

# 圆管内含周期脉动分层流的 Floquet 稳定性分析\*

王艳霞, 胡国辉, 周哲玮

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊编委周哲玮来稿)

摘要: 运用线性稳定性理论, 结合 Floquet 理论和 Chebyshev 配点法对管流内有周期脉动分量的粘性分层流的参数共振现象进行了研究, 得到不同流动参数对流场的失稳和参数共振特性的影响

关键词: 流动稳定性; Floquet 理论; 参数共振

中图分类号: O358 文献标识码: A

## 引 言

自 19 世纪以来, 对射流破碎机理的理论研究一直吸引人们的兴趣。Plateau<sup>[1]</sup> 观察到在静止空气中的圆柱形液体射流会破碎成长度为半径 9 倍的等长液段。此后又有许多学者进行了相关方面的大量的理论研究。Rayleigh<sup>[2]</sup>, Taylor<sup>[3]</sup>, Lin 等人<sup>[4-8]</sup> 和周哲玮等人<sup>[9-12]</sup> 都对失稳的机制进行了比较深入的研究。研究表明, 射流失稳有两种模式: 一种是表面张力产生的 Rayleigh 模式, 一种是剪切产生的 Taylor 模式。已有实验<sup>[13,14]</sup> 表明, 脉动的雾化气体将使雾化微滴的直径更集中, 也更小。周哲玮和汤晓东<sup>[10]</sup> 曾研究了在周期脉动的速度激励下无粘气液两相射流的参数共振问题。他们的研究证实周期脉动有利于得到直径更小、分布更均匀的液滴, 且理论上所得的液滴直径以及粒径随工艺参数的变化规律与实验结果趋势一致, 这表明由脉动引起流场的参数共振是可以改善喷射雾化质量的。正是这些有意义的结果, 激发了进一步研究参数共振下的射流破碎问题的兴趣。

本文研究了竖直圆管内有周期脉动的环状气流作用下同轴圆柱液体射流的稳定性, 并考虑了流体粘性的影响。Lin 等人<sup>[6,7]</sup> 曾研究了定常管流中的有粘分层流的界面稳定性问题。而对于管流内分层流周期脉动的影响目前还未见有文献报道。本文运用线性稳定性理论, 结

\* 收稿日期: 2006\_02\_16; 修订日期: 2006\_03\_07

基金项目: 国家自然科学基金和上海宝钢集团公司联合资助项目(50371049); 上海市博士点基金和上海市高等学校青年基金资助项目; 上海市优秀青年教师后备人选资助项目(03YQHB092); 上海市重点学科建设项目(Y0103)

作者简介: 王艳霞(1980—), 女, 河南新乡人, 硕士(E-mail: wangyaxia@163.com);  
胡国辉(1950—), 男(Tel: + 86\_21\_56332557; E-mail: ghhu@staff.shu.edu.cn);  
周哲玮, 教授, 博士, 博导(联系人, Tel: + 86\_21\_66134661; Fax: + 86\_21\_66133382;  
E-mail: zhuzhou@staff.shu.edu.cn)。

合 Floquet 理论和 Chebyshev 配点法, 对有周期脉动分量的同轴气液分层流的稳定性进行了研究, 分析了多个流动参数对流场参数共振的影响。

## 1 理论模型和基本流

考虑半径为  $R_2$  的竖直圆管内的气液分层流动, 其中半径为  $R_1$  的圆柱状液体被同轴心的气体所环绕(如图 1)。假设液体和气体均为有粘不可压, 则流动满足的方程为

$$\begin{cases} \rho_i \frac{dV_i}{dt} = -\rho_i g - \nabla p_i + \mu_i \nabla^2 V_i, \\ \nabla \cdot V_i = 0, \end{cases} \quad (1)$$

