $u$ 表示形变, $\Delta$ 是 Laplace 算子, $k_2\Delta^2 u_t$ 表示强材料阻尼, $g(s)$ 是一个已知的非线性函数, $\Omega$ 是 $R^N$ 中具光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}$ 表示沿 $\partial\Omega$ 的外法线方向的方向导数, $k_1$、$k_2$ 是两个正常数•

方程(1) 是用来描述 neo_Hookean 弹性杆运动的变分形式模型, 更详细的物理解释可参阅文献[1]• 近年来, 形如(1) 的方程已经引起了许多数学家和物理学家的关注, 关于问题(1) ~ (3) 解的适定性和解的衰减性质有许多工作, 可参见文献[1] ~ 文献[5], 在文献[1] 中, 作者在关于非线性函数 $g(s)$ 满足 $| g(x) | \leqslant c_1 | x | + c_2$, $g'(x) \geqslant -a$, 及 $-(1/2)(k_1 + k_2 - \varepsilon) | x |^2 - c_1 \leqslant G(x) \leqslant c_2 | x |^2 + c_3$ 的假定下, 利用半群方法证明了整体弱解的存在性, 其中 $a$, $c_i(i = 1, 2, 3)$ 和 $c_i(i = 1, 2)$ 是正常数, $G(x) = \int_0^x g(s)\mathrm{d}s$, $0 \leqslant \varepsilon < k_1 + k_2$• 然而, 如果关于 $g(s)$

---

* 收稿日期: 2004_06_30; 修订日期: 2006_03_07
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371073, 10572156); 河南省自然科学基金资助项目(0611050500)
作者简介: 宋长明(1965—), 男, 河南郑州人, 教授, 博士(Tel: + 86_371_67433308; E_mail: cmsongh@163.com)•

的假设不成立, 问题(1) ~ 问题(3) 是否还存在整体解?本文, 在 $g(s)$ 不满足上述条件的前提下, 致力于寻找引起整体解不存在的充分条件• 我们分别利用能量方法、Jensen 不等式和凹性方法证明了问题(1)~ 问题(3) 的任何弱解在一定条件下都不是整体的, 作为这些结果的应用, 我们给出了整体解不存在的 3 个例子•

# 1 主要结果的陈述

首先介绍一些简写的符号: $L_p = L_p(\Omega)$, $W_0^{m,p} = W_0^{m,p}(\Omega)$, $H^2 = H^2(\Omega)$, $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p}$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2}$, $(\cdot,\cdot)$ 表示 $L_2$ 中的内积, 对任意的 $p > 1$, $p' = p/(p-1)$•

现叙述本文的主要结果

**定理 1** 假设

(i) $g(s) \in C(\mathbf{R})$, $g(s)s \leqslant kG(s) \leqslant k\alpha|s|^m$, $2 < m \leqslant 4$, $s \in \mathbf{R}$, 其中 $k > 2$, $\alpha > 0$ 是实数, $G(s) = \int_0^s g(\tau)\mathrm{d}\tau$•

(ii) $u_0 \in W_0^{2,m}$, $u_1 \in L_2$ 使得

$$E(0) = \frac{1}{2}\|u_1\|^2 + \frac{1}{2}k_1\|\Delta u_0\|^2 + \int_\Omega\int_0^{\Delta u_0} g(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x < 0•$$

则问题(1)~ 问题(3) 的任何弱解 $u(x,t)$ 都不是整体的, 即存在一个 $T(>0)$ 使得 $\|u_t(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2 \to +\infty$, $t \to T^-$ •

假设 $\lambda_1$ 和 $\varphi_1(x)$ 分别是特征值问题 $-\Delta\varphi = \lambda\varphi$, $x \in \Omega$, $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ 的第一特征值和相应的特征函数, 我们可取 $\lambda_1 > 0$ 和 $\varphi_1(x)$ 使得

$$\varphi_1(x) > 0,\quad x \in \Omega,\ \int_\Omega \varphi_1(x)\mathrm{d}x = 1•$$

**定理 2** 假设

(i) $y_0 = \int_\Omega u_0(x)\varphi_1(x)\mathrm{d}x > 0$, $y_1 = \int_\Omega u_1(x)\varphi_1(x)\mathrm{d}x > 0$•

