文章编号: 1000_0887(2006) 08_0923_08


# 在重力场和磁场影响下自旋刚性航天器的周期运动*

Y•A•阿布德尔_阿齐兹[1], M•H•耶赫亚[2],
F•A•阿布德_萨兰姆[3], M•纳德万[3]

(1. 国家天文学与地球物理学研究所, 开罗 埃及;
2. 曼苏拉大学 理学院 数学系, 曼苏拉 埃及;
3. 开罗大学 理学院 天文学系, 开罗 12613 埃及)

(陈立群推荐)

摘要: 考虑重力场和磁场对轴对称航天器本体的影响, 研究其质心在圆形轨道上的运动• 通过降低系统的运动方程数, 并将它变成为一个带电粒子在电磁场作用下的平面运动• 确认系统运动是稳定的, 并通过 Liapunov 全纯积分定理, 构建其近似的周期运动•

关 键 词: 周期运动; Routh 函数; 刚性航天器
中图分类号: O347 文献标识码: A

## 引 言

一个卫星的运动主要由两部分组成: 沿轨道的公转和卫星自转• 众所周知, 在一定假设条件下, 两种运动是互相耦合的• 通常情况下, 公转轨道半径远大于卫星的典型尺寸, 而卫星的自转速度又远快于公转的平均速度• 在这种情况下, 假定公转轨道运动满足 Kepler 定律, 于是对航天器姿态运动的研究可独立于轨道运动•

有许多干扰力作用在航天器上, 使航天器受到周围环境场的交互作用• 在一定条件下, 对航天器和一种或多种环境场的交互作用的研究是可行的•

Mesch 等人[1], Beletsky[2], Kovalenko[3], Guran[4], Sanguk Lee 等人[5], Panagiotis 等人[6]在研发控制卫星旋转运动和姿态的系统中, 就考虑了地球磁场对卫星磁化的作用• Guran[7]通过 Poincar 映射技术, 研究了自旋陀螺卫星的周期性、伪周期性和混沌运动• Chen Li_qun 等人[8,9]研究了在地球赤道平面附近圆形轨道上, 带内阻尼调控装置的磁刚性航天器的混沌运动•

显然, 一个绕固定点运动的航天器的自转运动可以通过六阶微分运动方程(Euler_Poisson 方程) 描述• 许多人利用问题已知的 3 个初积分, 在方程式降阶上曾做过许多尝试• Kolosoff[10]把描述重刚体的运动方程, 转变为由 Yehia[11]提出的粒子平面运动方程, 又利用 Lia-

* 收稿日期: 2005_10_24; 修订日期: 2006_02_14
作者简介: M•H•耶赫亚(联系人. Fax: +202_5548020; E_mail: yehia@nriag.sci.eg)•
本文原文为英文, 海治 译, 张禄坤 校

punov[12]的小参数法，确认转化后的方程式存在周期解·

本文研究在地球磁场中一个圆形轨道上，由于受重力场和磁场影响，带有永久磁性的轴对称刚性航天器的旋转运动· 通过在惯性椭球体上建立等温坐标系，将航天器的运动方程简化，变为受重力、磁力和回转力作用的平面运动方程· 应用 Liapunov 的全纯积分法，得到航天器运动接近周期的解，以及系统稳定的充分必要条件·

## 1 系统的 Lagrange 函数

令 $OX'Y'Z'$ 和 $OX_0Y_0Z_0$ 为具有共同原点 $O$ 的 2 个直角坐标系，坐标系原点位于航天器的质心处· $OX'Y'Z'$ 为轨道坐标系，$OX'$ 为轨道运动方向的切线方向，$OY'$ 为轨道平面的法线方向，$OZ'$ 为相对地心的轨道矢径方向· $OX_0Y_0Z_0$ 为航天器的惯性主轴坐标系· 令 θ、ψ 和 $\phi$ 为 Euler 角· ψ 为进动角，其所在平面与 $Z_0$ 轴正交· θ 为章动角，即 $Z'$ 轴与 $Z_0$ 轴的夹角，$\phi$ 为航天器绕 $Z'$ 轴的自旋角· 设航天器关于 $Z_0$ 轴动力学对称，$A$、$B$、$C$ 为航天器的主惯性矩，即满足 $A = B$·