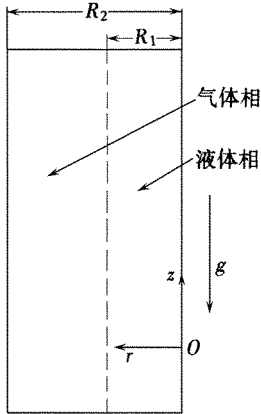


图 1 圆管内有脉动分层流的物理模型

其中  $i = 1, 2$  分别代表液体和气体,  $V_i$ 、 $\rho_i$ 、 $p_i$ 、 $\mu_i$  分别为液体和气体的速度矢量、密度、压力和动力学粘性系数,  $t$  表示时间,  $g$  为重力加速度, 取  $z$  轴正向竖直向上。边界条件为:

1) 在轴心  $r = 0$  处满足轴对称边界条件:

$$V_{1r} = \frac{\partial V_{1z}}{\partial r} = 0; \quad (2)$$

2) 在气液界面  $r = \eta$  处满足运动学边界条件:

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = V_{1r} - V_{2z} \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad (3)$$

切向速度连续条件

$$V_{1z} = V_{2z}, \quad (4)$$

法向速度连续条件

$$V_{1r} = V_{2r}; \quad (5)$$

动力学边界条件:

切向平衡条件

$$\mu_1 \left[ \frac{\partial V_{1r}}{\partial z} + \frac{\partial V_{1z}}{\partial r} \right] = \mu_2 \left[ \frac{\partial V_{2r}}{\partial z} + \frac{\partial V_{2z}}{\partial r} \right], \quad (6)$$

法向平衡条件

$$p_1 - 2\mu_1 \frac{\partial V_{1r}}{\partial r} - \left[ p_2 - 2\mu_2 \frac{\partial V_{2r}}{\partial r} \right] - \sigma \left[ \frac{1}{R_1^+} + \frac{1}{R_2^+} \right] = 0; \quad (7)$$

3) 在管壁  $r = R_2$  处满足:

$$V_{2r} = V_{2z}; \quad (8)$$

其中  $V_{1r}$ 、 $V_{1z}$  分别为液体和气体在径向、法向的速度分量,  $r$ 、 $z$  分别为径向、轴向坐标,  $\eta$  为界面的径向坐标,  $\sigma$  为表面张力系数,  $R_1^+$ 、 $R_2^+$  为界面上的主曲率半径。设液体在  $r = 0$  处的速度  $W_0$  为特征速度, 液体射流半径  $R_1$  为特征长度, 将时间、压力、速度矢量、坐标分别无量纲化:

$$t^* = \frac{tW_0}{R_1}, \quad p_i^* = \frac{p_i}{\rho_1 W_0^2}, \quad V_i^* = \frac{V_i}{W_0}, \quad (r^*, z^*, \eta^*) = (r, z, \eta)/R_1.$$

得到的无量纲参数有

$$Re = \frac{\rho_1 W_0 R_1}{\mu_1}, \quad Fr = \frac{W_0^2}{gR_1}, \quad We = \frac{\sigma}{\rho_1 W_0^2 R_1}, \quad Q = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad R = \frac{Re}{Fr}, \quad N = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad L = \frac{R_2}{R_1},$$

其中  $Re$  为 Reynolds 数,  $Fr$  为 Froude 数,  $We$  为 Weber 数,  $Q$  为气液密度比,  $R$  为 Reynolds 数与 Froude 数之比,  $N$  为气液动力学粘性系数比。为了书写简便, 以后无量纲量的星号上标均省



$$F(y) = \sum_{j=0}^N F(y_j) \psi_j(y),$$

其中  $\{\psi_j(y)\}_{j=0}^N$  是以  $\{y_j\}_{j=0}^N$  为插值节点的 Lagrange 插值基函数, 即

$$\psi_j(y_l) = \delta_{jl} \quad (j, l = 0, 1, \dots, N).$$

本文的配置点采用 Gauss-Lobatto 节点, 有

$$\psi_j(y) = \frac{(-1)^{j+1}(1-y^2)T_N'(y)}{c_j N^2(y-y_j)} \quad (j = 0, 1, \dots, N),$$

$$c_0 = c_N = 2, \quad c_j = 1, \quad 1 \leq j \leq N-1,$$

其中  $T_N(y) = \cos(N \arccos(y))$  是定义在区间  $[-1, 1]$  上的 Chebyshev 多项式.

