文章编号: 1000_0887(2004) 06_0563_09

乘积 G_凸空间内的非空交定理和广义矢量平衡问题组*

丁协平

(四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066)

(我刊编委 丁协平来稿)

摘要: 利用作者在 G_凸空间内对集值映象簇得到的一个极大元存在性定理, 在非紧乘积 G_空间内, 对集值映象簇建立了某些新的非空交定理• 作为应用, 在非紧乘积 G_凸空间内, 对广义矢量平衡问题组证明了一些平衡存在性定理• 这些定理统一、改进和推广了文献中一些重要的已知结果•

关 键 词: 集值映象组; 非空交定理; 广义矢量平衡问题组; 乘积 G_凸空间
中图分类号: O177.92; O225　　文献标识码: A

引　　言

矢量变分不等式问题(VVIP) 首先由 Giannessi[1] 在有限维欧式空间内引入和研究• 此后许多作者从各个不同的方向扩展和推广了 VVIP• 其激发因素来源于 VVIP 和它的各种推广对矢量最优化, 优化控制, 数学规划, 运筹和经济平衡问题等学科有广泛和重要应用• 在具有集值映象的 VVIP 的应用的激励下, 各种广义矢量变分不等式问题(GVVIP) 和广义矢量平衡问题(GVEP) 已经变成了经典 VVIP 的重要发展方向, 见由 F. Giannessi[2] 编辑的书和其中的参考文献•

Pang[3] 已阐明各种平衡模型, 例如交通平衡问题、空间平衡问题、Nash 平衡问题和一般平衡规划问题均能统一地以定义在乘积集上的变分不等式作为模型• 他分解原变分不等式为容易求解的变分不等式组• 此分解方法也被 Zhu 和 Marcotte[4] 用于求解定义在不等式约束集上的变分不等式问题• 由这些因素的刺激, Cohen 和 Chaplais[5], 及 Ansari 和 Yao[6,7] 研究了定义在乘积集上的变分不等式组并且在各种不同的假设下证明了解的存在性定理•

最近 Ansari, Schaible 和 Yao[8] 引入了矢量平衡问题组和在拓扑矢量空间内建立了一些平衡存在定理• 作为应用, 他们对矢量变分不等式组和矢量最优化问题组得到了几个解的存在定理•

现在我们在乘积 G_凸空间内引入和研究一类新的广义矢量平衡问题组•

* 收稿日期: 2002_08_29; 修订日期: 2003_12_05
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871059); 四川省教育厅重点研究基金资助项目([2000] 25)
作者简介: 丁协平(1938—), 男, 四川自贡人, 教授(Tel: + 86_28_84760929; E_mail: dingxip@ sicnu. edu. cn) .

设 X 是拓扑空间和 I 是有限或无限指标集• 设 $\{D_i\}_{i\in I}$, $\{E_i\}_{i\in I}$, $\{Y_i\}_{i\in I}$ 和 $\{Z_i\}_{i\in I}$ 是 4 个拓扑空间族且令 $Y=\prod_{i\in I}Y_i$• 对每一 $i\in I$, 令 $T_i: X\to 2^{D_i}$, $S_i: X\to 2^{E_i}$, $C_i: X\to 2^{Z_i}$ 和 $\varphi_i: D_i\times E_i\times Y_i\to 2^{Z_i}$ 是集值映象• 一广义矢量平衡问题组(SGVEP) 是: 求 $\hat{x}\in X$ 使得对每一 $i\in I$

$$\forall y_i\in Y_i,\ \exists \hat{d}_i\in T_i(\hat{x}),\ \hat{e}_i\in S_i(\hat{x})\ \text{使得}\ \varphi_i(\hat{d}_i,\hat{e}_i,y_i)\ \text{¾}\ C_i(\hat{x})• \tag{1}$$

如果对每一 $i\in I$, 令 $D_i=X_i$, $E_i=X^i$, $T_i(x)=\pi_i(x)=x_i$ 和 $S_i(x)=\pi^i(x)$ 其中 $X=\prod_{i\in I}X_i$, $X^i=\prod_{j\in I, j\neq i}X_j$ 和 π_i、π^i 分别表 X 到 X_i 和 X^i 上的投影映象• 令 $\varphi_i(x_i,x^i,y_i)=F_i(x,y_i)$ 对一切 $(x,y_i)\in X\times Y_i$ 成立, 则 SGVEP (1) 化归下面广义矢量平衡问题组: 求 $\hat{x}\in X$ 使得对每一 $i\in I$