令 α、β、γ 为轨道直角坐标系的单位向量· α、β、γ 的方向分别为轨道平面切线方向、轨道平面法线方向及轨道半径方向(例子可见 Yehia 的文献[13])，

$$\begin{cases} \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\cos\psi\cos\phi - \sin\psi\sin\phi\cos\theta, \\ \qquad\qquad -\cos\psi\sin\phi - \sin\psi\cos\phi\cos\theta, -\sin\psi\sin\theta), \\ \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\sin\psi\cos\phi + \cos\psi\sin\phi\cos\theta, \\ \qquad\qquad -\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\phi\cos\theta, -\cos\psi\sin\theta), \\ \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\sin\phi\sin\theta, \cos\phi\sin\theta, \cos\theta)\cdot \end{cases} \tag{1}$$

系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}\omega\cdot\omega\boldsymbol{I} - V_0, \tag{2}$$

其中 ω 为航天器的角速度

$$\omega = (p, q, s) = \dot{\psi}\gamma + \dot{\theta}\boldsymbol{n} + \dot{\phi}\delta, \tag{3}$$

其中 $\delta = (0, 0, 1)$，$\boldsymbol{n} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$，$\boldsymbol{n}$ 为结点线上的单位向量· $V_0$ 为地球重力场和磁场施加于航天器的有势力：

$$V_0 = \frac{3}{2}\Omega^2\gamma\boldsymbol{I}\cdot\gamma + \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{H}, \tag{4}$$

其中 Ω 为轨道角速度，$\boldsymbol{I} = \mathrm{diag}(A, B, C)$ 为航天器在原点 $O$ 处的惯性矩阵·

令 $\boldsymbol{H}$ 为沿轨道半径方向分布的统一磁场，$\boldsymbol{M}$ 为航天器被磁化部分的总磁力矩(沿航天器的对称轴方向)·

$$\boldsymbol{H} = H\gamma = H(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \quad \boldsymbol{M} = M(0, 0, 1), \tag{5}$$

从而

$$V_0 = \frac{3}{2}\Omega^2(C - A)\gamma_3^2 + HM\gamma_3\cdot \tag{6}$$

利用变换

$$\omega = \omega' + \Omega\beta, \tag{7}$$

研究相对于轨道系统的卫星运动，其中 $\omega'$ 为航天器在轨道系统中的角速度，从而在轨道系统中卫星的 Lagrange 函数为:

$$L = \frac{1}{2}A(p^2 + q^2)\ \frac{1}{2}Cr^2 - V_0, \tag{8}$$

其中

$$\begin{cases} p = \psi\sin\theta\sin\Phi + \theta\cos\Phi + \Omega\beta_1, \\ q = \psi\sin\theta\cos\Phi + \theta\sin\Phi + \Omega\beta_2, \\ r = \psi\cos\theta + \Phi + \Omega\beta_1. \end{cases} \tag{9}$$

## 2 运动方程的简化

在所考虑的系统中, 利用 Liapunov 的全纯积分[12]. 首先, 将运动方程简化成另一种形式, 以适应该积分. 使用 Yehia[11] 的结果, 将受重力场和磁场作用下航天器的运动方程, 简化为一带电粒子在有势力和 Lorentz 力(沿轨道半径分布的磁场作用产生) 作用下的平面运动方程.

很明显, $\Phi$ 为 Lagrange 函数 $L$ 中的一个循环变量, 依照 Routh 方法, 利用循环积分消去 $\psi$, 使运动方程降阶

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi} = Cr = f \qquad (\text{任意常数}), \tag{10}$$

航天器运动问题的 Routh 函数为:

$$R = L - f\ \Phi = R_2 + R_1 + R_0, \tag{11}$$

其中

$$R_2 = \frac{A}{2}[\dot\psi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2],$$

$$R_1 = \Omega A\dot\theta\sin\psi + [\Omega A\cos\theta\sin\theta\cos\psi + f\cos\theta]\dot\psi,$$

$$R_0 = -\frac{3}{2}\Omega^2(C - A)\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Omega^2 A\sin\theta\cos\psi + MH\cos\theta - \Omega f\sin\theta\cos\psi.$$