这样, 得到(设  $\varphi_{1j} = \varphi_1(y_j, t)$ , 其它类似):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E_1^2 \varphi_{1j}) &= \frac{1}{Re} E_1^2 E_1^2 \varphi_{1j} - ikV_1(r, t) |_{j} E_1^2 \varphi_{1j} + \\ &ik \left[ \frac{d^2 V_1(r, t)}{dr^2} \Big|_j - \frac{2}{(1 + \tanh(\delta_{1j})/\tanh(\delta))} \frac{dV_1(r, t)}{dr} \Big|_j \right] \varphi_{1j}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E_2^2 \varphi_{2l}) &= \frac{1}{Re} E_2^2 E_2^2 \varphi_{2l} - ikV_2(r, t) |_{l} E_2^2 \varphi_{2l} + \\ &ik \left[ \frac{d^2 V_2(r, t)}{dr^2} \Big|_l - \frac{1}{(1 + A_1(y_{2l} - 1)/(A_2 - y_{2l}))} \frac{dV_2(r, t)}{dr} \Big|_l \right] \varphi_{2l}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $j = 1, \dots, M_1; l = 1, \dots, M_2$ ,  $M_1, M_2$  分别为液体、气体配置的点数,  $I_1, I_2$  分别为  $M_1, M_2$  维单位矩阵. 且

$$E_1^2 = \frac{d^2}{dr_1^2} - \frac{1}{r_1} \frac{d}{dr_1} - k^2 I_1,$$

$$E_1^2 E_1^2 = \frac{d^4}{dr_1^4} - \frac{2}{r_1} \frac{d^3}{dr_1^3} + \left( \frac{3}{r_1^2} - 2k^2 \right) \frac{d^3}{dr_1^3} + \left( \frac{2k^2}{r_1} - \frac{3}{r_1^3} \right) \frac{d}{dr_1} + k^4 I_1,$$

$$E_2^2 = \frac{d^2}{dr_2^2} - \frac{1}{r_2} \frac{d}{dr_2} - k^2 I_2,$$

$$E_2^2 E_2^2 = \frac{d^4}{dr_2^4} - \frac{2}{r_2} \frac{d^3}{dr_2^3} + \left( \frac{3}{r_2^2} - 2k^2 \right) \frac{d^3}{dr_2^3} + \left( \frac{2k^2}{r_2} - \frac{3}{r_2^3} \right) \frac{d}{dr_2} + k^4 I_2.$$

边界条件为:

1)  $y = -1$  处

$$\varphi_{1M_1} = \frac{d\varphi_{1j}}{dr_1} \Big|_{M_j} = 0; \quad (16)$$

2)  $y = 1$  处

$$\frac{dh}{dt} \Big|_1 = ik\varphi_{11} - ikV_1(r, t) h |_{1}, \quad (17)$$

$$\varphi_{11} - \varphi_{21} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{d\varphi_{1j}}{dr_1} \Big|_j = \frac{d\varphi_{2l}}{dr_2} \Big|_{ll} - \left[ \frac{dV_1(r, t)}{dr_1} \Big|_j - \frac{dV_2(r, t)}{dr_2} \Big|_{ll} \right] h |_{1} = 0, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{d^2 \varphi_{1j}}{dr_1^2} \Big|_j - \frac{d\varphi_{1j}}{dr_1} \Big|_j \right] + k^2 \varphi_{11} - N \left[ \left[ \frac{d^2 \varphi_{2l}}{dr_2^2} \Big|_{ll} - \frac{d\varphi_{2l}}{dr_2} \Big|_{ll} \right] + k^2 \varphi_{21} \right] - \\ &\left[ \frac{d^2 V_1(r, t)}{dr_1^2} \Big|_1 - \frac{N d^2 V_2(r, t)}{dr_2^2} \Big|_1 \right] h |_{1} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{d\varphi_{1j}}{dr_1} \Big|_{1j} - Q \frac{d\varphi_{2l}}{dr_2} \Big|_{1l} \right] &= \frac{1}{Re} \left[ \frac{d^3\varphi_{1j}}{dr_1^3} \Big|_{1j} - \frac{d^2\varphi_{1j}}{dr_1^2} \Big|_{1j} + (1-3k^2) \frac{d\varphi_{1j}}{dr_1} \Big|_{1j} \right] - \\ &ikV_1(r, t) \Big|_{1j} \frac{d\varphi_{1j}}{dr_1} \Big|_{1j} + \left[ \frac{2k^2}{Re} + ik \frac{dV_1(r, t)}{dr_1} \Big|_{1j} \right] \varphi_{11} - \\ \frac{N}{Re} \left[ \frac{d^3\varphi_{2l}}{dr_2^3} \Big|_{1l} - \frac{d^2\varphi_{2l}}{dr_2^2} \Big|_{1l} + (1-3k^2) \frac{d\varphi_{2l}}{dr_2} \Big|_{1l} \right] &+ ikQV_2(r, t) \Big|_{1l} \frac{d\varphi_{2l}}{dr_2} \Big|_{1l} - \\ \left[ \frac{2k^2}{Re} + ikQ \frac{dV_2(r, t)}{dr_2} \Big|_{1l} \right] \varphi_{21} - ik(1-k^2) We h \Big|_{1l} & \end{aligned} \quad (21)$$

3)  $y = -1$  处

$$\varphi_{2M_2} = \frac{d\varphi_{2l}}{dr_2} \Big|_{M_2l} = 0 \quad (22)$$

在方程(14)、(15)中分别去掉前两个与后两个共8个方程,用8个边界条件(16)、(18)~(22)代替,由于界面函数  $\eta$  也是未知量,所以我们再多加一个方程(17)。这样,我们得到包含了  $M_1 + M_2 + 1$  个未知量

$$\varphi_{11}, \varphi_{12}, \dots, \varphi_{1M_1}; \varphi_{21}, \varphi_{22}, \dots, \varphi_{2M_2}; h$$

的方程,形成了形如

$$M \frac{\partial \varphi}{\partial t} = [B + C \cdot \cos(\omega t) + D \cdot \sin(\omega t)] \varphi \quad (23)$$

的参数共振方程组,其中  $\varphi = (\varphi_{11}, \varphi_{12}, \dots, \varphi_{1M_1}; \varphi_{21}, \varphi_{22}, \dots, \varphi_{2M_2}; h)^T$ 。该方程组为周期系数的常微分方程组,因此可以采用 Floquet 理论进行求解。

### 3 Floquet 理论

在系统(23)中,  $M, B, C, D$  是常数矩阵。根据 Floquet 理论<sup>[16]</sup>,存在一个常数矩阵  $R$ , 对于所有的  $t$  满足

$$S(t+T) = R \cdot S(t), \quad (24)$$

其中  $T$  是周期,  $S$  是基本解矩阵且满足

$$M \frac{\partial S}{\partial t} = [B + C \cdot \cos(\omega t) + D \cdot \sin(\omega t)] \cdot S \quad (25)$$