(ii) $g(s) \in C^2(\mathbf{R})$ 是一个凸的偶函数且满足 $g(0) = 0$, $g(s) \geqslant k_1 s$, 对任意的 $s \geqslant y_0 > 0$; $b = k_2\lambda_1^2\int_{y_0}^{+\infty}\left\{\int_{y_0}^s[\lambda_1 g(\lambda_1\tau) - k_1\lambda_1^2\tau]\mathrm{d}\tau + y_1^2\right\}^{-1/2}\mathrm{d}s < 1$•

则问题(1)~ 问题(3) 的任何弱解 $u(x,t)$ 不是整体的, 即存在一个 $T > 0$ 使得当 $t \to T^-$ 时, $\|u(t)\| \to +\infty$•

**定理 3** 假设

(i) $g(s) \in C(\mathbf{R})$, $u_0 \in H_0^2$, $u_1 \in L_2$, $\Gamma(s) = \int_0^s g(\tau)\mathrm{d}\tau$, $\Gamma(\Delta u_0) \in L_1$•

(ii) 存在一个常数 $\mu > 0$ 使得 $sg(s) \leqslant 2(1+2\mu)\Gamma(s)$, $s \in \mathbf{R}$•

(iii) $A(0) = \|u_1\|^2 + k_1\|\Delta u_0\|^2 + 2\int_\Omega\int_0^{\Delta u_0} g(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x < 0$•

则问题(1)~ 问题(3) 的任何弱解 $u(x,t)$ 都不是整体的, 即存在一个 $t_1 > 0$ 使得

$$\|u(t)\|^2 + k_2\int_0^t\|\Delta u(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau \to \infty,\qquad t \to t_1•$$

# 2 定理 1 的证明

我们采用能量方法来证明

证明 方程(1)的两边与 $u_t$ 作内积,得到

$$\dot{E}(t) + k_2 \|\Delta u_t(t)\|^2 = 0,\quad E(t) \leqslant E(0) < 0,\qquad t \geqslant 0, \tag{4}$$

其中 $\cdot = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}k_1\|\Delta u(t)\|^2 + \int_\Omega\int_0^{\Delta u} g(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x,\qquad t \geqslant 0. \tag{5}$$

令

$$F(t) = \|u(t)\|^2 + k_2\int_0^t \|\Delta u(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau. \tag{6}$$

则

$$\dot{F}(t) = 2(u, u_t) + k_2\|\Delta u(t)\|^2, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\ddot{F}(t) &= 2[(u, u_{tt}) + \|u_t(t)\|^2 + k_2(\Delta u, \Delta u_t)] \geqslant \\ &\quad 2\left[\|u_t(t)\|^2 - k_1\|\Delta u(t)\|^2 - k\int_\Omega\int_0^{\Delta u} g(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x\right] \geqslant \\ &\quad 2[2\|u_t(t)\|^2 + (k-2)\alpha\|\Delta u(t)\|_m^m - 2E(0)],\qquad t \geqslant 0,\end{aligned} \tag{8}$$

(8)式两边在 $(0, t)$ 上积分,有

$$\dot{F}(t) \geqslant 2(k-2)\alpha\int_0^t \|\Delta u(\tau)\|_m^m\mathrm{d}\tau - 4E(0)t + \dot{F}(0), \tag{9}$$

于是

$$\begin{aligned}\ddot{F}(t) + \dot{F}(t) &\geqslant 4\|u_t(t)\|^2 + 2(k-2)\alpha\left(\|\Delta u(t)\|_m^m + \int_0^t \|\Delta u(\tau)\|_m^m\mathrm{d}\tau\right) - \\ &\quad 4E(0)(1+t) + \dot{F}(0) = H(t),\qquad t > 0.\end{aligned} \tag{10}$$

取 $p = (m+2)/2$, 由 Young 不等式、嵌入定理以及 Poincaré 不等式,得到

$$\begin{aligned}|(u, u_t)| &\leqslant \frac{1}{p}\|u(t)\|_p^p + \frac{1}{p'}\|u_t(t)\|_{p}^{p'} \leqslant \\ &\quad C_1[(\|\Delta u(t)\|_m^m)^\beta + (\|u_t(t)\|^2)^\beta],\\ |(u, u_t)|^{1/\beta} &\leqslant C_2(\|\Delta u(t)\|_m^m + \|u_t(t)\|^2),\qquad t > 0,\end{aligned} \tag{11}$$