现依据下面的公式对变量进行替换,

$$\psi = \arcsin u, \tag{12}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{v\sqrt{A/C}}{\sqrt{1 - mv^2}}\right), \tag{13}$$

其中

$$m = (A - C)/C.$$

这样, 变换后的 Routh 函数的二次项成为

$$R_2 = \frac{A}{2}\left[\frac{1 - v^2}{1 + mv^2}\right]\left[\frac{\dot u^2}{1 - u^2} + \frac{A}{C}\frac{\dot v^2}{(1 - v^2)^2(1 + mv^2)}\right]. \tag{14}$$

如果, 进一步引入 Yehia[11] 中的新坐标系 $x$、$y$ 以及新的自变量 $\tau$, 则有

$$\sin x = u, \tag{15}$$

$$y = \sqrt{\frac{A}{C}}\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{(1 - v^2)\sqrt{1 + mv^2}}, \tag{16}$$

$$\mathrm{d}t = \mu\,\mathrm{d}\tau. \tag{17}$$

其中

$$\mu = (1 - v^2)/(1 + mv^2).$$

解方程(15)、(16) 中的 $u$、$v$, 得到 Routh 函数为:

$$R = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + f\left[P\frac{\sigma}{\rho}y' + Q\frac{T}{\rho}x'\right] + U, \tag{18}$$

其中

$$\begin{cases} P = u,\ q = (1-u^2),\ \sigma = -\Omega\sqrt{1+mv^2}, \\ T = \left[\Omega\sqrt{\dfrac{A}{C}} + \dfrac{f}{\sqrt{AC}}\dfrac{\sqrt{1+mv^2}}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}}\right]v,\ \rho = \sqrt{1-v^2}, \\ U = \mu\left\{-\dfrac{3}{2}\Omega^2(C-A)\dfrac{v^2}{C(1-v^2)} - \dfrac{1}{2}\Omega^2(1-u^2) + \right. \\ \left.\qquad \dfrac{1}{A}\left[MH\dfrac{v^2}{\sqrt{C(1-v^2)}} - \Omega f\sqrt{1-u^2}\sqrt{\dfrac{1+mv^2}{1-v^2}}\right]\right\} \end{cases} \tag{19}$$

和

$$\mathrm{d}t = \mu\mathrm{d}\tau.$$

利用 Routh 函数方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial R}{\partial x'}\right) - \frac{\partial R}{\partial x} = 0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial R}{\partial y'}\right) - \frac{\partial R}{\partial y} = 0. \tag{20}$$

将运动方程表达为新变量形式(有势力和 Lorentz 力作用下带电粒子的水平运动方程)

$$x'' = -Fy' + U_x,\quad y'' = Fx' + U_y, \tag{21}$$

其中

$$\begin{aligned} F = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P\sigma}{\rho}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{qT}{\rho}\right) = \\ & \left[\frac{\cos^2 x}{1-v^2}\right]\left\{-\Omega\sqrt{1+mv^2}\sqrt{1-v^2}\cos^{-1}x - \left[\Omega m - \frac{f}{A}\cos^{-3}x\right]\times\right. \\ & (v^2-v^4)\sqrt{1+mv^2} - \left[\Omega\sqrt{1-v^2}\sqrt{1+mv^2}\right] + \\ & \left.\frac{f}{A}\cos^{-3}x(1+mv^2)(1+2v-v^2)\right\}. \end{aligned}$$

新系统有 Jacobi 积分

$$x'^2 + y'^2 = 2U, \tag{22}$$

运动的可能区域由不等式 $U(x, y, h, f \geqslant 0)$ 给出.