设  $S$  的特征值也即 Floquet 乘数为  $\lambda_i (i = 1, \dots, M_1 + M_2 + 1)$ , 则系统(23)的解可以写为

$$\varphi_i = e^{\gamma_i t} Z_i(t),$$

其中  $Z_i(t) = Z_i(t+T)$  为周期函数,  $\gamma_i$  称为特征指数,且

$$\gamma_i = \frac{1}{T} \ln \lambda_i \quad (26)$$

这样为了求  $\gamma_i$  我们必须先求  $R$ 。由式(24)得到

$$S(T) = R \cdot S(0),$$

由上式可知,若赋初值  $S(0) = I$ , 则  $S(T) = R$ 。因此对(25)积分一个周期,就得到  $R$ 。本文取基本解矩阵的最大特征值的模为  $\lambda_{\max}$ , 相对应的实部、虚部分别为  $\text{Re}(\lambda_{\max})$ 、 $\text{Im}(\lambda_{\max})$ 。由式(26)求得的对特征指数的实部为  $\text{Re}(\gamma)$ 。这样系统的稳定性就可以由基本解矩阵  $S(T)$  的最大特征值的模  $\lambda_{\max}$  或特征指数的实部  $\text{Re}(\gamma)$  来决定,其中本文称  $\text{Re}(\gamma)$  为系统的最大增长率。当  $\lambda_{\max} > 1$  (也即  $\text{Re}(\gamma) > 0$ ) 时,系统为不稳定;当  $\lambda_{\max} < 1$  (也即  $\text{Re}(\gamma) < 0$ ) 时,系统为稳定的;当  $\lambda_{\max} = 1$  (也即  $\text{Re}(\gamma) = 0$ ) 时,系统为中性稳定。

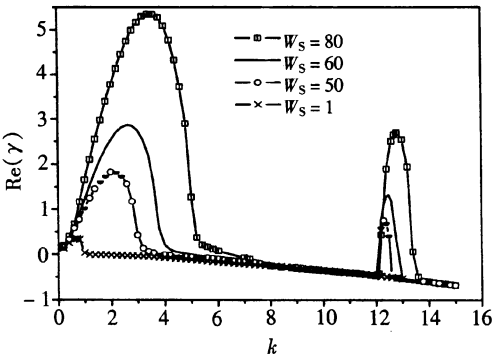
### 4 计算结果分析

本文在经过收敛性测试计算后,将液体和气体中的配置点数目分别为取为  $M_1 = 55, M_2 = 131$ 。计算中非线性坐标变换中的参数  $\delta = 0.8, A_1 = 6$ 。文中用到的  $Fr = 2000$ 。

本文在 Lin 的文献[6]的基础上,引入周期脉动激励。本文研究的对象是空气和水。如果不加特殊说明,计算中的物理参数都是基于这两种流体。空气和水的密度比和粘性比为  $Q = 0.0013, N = 0.018$ ; 其他的参数如 Weber 数、脉动振幅和频率都在一定范围内变化。图2和图3显示的是脉动速度的幅值和频率对系统稳定性的影响。

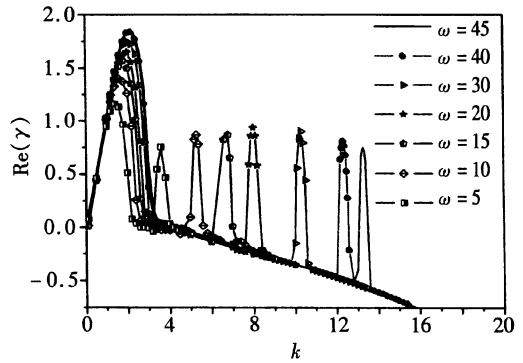
从图2可以看出,对于给定的较大振幅因子  $W_s$ ,随着波数  $k$  的增大,系统经历了不稳定、稳定、不稳定、稳定4个过程。这两个不稳定区就是参数共振区。随着振幅因子的增加,不稳定波对应的扰动增长率单调增加,从而共振区更明显,系统更加不稳定。对于较小的振幅因子,只出现一个不稳定区。