其中我们用 $C_i(i \geqslant 1)$ 表示不依赖 $t$ 的正常数, $\beta = (m+2)/2m < 1$. 由 Hölder 不等式,可得

$$\|\Delta u(t)\|_m^m \geqslant C_3(\|\Delta u(t)\|^2)^{m/2}, \tag{12}$$

$$\int_0^t \|\Delta u(\tau)\|_m^m\mathrm{d}\tau \geqslant C_4 t^{(2-m)/2}\left(\int_0^t \|\Delta u(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau\right)^{m/2},\qquad t > 0. \tag{13}$$

将(11)式~(13)式代入(10)式推得

$$\begin{aligned}H(t) &\geqslant C_5\left[|(u, u_t)|^{1/\beta} + (\|\Delta u(t)\|^2)^{m/2} + t^{(2-m)/2}\left(\int_0^t \|\Delta u(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau\right)^{m/2}\right] - \\ &\quad 4E(0)t + \dot{F}(0) \geqslant \\ &\quad C_6 t^{(2-m)/2}\left[|(u, u_t)|^\gamma + (\|\Delta u(t)\|^2)^\gamma + \left(\int_0^t \|\Delta u(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau\right)^\gamma\right] - \\ &\quad 4E(0)t + \dot{F}(0) - C_6 t^{(2-m)/2},\qquad t \geqslant 1,\end{aligned} \tag{14}$$

其中我们用到了 $\gamma = \min\left\{\gamma_1, \gamma_2\right\} > 1$, $\gamma_1 = 2m/(m+2)$, 以及不等式 $|a|^\gamma \leqslant |a|^{\gamma_i} + 1\ (i = 1, 2)$. 因为 $-4E(0)t + \dot{F}(0) - C_6 t^{(2-m)/2} \to +\infty$ 当 $t \to +\infty$, 所以必存在一个 $t_0 \geqslant 1$ 使得

$$-4E(0)t + \dot{F}(0) - C_6 t^{(2-m)/2} \geqslant 0,\qquad t \geqslant t_0. \tag{15}$$

再令

$$y(t) = \dot{F}(t) + F(t).$$

从(6)式、(9)式和(15)式可以看到 $y(t)>0$ 当 $t\geqslant t_0$. 注意到

$$(a_1+\cdots+a_N)^n\leqslant 2^{(n-1)(N-1)}(a_1^n+\cdots+a_N^n),$$

其中 $a_i\geqslant 0(i=1,\cdots,N)$ 以及 $n>1$ 是实数, 由(14)式、(15)式和(6)式, 从(7)式可得

$$H(t)\geqslant C_6t^{(2-m)/2}y^{\gamma}(t),\qquad t\geqslant t_0. \tag{16}$$

由此及(10)式得到

$$\dot{y}(t)\geqslant C_6t^{(2-m)/2}y^{\gamma}(t),\qquad t\geqslant t_0. \tag{17}$$

据(17)式, 我们有

$$t\leqslant T=\begin{cases}\left[t_0^{(4-m)/2}+\dfrac{4-m}{2C_6(\gamma-1)y^{\gamma-1}(t_0)}\right]^{2/(4-m)}, & 2<m<4,\\ t_0\exp\dfrac{1}{C_6(\gamma-1)y^{\gamma-1}(t_0)}, & m=4,\end{cases}$$

且 $y(t)\to+\infty$ 当 $t\to T^-$. 因为, 当 $t\to T^-$ 时,

$$2\|u(t)\|^2+\|u_t(t)\|^2+k_2\|\Delta u(t)\|^2+k_2\int_0^t\|\Delta u(\tau)\|^2d\tau\geqslant$$
$$\dot{F}(t)+F(t)\to+\infty,$$

所以, 当 $t\to T^-$ 时, $\|u_t(t)\|+\|\Delta u(t)\|\to+\infty$. 定理1证毕.

例1 上述中, 取 $\boldsymbol{R}^N=\mathbf{R}$, $\Omega=[0,1]$, $g(s)=a|s|^{m-2}s(a<0,\ 2<m\leqslant 4)$, $u(x,0)=10\sin\pi x$, $u_t(x,0)=10$, $x\in[0,1]$, 再取 $k=m$, $\alpha=-a/m$. 显然有, $g(s)\in C(\mathbf{R})$, $g(s)s=k\int_0^s g(\tau)\mathrm{d}\tau=-k\alpha|s|^m$, $s\in\mathbf{R}$.

$$E(0)=\frac{1}{2}(\|u_1\|^2+k_1\|u_{0xx}\|^2)+\frac{a}{m}\int_0^1|u_{0xx}|^m\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{2}\left(\int_0^1 10^2\mathrm{d}x+k_1\int_0^1 100\pi^4\sin^2\pi x\,\mathrm{d}x\right)+\frac{a}{m}\int_0^1 10^m\pi^{2m}\sin^m\pi x\,\mathrm{d}x,$$

特别地, 取 $k_1=1$, $a=-1$, $m=3$, 显然有 $E(0)<0$. 因此, 由定理1, 必存在一个 $T(>0)$ 使得 $\|u_t(t)\|^2+\|u_{xx}(t)\|^2\to\infty$, $t\to T$.