## 3 系统的周期解

从 Jacobi 积分(22)着手, 在等温坐标系下解方程(21)

$$\begin{cases} U = \mu(h+w),\ \mu = \dfrac{(1-v^2)}{1+mv^2}, \\ w = -\dfrac{3}{2}\Omega^2(C-A)\dfrac{v^2}{C(1-v^2)} - \dfrac{1}{2}\Omega(1-u^2) + \\ \qquad \dfrac{1}{A}\left[MH\dfrac{v^2}{\sqrt{C(1-v^2)}} - \Omega f\sqrt{1-u^2}\sqrt{\dfrac{1+mv^2}{1-v^2}}\right], \end{cases} \tag{23}$$

其中 $F$、$u$、$v$ 为$x$、$y$ 的函数, $U$为力函数, $h$ 为能量常数, $f$ 为面积常数. Yehia[14]给出的系统稳定解为:

$$U_x = 0,\quad U_y = 0,\quad U_z = 0. \tag{24}$$

排除考虑 $|u| = |v| = 1$ 的点, 系统(24)可写成

$$w_x = 0,\ w_y = 0,\ h + w_z = 0\cdot \tag{25}$$

令$P_0(x_0, y_0) = P_0(f)$代表稳定点集$P_i(x_i, y_i)$中任意一点, 且相应的能量常数为$h_0 = h_0(f)\cdot$

式(25)中前两个方程相应点集的坐标$P_{0i}(x_{0i}(f), y_{0i}(f))$对应稳定运动, 第3个方程对应每个运动的能量常数值•

遵循Yehia在文献[14]中提出的方法, 用点$P_0$邻域中参数$f$的固定值, 构造系统(21)的周期解• 设

$$x = x_0 + \xi,\ y = y_0 = y + \eta, \tag{26}$$

方程(18)和(19)可写为:

$$\begin{cases} \xi'' + F(x_0 + \xi, y + \eta)\eta' - U_\xi(x_0 + \xi, y + \eta; h) = 0, \\ \eta'' - F(x_0 + \xi, y_0 + \eta)\xi' - U_\eta(x_0 + \xi, y_0 + \eta; h) = 0, \\ \xi'^2 + \eta'^2 - 2U(x_0 + \xi, y_0 + \eta; h) = 0, \end{cases} \tag{27}$$

其中$h$为受扰运动的能量常数• 为构造系统(21)的周期解, 应用Liapunov全纯积分定理(见Liapunov于1956年的文献)• 周期解是以$c$为参数的幂级数, 其中$c$由$h$确定• 当$c \to \infty$时, 该解趋近于零, 而当$h \to h_0$时, 有

$$\xi = \sum_{s=1}^{\infty} c^s x^{(s)},\quad \eta = \sum_{s=1}^{\infty} c^s y^{(s)},\ h = h_0 + \sum_{s=1}^{\infty} c^s h_s, \tag{28}$$

其中$h_s$为常数, $x^{(s)}$、$y^{(s)}$是$\tau$(同为周期$T$)的周期函数•

周期$T$可展开为

$$T = \frac{2\pi}{\vartheta}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} c^s T_s\right)\cdot \tag{29}$$

当$h = h_0$时, 系统(27)的零解对应于系统的稳定运动•

引入新变量

$$u = \vartheta_0 \tau, \tag{30}$$

有如下形式的解

$$\begin{cases} x^{(s)} = a_{1s} + \sum_{r=1}^{s}(a_{1s}^{(r)}\cos ru + b_{1s}^{(r)}\sin ru), \\ y^{(s)} = a_{2s} + \sum_{r=1}^{s}(a_{2s}^{(r)}\cos ru + b_{2s}^{(r)}\sin ru)\cdot \end{cases} \tag{31}$$

在$c$的一级近似中, 周期解(26)为:

$$x = x_0 + cx^{(1)},\ y = y_0 + cy^{(1)}, \tag{32}$$

其中$x^{(1)}$、$y^{(1)}$为$\tau$的周期函数•

坐标与时间间的关系由下式给出

$$t - t_0 = \int_0^\tau \mu(x(\tau), y(\tau))\,d\mu, \tag{33}$$

从而, 方程(21)的一级近似和二级近似可写为

$$\begin{cases} \vartheta_0^2 \dfrac{d^2x^{(1)}}{du^2} + F_0\vartheta_0 \dfrac{d^2y^{(1)}}{du^2} + \alpha' x^{(1)} + \beta' y^{(1)} = 0, \\ \vartheta_0^2 \dfrac{d^2y^{(1)}}{du^2} + F_0\vartheta_0 \dfrac{d^2x^{(1)}}{du^2} + \gamma' y^{(1)} + \beta' x^{(1)} = 0; \end{cases} \tag{34}$$