图3显示了脉动频率对扰动增长率的影响曲线图。该图表明,对于所给参数,波数\_增长率平面也可以观察到参数共振现象。随着脉动频率的增加,第1个共振区的变化不显著。而第2个共振区则不同,脉动频率的增加,使得共振区有明显右移的趋势,不稳定波对应的波数明显增大。对于所给参数,存在一个最优的脉动频率  $\omega = 20$ ; 在这个频率的脉动速度的激励下,第2个共振区存在最大的扰动增长率。



$N = 0.02, Q = 0.0013, Re = 400, We = 1, \omega = 40, L = 10, Fr = 2000$

图2 振幅因子对增长率的影响

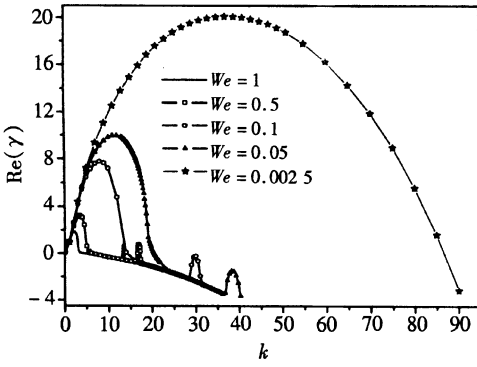


$N = 0.018, Q = 0.0013, Re = 400, We = 1, W_s = 50, L = 10, Fr = 2000$

图3 脉动频率对增长率的影响

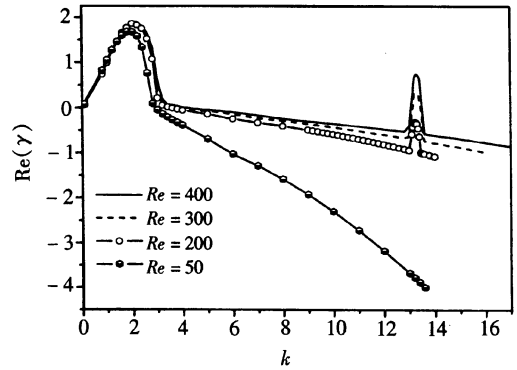
图4考察了 Weber 数对增长率的影响。该图中波数\_增长率平面上也可以看到两个共振区。一般地,Weber 数对系统的共振起到稳定的作用。但图4显示,Weber 数对共振区的影响却完全不同。随着 Weber 数的不断增大,第1个共振区的最不稳定扰动波所对应的增长率在不断减小,而第2个共振区的最不稳定扰动波对应的增长率在不断增大。由图可知,在不同的共振区,表面张力产生不同的影响。

Reynolds 数对增长率的影响参见图5。图中显示随着 Reynolds 数的增大,即液体的粘性的减小,波数\_增长率平面上出现了参数共振现象。对于所给的参数,当 Reynolds 数比较小的时候,系统只出现了一个不稳定区。随着 Reynolds 数的增大,出现第2个共振区,并且共振区也在增大。这说明减小液体的粘性,使得 Reynolds 数增大,有利于发生共振。即液体的粘性对系统起着稳定性的作用。



$N = 0.018, Q = 0.0013, Re = 400, \omega = 45,$   
 $We = 1, W_S = 50, L = 10, Fr = 2000$

图4 Weber数对增长率的影响



$N = 0.018, Q = 0.0013, \omega = 45, We = 1,$   
 $W_S = 50, L = 10, Fr = 2000$

图5 Reynolds数对增长率的影响

我们还研究了密度比和粘性比对稳定性的影响。结果表明,增大密度比,更易于发生共振现象,有两个不稳定区,系统更不稳定;粘性比的增大则能推迟共振区的出现。但这两个参数的影响均不明显。

## 5 结 论

本文运用流动稳定性理论,结合 Floquet 理论和 Chebyshev 配点法,对竖直管流内有周期脉动分量分层流的参数共振现象进行了研究,讨论了各个参数对失稳区域的影响及其对系统稳定性的作用:

- 1) 增大脉动速度的振幅和频率能使最不稳定增长率所对应的波数增加。
- 2) Weber 数的增大能有效地抑制不稳定波的增长,减小共振区。
- 3) 随着 Reynolds 数的增大,共振区越来越明显。
- 4) 粘性比和密度比对系统的稳定性没有明显的影响。
- 5) 和定常流的稳定特征相比,在周期脉动速度的激励下,不稳定波的波长更加集中。这与文献[10, 17]中 Mathieu 方程的参数共振规律是一致的。

由于计算上的困难,目前只能计算出部分脉动振幅和脉动频率对系统的稳定性影响。对于更大范围的参数变化下的流动稳定性特性尚需进一步的探讨。

## [参 考 文 献]

- [1] Plateau J. Statique experimentale et theorique des liquids soumise aux seules forces [J]. Moleculaire Gauthier Villars, 1873, **1**(1): 2—10.
- [2] Rayleigh Lord. On the instability of jets [J]. Proc London Math Soc, 1879, **10**(1): 4—13.
- [3] Taylor G I. Generation of ripples by wind blowing over viscous fluid [A]. In: Taylor G I, Batchelor G K, Eds. The Scientific Papers of Sir Geoffrey Ingram Taylor [C]. Vol 3. Cambridge U K: Cambridge University Press, 1965, 952—963.
- [4] Lin S P, Kang D J. Atomization of a liquid jet [J]. Phys Fluids, 1987, **30**(7): 2000.
- [5] Lin S P, Lian Z W. Mechanisms of the breakup of liquid jets [J]. AIAA J, 1990, **28**(1): 120—126.
- [6] Lin S P, Ibrahim E A. Instability of a viscous liquid jet surrounded by a viscous gas in a vertical pipe [J]. J Fluid Mech, 1990, **218**: 641—658.

- [7] Lin S P, Chen J N. Role played by the interfacial shear in the instability mechanism of a viscous liquid jet surrounded by a viscous gas in a pipe[J]. *J Fluid Mech*, 1998, **376**: 37—51.
- [8] Woods D R, Lin S P. Instability of a liquid film flow over a vibrating inclined plane[J]. *J Fluid Mech*, 1995, **294**: 391—407.
- [9] 张 , 周哲玮. 喷射成形中的喷射雾化机理研究[J]. *粉末冶金技术*, 1999, **17**(3): 163—168.
- [10] 汤晓东. 外部扰动对射流稳定性的影响[D]. 上海: 上海市应用数学和力学研究所, 1999.
- [11] HU Ming\_hai, ZHOU Zhe\_wei. The effect of azimuthal variation of section shape on the interfacial instability of a cylindrical jet[J]. *Journal of Shanghai University*, 2002, **6**(1): 36—39.
- [12] 李晓军, 胡国辉, 周哲玮. 射流速度剖面形状变化及其对界面稳定性的影响[J]. *应用数学和力学*, 2005, **26**(1): 1—6.
- [13] Rai G, Lavernia E, Grant N J. Powder size and distribution in ultrasonic gas atomization[J]. *Journal of Metals*, 1985, **37**(8): 22—26.
- [14] Grant N J. Rapid solidification of metallic particulates[J]. *Journal of Metals*, 1983, **35**(1): 20—27.
- [15] 向新民. 谱方法的数值分析[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [16] 贺建勋, 王志成. 常微分方程[M]. 上、中、下册. 湖南: 科学技术出版社, 1979.
- [17] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京: 科学出版社, 1979.

## Floquet Stability Analysis of Two\_Layer Flows With Periodic Fluctuation in a Vertical Pipe

WANG Yan\_xia, HU Guo\_hui, ZHOU Zhe\_wei  
(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,  
Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

**Abstract:** Based on linear stability theory, parametric resonance of a liquid-gas cylindrical flow with periodic fluctuation in a vertical pipe was discussed by using Floquet theory and Chebyshev collocation method. The effects of different physical parameters on the instability of flow and the properties of parametric resonance were investigated.

**Key words:** stability; Floquet theory; parametric resonance