## 3 定理2的证明

证明 方程(1)的两边乘以 $\varphi_1(x)$, 然后在 $\Omega$ 积分, 我们有

$$\ddot{y}(t)+k_2\lambda_1^2\dot{y}(t)+k_1\lambda_1^2y(t)=\lambda_1\int_\Omega g(\Delta u)\varphi_1(x)\mathrm{d}x, \tag{18}$$

其中 $y(t)=\int_\Omega u(x,t)\varphi_1(x)\mathrm{d}x$. 由条件(ii)、Jensen 不等式和(18)式, 得到

$$\ddot{y}(t)+k_2\lambda_1^2\dot{y}(t)\geqslant\lambda_1 g(\lambda_1 y)-k_1\lambda_1^2y(t)\geqslant 0, \tag{19}$$

$$y(0)=\int_\Omega u_0(x)\varphi_1(x)\mathrm{d}x=y_0>0,\quad \dot{y}(0)=\int_\Omega u_1(x)\varphi_1(x)\mathrm{d}x=y_1>0. \tag{20}$$

于是, 有

$$y(t)>0,\quad \dot{y}(t)>0,\quad t>0. \tag{21}$$

事实上, 如果结论不真, 那么必存在一个 $t^*$ 使得 $y(t)>0$, $t\in(0,t^*)$, $y(t^*)=0$. (19)式两边同乘以 $\mathrm{e}^{k_2\lambda_1^2t}$, 在 $(0,t)$ 上积分, 得到

$$\dot{y}(t)\geqslant\mathrm{e}^{-k_2\lambda_1^2t}\left[y_1+\int_0^t(\lambda_1 g(\lambda_1 y(\tau))-k_1\lambda_1^2y(\tau))\mathrm{d}\tau\right]>0,\qquad t>0, \tag{22}$$

因此, $y(t)$ 在$[0, t^*]$ 上是严格单增的, 于是 $y(t^*) > y(0) > 0$, 这与假设 $y(t^*) = 0$ 矛盾• 因此, (21) 式成立•

(19) 式两边同乘以 $2e^{2k_2\lambda_1^2 t}y'(t)$, 在$(0, t)$ 上积分, 得到

$$y'(t) \geqslant e^{-k_2\lambda_1^2 t}\left[y_1^2 + \int_{y_0}^{y(t)}(\lambda_1 g(\lambda_1\tau) - k_1\lambda_1^2\tau)\,d\tau\right]^{1/2}, \tag{23}$$

由(23) 式, 即得

$$1 - e^{-k_2\lambda_1^2 t} \leqslant k_2\lambda_1^2\int_{y_0}^{y(t)}\left(y_1^2 + \int_{y_0}^{s}[\lambda_1 g(\lambda_1\tau) - k_1\lambda_1^2\tau]\,d\tau\right)^{-1/2}ds \leqslant$$
$$k_2\lambda_1^2\int_{y_0}^{+\infty}\left(y_1^2 + \int_{y_0}^{s}[\lambda_1 g(\lambda_1\tau) - k_1\lambda_1^2\tau]\,d\tau\right)^{-1/2}ds = b < 1,$$

即 $t \leqslant T = [-1/(k_2\lambda_1^2)]\ln(1 - b)$ 且 $y(t) \to +\infty$ 当 $t \to T^-$• 因为 $y(t) = \int_\Omega u(x, t)\varphi_1(x)\,dx \leqslant \| u(t)\| \|\varphi_1\|$, 所以 $\| u(t)\| \to +\infty$, $t \to T^-$• 定理 2 证毕•