$$\begin{cases} \vartheta_0^2 \dfrac{d^2x^{(2)}}{du^2} + F_0\vartheta_0 \dfrac{d^2y^{(2)}}{du^2} + \alpha' x^{(2)} + \beta' y^{(2)} = \\ \quad [\mu_{y0}w_{xx0} + \mu_0 w_{xxy0}]x^{(1)}y^{(1)} + F_{y0}\vartheta_0 y^{(1)}\dfrac{d^2y^{(1)}}{du^2}, \\ \vartheta_0^2\dfrac{d^2y^{(2)}}{du^2} - F_0\vartheta_0\dfrac{d^2x^{(2)}}{du^2} + \gamma' y^{(2)} + \beta' x^{(2)} = \\ \quad \mu_0 h_2 + \dfrac{1}{2}[x^{(1)}]^2[\mu_{y0}w_{xx0}+\mu_0 w_{xxy0}] + \\ \quad \dfrac{1}{2}[y^{(1)}]^2[3\mu_{y0}w_{yy0}+\mu_0 w_{yyy0}] + F_{y0}\vartheta_0 y^{(1)}\dfrac{dx^{(1)}}{du}. \end{cases} \tag{35}$$

下标零对应 $x = x_0, y = y_0$ 值:

$$\alpha' = -\mu_0 w_{xx0},\quad \gamma' = -\mu_0 w_{yy0},\quad \beta' = -\mu_0 w_{xy0}.$$

系统(31) 的特征方程给出两个频率

$$\vartheta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\alpha' + \gamma' + F_0^2 \pm \left[(\alpha' + \gamma' + F_0^2)^2 - 4(\alpha'\gamma' - \beta'^2)\right]^{1/2}\right\}^{1/2}. \tag{36}$$

考虑以下两种可能的情况:

1. $\alpha'\gamma' - \beta'^2 > 0$($w$ 在 $P_0$ 处有极值)· 若

$$F_0^2 > \sqrt{\alpha'\gamma' - \beta'^2} - \alpha' - \gamma', \tag{37}$$

方程(36) 有两个不同的频率· 该条件在 $w$ 极大值处总成立·

2. $\alpha'\gamma' - \beta'^2 < 0$($w$ 在 $P_0$ 处有鞍点)· 这时, 只有一个频率, 即在方程(36) 中取正号·

在第 1 种情况中, 每 1 个频率对应 1 族周期运动, 并由任意参数 $c$ 确定, 而第 2 种情况中, 只能得到 1 族周期运动·

当频率(36) 为不可度量时, 从级数(28) 和(29) 中, 可求得所有 $h_s$ 值和系数· 只要当 $|c|$ 小于限定值, 级数将绝对收敛·

式(31) 中的两个方程的解为:

$$x^{(1)} = (\vartheta_0^2 - \gamma')\sin u,\quad y^{(1)} = \beta'\sin u - F_0\vartheta_0\cos u,\quad h_1 = 0. \tag{38}$$

系统(21) 的周期解族的 1 级近似, 与频率 $\vartheta_0$ 对应, 可从下式得到

$$\begin{cases} x = x_0 + (\vartheta_0^2 - \gamma')c\sin u, \\ y = y_0 + c(\beta'\sin u - F_0\vartheta_0\sin u), \\ h = h_0. \end{cases} \tag{39}$$

通过方程(38), 方程(34) 简化为

$$\begin{cases} \vartheta_0^2 \dfrac{d^2x^{(2)}}{du^2} + F_0\vartheta_0 \dfrac{d^2y^{(2)}}{du^2} + \alpha' x^{(2)} + \beta' y^{(2)} = \delta_0 + \delta_1\cos 2u + \delta_2\sin 2u, \\ \vartheta_0^2 \dfrac{d^2y^{(2)}}{du^2} + F_0\vartheta_0 \dfrac{d^2x^{(2)}}{du^2} + \gamma' y^{(2)} + \beta' x^{(2)} = \lambda_0 + \lambda_1\cos 2u + \lambda_2\sin 2u, \end{cases} \tag{40}$$

其中

$$\delta_0 = \frac{1}{2}\beta'(\vartheta_0^2 - \gamma')[\mu_{y0}w_{xx0} + \mu_0 w_{xxy0}],$$

$$\delta_1 = -\frac{1}{2}(\vartheta_0^2 - \gamma')[\mu_{y0}w_{xx0} + \mu_0 w_{xxy0}] - 2\beta'\vartheta_0^2 F_0 F_{y0},$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2}[F_{y0}\vartheta_0(\beta'^2 - F_0^2\vartheta_0^2) - F_0\vartheta_0(\vartheta_0^2 - \gamma')(\mu_{y0}w_{xx0} + \mu_0 w_{xxy0})],$$

$$\lambda_0=\mu_0h_2+\frac{1}{4}[(\vartheta_0^2-\gamma')(\mu_{y0}w_{xx0}+\mu_0w_{xxy0})-2F_0F_{y0}\vartheta_0^2(\vartheta_0^2-\gamma')+(3\mu_{y0}w_{yy0}+\mu_0w_{yy0})(\beta'^2+F_0^2\vartheta_0^2)],$$

$$\lambda_1=\frac{1}{4}[-(\vartheta_0^2-\gamma')(\mu_{y0}w_{xx0}+\mu_0w_{xxy0})-2F_0F_{y0}\vartheta_0^2(\vartheta_0^2-\gamma')+(3\mu_{y0}w_{yy0}+\mu_0w_{yy0})(F_0^2\vartheta_0^2-\beta'^2)],$$

$$\lambda_2=\frac{1}{2}[F_{y0}\vartheta_0\beta'(\vartheta_0^2-\gamma')-F_0\vartheta_0\beta'(3\mu_{y0}+w_{yy0}+\mu_0w_{yyy0})]\cdot$$

系统(21)的周期解族的1级近似,含有点 $P_0$ 邻域中参数 $f$ 的固定值

$$\begin{cases} x=x_0+(\vartheta_0^2-\gamma')c\sin u+\dfrac{\gamma'\delta_0-\beta'\lambda_0}{\alpha'\gamma'-\beta'^2}+ \\ \quad c^2\left\{16\vartheta_0^4-4(\alpha'+\gamma'+F_0^2)^2\vartheta_0^2+\alpha'\gamma'-\beta'^2\right\}^{-1}\times \\ \quad\left\{[(\gamma'-4\vartheta_0^2)\delta_1-\beta'\lambda_1-2F_0\vartheta_0\lambda_2]\cos 2u+\right. \\ \quad\left.[(\gamma'-4\vartheta_0^2)\delta_2-\beta'\lambda_2+2F_0\vartheta_0\lambda_1]\sin 2u\right\}, \\ y=y_0+c(\beta'\sin u-F_0\vartheta_0\cos u)+\dfrac{\alpha'\lambda_0-\beta'\delta_0}{\alpha'\gamma'-\beta'^2}+ \\ \quad c^2\left\{16\vartheta_0^4-4(\alpha'+\gamma'+F_0^2)\vartheta_0^2+\alpha'\gamma'-\beta'^2\right\}^{-1}\times \\ \quad\left\{[(\alpha'-4\vartheta_0^2)\lambda_0-\beta'\delta_1+2F_0\vartheta_0\delta_2]\cos 2u+\right. \\ \quad\left.[(\alpha'-4\vartheta_0^2)\lambda_2-\beta'\delta_2-2F_0\vartheta_0\delta_1]\sin 2u\right\}, \\ h=h_0+\dfrac{c^2\vartheta_0^2}{2\mu_0}[\beta'^2+(\vartheta_0^2-\gamma')-F_0^2\gamma']\cdot \end{cases}\tag{41}$$

1级近似周期运动的轨迹是相似的椭圆,具有共同中心 $P_0$・ 每个椭圆的轴与 $x$ 轴的夹角为

$$\frac{1}{2}\arctan\frac{2\beta'(\vartheta_0^2-\gamma')}{(\vartheta_0^2-\gamma')^2-\beta'^2-F_0\vartheta_0^2},\tag{42}$$

每根轨迹和一个 $h$ 值对应・ 椭圆共同中心的坐标为

$$(x,y)=\left(x_0+\frac{\gamma'\delta_0-\beta'\lambda_0}{\alpha'\gamma'-\beta'^2}c^2,\ y_0+\frac{\alpha'\lambda_0-\beta'\delta_0}{\alpha'\gamma'-\beta'^2}c^2\right)\cdot\tag{43}$$