例 2 设 $g(s) = k_1 s^p$, 其中 $p \geqslant 2$ 是一个偶数• 如果取 $y_0 = \int_\Omega u_0(x)\varphi_1(x)\,dx \geqslant 1$, $y_1 = \int_\Omega u_1(x)\varphi_1(x)\,dx > 0$ 并且取 $y_0$ 充分大使得

$$b = k_2\lambda_1^2\int_{y_0}^{+\infty}\left[\frac{k_1\lambda_1^{p+1}}{p+1}(s^{p+1} - y_0^{p+1}) - \frac{k_1\lambda_1^2}{2}(s^2 - y_0^2) + y_1^2\right]^{-1/2}ds < 1,$$

则定理 2 的条件均满足• 因此, 由定理 2 知, 问题(1)～问题(3) 的任一弱解 $u(x, t)$ 都不是整体的, 即存在一个 $T > 0$ 使得 $\| u(t)\| \to +\infty$ 当 $t \to T^-$•

## 4 定理 3 的证明

为证定理 3, 我们先给出下面引理

引理 假设 $g(s) \in C(\mathbf{R})$, $\Gamma(s) = \int_0^s g(\tau)\,d\tau$, $u_0 \in H^2$, $u_1 \in L_2$, $\Gamma(\Delta u_0) \in L_1$• 则有下面能量恒等式

$$A(t) = \| u_t(t)\|^2 + k_1\|\Delta u(t)\|^2 + 2\int_\Omega\int_0^{\Delta u} g(s)\,ds\,dx +$$
$$2k_2\int_0^t \|\Delta u_\tau(\tau)\|^2 d\tau = A(0),$$

其中 $A(0) = \| u_1\|^2 + k_1\|\Delta u_0\|^2 + 2\int_\Omega\int_0^{\Delta u_0} g(s)\,ds\,dx$•

证明 方程(1) 两边同乘以 $u_t$, 然后在 $\Omega$ 积分, 两边再在$(0, t)$ 上积分即得•

定理 3 的证明 假设问题(1)～问题(3) 解的最大存在区间是无限的• 对 $T_0 > 0$ 我们令

$$F(t) = \| u(t)\|^2 + k_2\int_0^t \|\Delta u(\tau)\|^2 d\tau + k_2(T_0 - t)\|\Delta u_0\| + \beta(t + \eta)^2, \tag{24}$$

其中 $\beta$, $\eta$ 是待定的非负实数• 则

$$F'(t) = 2\left[(u, u_t) + \beta(t + \eta) + k_2\int_0^t(\Delta u_\tau, \Delta u)\,d\tau\right]• \tag{25}$$

由(25) 式和 Schwartz 不等式, 得到

$$F'(t)^2 \leqslant 4F(t)\left[\| u_t(t)\|^2 + k_2\int_0^t\|\Delta u_\tau(\tau)\|^2 d\tau + \beta\right]• \tag{26}$$

由(25)式和方程(1),有

$$F''(t) = 2[\|u_t(t)\|^2 - k_1\|\Delta u(t)\|^2 - (g(\Delta u), \Delta u) + \beta]. \tag{27}$$

因此由(26)式、(27)式可得

$$\begin{aligned} &F(t)F''(t) - (1+\mu)F'(t)^2 \geqslant \\ &\quad 2F(t)\Big\{-k_1\|\Delta u(t)\|^2 - (g(\Delta u), \Delta u) - 2(1+\mu)k_2\int_0^t \|\Delta u_t(\tau)\|^2 \mathrm{d}\tau - \\ &\quad (2\mu+1)(\|u_t(t)\|^2 + \beta)\Big\}, \end{aligned} \tag{28}$$

令

$$\begin{aligned} F_1(t) = &-k_1\|\Delta u(t)\|^2 - (g(\Delta u), \Delta u) - 2(1+\mu)k_2\int_0^t \|\Delta u_t(\tau)\|^2 \mathrm{d}\tau - \\ &(2\mu+1)(\|u_t(t)\|^2 + \beta). \end{aligned} \tag{29}$$

则

$$\begin{aligned} F_1'(t) = &-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(\Delta u), \Delta u) + 2(1+2\mu)(g(\Delta u), \Delta u_t) + \\ &4\mu k_1(\Delta u_t, \Delta u) + 2\mu k_2\|\Delta u_t(t)\|^2. \end{aligned} \tag{30}$$