# 4 结　论

通过构造惯性椭球体上的等温坐标系,将重力场和磁场中的轴对称刚性航天器的运动方程简化,变成在有势力和 Lorentz 力作用下带电粒子的平面运动方程,有势力和 Lorentz 力由沿轨道半径分布的磁场作用产生・ 利用 Liapunov 全纯积分定理,得到稳定的近似周期解,以及系统稳定的充分必要条件・

## [参　考　文　献]

[1] Mesch E, Schweizer G, Stopfkuchen K. Investigation of Earth Satellites With Magnetic Attitude Stabilization [M]. Germany: Control Division, Dornier_Werke, 1965.

[2] Beletsky V V. The Motion of Artificial Satellite About Its Center of Mass [M]. Moscow: Nauka, 1965.

[3] Kovalenko A P. Magnetic Systems of Control of Flying Apparati [M]. Moscow: Machinist, 1975.

[4] Guran A. Classification of singularities of a torque_free gyrostat satellite [J]. Mechanics Research Communications, 1992, **19**(5): 465—470.

[5] Lee Sanguk, Lee Jeong_Sook. Attitude control of geostationary satellite by using sliding mode control [J]. J Astron Space Sci, 1996, **13**(3): 168—173.

[6] Panagiotis Tsiotras, SHEN Hai_jun. Satellite attitude control and power tracking with energy/momentum wheels[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2001, **24**(1): 23—34.

[7] Guran A. Chaotic motion of a Kelvin type gyrostat in a circular orbit[J]. Acta Mechanica, 1992, **98**: 51—61.

[8] CHEN Li_qun, LIU Yan_zhu. Chaotic attitude motion of a magnetic rigid spacecraft and its control[J]. Non_Linear Mechanics, 2002, **37**: 293—504.

[9] CHEN Li_qun, LIU Yan_zhu, CHENG Gong. Chaotic attitude motion of a magnetic rigid spacecraft in a circular orbit near the equatorial plane[J]. Journal of the Franklin Institute, 2002, **339**: 121—128.

[10] Kolosoff G V. On some modification of Hamilton' s principle, applied to the problem of mechanics of a rigid body[J]. Tr Otd Fizich Nauk Ob_va liubit Estestvozn, 1903, **11**(5): 5—13.

[11] Yehia H M. On the reduction of the order of equations of motion of a rigid body about a fixed point [J]. Vestn MGU, Ser Mat Mech, 1976, **6**: 76—79.

[12] Liapunov A M. The general problem of stability of motion[Z]. Collected works, 1956, M_L, AN USSR.

[13] Yehia H M. Equivalent problems in rigid body dynamics—Ⅰ [J]. Celestial Mechanics, 1988, **41**: 275—288.

[14] Yehia H M. On the periodic nearly stationary motions of rigid body about a fixed point[J]. Prikl Math Mech, 1977, **41**(3): 571—573.

[15] Al' Nadzhar M Yu. Periodic motion of a satellite_gyrostat orbiting a central mass[J]. Cosmic Research, 1990, **27**(4): 541—543.

# Periodic Motions of a Spinning Rigid Spacecraft Under the Influence of the Gravitional and Magnetic Fields

Yehia A. Abdel_aziz[1], M. H. Yehia[2], F. A. Abd El_Salam[3], M. Radwan[3]

(1. National Research Institute of Astronomy and Geophysics, Helwan, Cairo, Egypt;
2. Mathematics Deptartment, Faculty of Science, Mansoura University, Mansoura, Egypt;
3. Astronomy Deptartment, Faculty of Science, Cairo University, Cairo, 12613, Egypt)

**Abstract:** The motion of a magnetized axisymmetric spacecraft about its center of mass in a circular orbit is considered, taking the gravitational and magnetic effects of the central body into account. Equations of motion of the redueced system are transformed to equations of plane motion of a charged particle under the action of electric and magnetic fields. Stationary motions of the system were determined and periodic motions near them are conustructed using the Liapounov theorem of the holomorphic integral.

**Key words:** periodic motions; Routhian; rigid spacecraft