由(30)式、引理和定理3的条件(ii),推得

$$\begin{aligned} F_1(t) \geqslant &F_1(0) + (g(\Delta u_0), \Delta u_0) - (g(\Delta u), \Delta u) + 2(1+2\mu)\int_\Omega \Gamma(\Delta u)\mathrm{d}x - \\ &2(1+2\mu)\int_\Omega \Gamma(\Delta u_0)\mathrm{d}x + 2\mu k_1\|\Delta u\|^2 - 2\mu k_1\|\Delta u_0\|^2 \geqslant \\ &F_1(0) + (g(\Delta u_0), \Delta u_0) - 2(1+2\mu)\int_\Omega \Gamma(\Delta u_0)\mathrm{d}x - 2\mu k_1\|\Delta u_0\|^2 \geqslant \\ &-2(1+2\mu)(A(0)+\beta). \end{aligned} \tag{31}$$

取 $\beta = -A(0) > 0$, 再取 $\eta$ 使得 $2(u_0, u_1) + 2\beta\eta > (k_2/\mu)\|\Delta u_0\|^2$. 则有 $F'(0) > 0$. 最后取 $T_0$ 使得 $F(0)/[\mu F'(0)] \leqslant T_0$, 即

$$\frac{\|u_0\|^2 + \beta\eta^2}{2\mu[(u_0, u_1) + \beta\eta] - k_2\|\Delta u_0\|^2} \leqslant T_0.$$

由(28)式、(31)式可得 $F''(t)F(t) - (1+\mu)F'(t)^2 \geqslant 0$, 对所有 $t \in [0, t_1)$, 这里 $t_1 \leqslant F(0)/\mu F'(0)$. 因此由凹性方法[6],可得 $F(t) \to \infty$, $t \to t_1$, 即

$$\|u(t)\|^2 + k_2\int_0^t \|\Delta u(\tau)\|^2 \mathrm{d}\tau \to \infty, \qquad t \to t_1,$$

这与问题(1)~问题(3)解的最大存在区间是无限的假设矛盾. 定理3证毕.

例3 上述中,取 $\boldsymbol{R}^N = \mathbf{R}$, $\Omega = [0, 1]$, $g(s) = -s^3$, $u(x, 0) = 20\sin\pi x$, $u_t(x, 0) = 100$. 因此对 $\mu = 1/2$ 和所有的 $s \in \mathbf{R}$, 定理3的条件 ii 是满足的, 并且对 $k_1 = 1$, 可得 $A(0) < 0$. 因此定理3的条件均满足, 于是存在一个 $t_1 > 0$ 使得

$$\|u(t)\|^2 + k_2\int_0^t \|u_{xx}(\tau)\|^2 \mathrm{d}\tau \to \infty, \qquad t \to t_1.$$

感谢 作者感谢孔德兴教授的宝贵建议.

## [参 考 文 献]

[1] Banks H T, Gilliam D S, Shubov V I. Global solvability for damped abstract nonlinear hyperbolic sys-

tems[J]. Differential and Integral Equations, 1997, **10**(2): 309—332.

[2] Banks H T, Ito K, Wang Y. Well_posedness for damped second order systems with unbounded input opereators[J]. Differential and Intedral Equations, 1995, **8**(2): 587—606.

[3] Ackleh A S, Banks H T, Pinter G A. A nonlinear Beam equation[J]. Applied Mathematics Letters, 2002, **15**(3): 381—387.

[4] Aassila M, Guesmia A. Energy decay for a damped nonlinear hyperbolic equation[J]. Applied Mathematics Letters, 1999, **12**(3): 49—52.

[5] Banks H T, Gilliam D S, Shubov V I. Well_posedness for a one dimensional nonlinear beam[A]. In: Computation and Control, IV, Boseman, MT, 1994; Progr Systems Control Theory [C]. Vol 20, 1—21, Birkhäuser, Boston: MA, 1995.

[6] Kalantarov V K, Ladyzhenskaya O A. The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types[J]. J Soviet Math, 1978, **10**(1): 53—70.

# Nonexistence of Global Solutions of a Nonlinear Hyperbolic Equation With Material Damping

SONG Chang_ming[1,2]

(1. Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai, 200240, P. R. China;

2. Department of Mathematics, Zhongyuan University of Technology, Zhengzhou 450007, P. R. China)

**Abstract:** Concerns with the nonexistence of global solutions to the initial boundary value problem for a nonlinear hyperbolic equation with material damping. Nonexistence theorems of global solutions to the above problem are proved by the energy method, Jensen inequality and the concavity method, respectively. As applications of our main results, three examples are given.

**Key words:** nonexistence of global solution; initial boundary value problem; nonlinear hyperbolic equation; material damping