$$F_i(\hat{x},y_i)\ \text{¾}\ C_i(\hat{x}),\qquad \forall y_i\in Y_i• \tag{2}$$

显然由 Ansari, Schaible 和 Yao[8] 在拓扑矢量空间内引入和研究的矢量平衡问题组是 SGVEP (2) 的很特殊的情形•

当 I 是单元集时, SGVEP (2) 化归下面的广义矢量平衡问题(GVEP): 求 $\hat{x}\in X$ 使得

$$F(\hat{x},y)\ \text{¾}\ C(\hat{x}),\qquad \forall y\in Y, \tag{3}$$

其中 X, Y, Z 是拓扑空间, $F: X\times Y\to 2^Z$ 和 $C: X\to 2^Z$ 是集值映象•

问题(3) 由 Ding 和 Park[9] 和 Ding[10] 引入和研究, 它包含各种广义矢量平衡问题和广义矢量变分不等式问题作为很特殊的情形, 见[2, 9~ 13] 和其中的参考文献•

熟知拓扑(矢量)空间内集值映象的极大元存在定理及其在数理经济上的重要应用已被数学和经济学领域内的许多作者广泛研究• 最近作者[14, 15] 在乘积 G_凸空间内对一族集值映象证明了新的极大元存在性定理并给出了对重合点定理和极小极大不等式组的应用•

在本文中, 由应用作者[14] 对集值映象族的极大元存在定理, 首先在乘积 G_凸空间内对一族集值映象证明了某些非空交定理• 作为应用, 对 SGVEP (1) 在乘积 G_凸空间内建立了某些平衡存在性定理• 这些结果统一和推广了文献中几个重要的已知结果•

1 预 备 知 识

设 X 和 Y 是非空集• 2^Y 和 $\mathscr{F}(X)$ 分别表 Y 的一切子集的族和 X 的一切非空有限子集的族• 对 $A\in\mathscr{F}(X)$, $|A|$ 表 A 的基数• 令 Δ_n 是具有顶点 $e_0, e_1, \dots, e_n$ 的标准 n_维单形• 如果 J 是 $\{0, 1, \dots, n\}$ 的非空子集, 用 Δ_J 表顶点集 $\{e_j: j\in J\}$ 的凸包• 广义凸(或 G_凸) 空间概念由 Park 和 Kim[16, 17] 在一多余的保序条件下引入• 最近 Park[18] 去掉了此多余条件, 给出了 G_凸空间的如下定义• 称 (Y,Γ) 是一 G_凸空间, 如果 Y 是一拓扑空间和 $\Gamma: \mathscr{F}(Y)\to 2^Y/\{\emptyset\}$ 使得对每一 $M\in\mathscr{F}(Y)$, $|M|=n+1$, 存在一连续映象 $\varphi_M: \Delta_n\to\Gamma(M)$ 使得 $B\in\mathscr{F}(M)$, $|B|=|J|+1$ 蕴含 $\varphi_M(\Delta_J)\subset\Gamma(B)$, 其中 Δ_J 表对应于 $B\in\mathscr{F}(M)$ 的 Δ_n 的面•

令 (Y,Γ) 是一 G_凸空间和 $D\subset Y$• 称 D 是 G_凸的如果对每一 $M\in\mathscr{F}(D)$, $\Gamma(M)\subset D$• G_凸空间的主要例子是拓扑矢量空间的凸子集, Lassonde 的凸空间, Horvath 的 C_空间(或 H_空间), 有 Michal 凸结构的度量空间, Pasicki 的 S_可缩空间, Horvath 的伪凸空间, Komiya 的凸空间, Bielawski 的简单凸性空间, Joo 的伪凸空间等• 例如见[16~ 18]•

令 X 是拓扑空间和 (Y,Γ) 是 G_凸空间• Park[19] 引入了更好的容许映象类 $\mathscr{B}(Y,X)$ 如

下: $F \in \mathscr{B}(Y, X) \Leftrightarrow F: Y \to 2^X$ 是上半连续集值映象具有紧值使得对任何$A \in \mathscr{F}(Y)$, $|A| = n+1$和对任何连续映象 $\phi: F(\Gamma(A)) \to \Delta_n$, 结合映象 $\phi \circ F|_{\Gamma(A)} \circ \phi_A: \Delta_n \to 2^{\Delta_n}$ 有不动点•

令X 是拓扑空间和D 是X 的非空子集• 称 D 在X 内是紧开(或紧闭) 的如果对 X 的每一非空紧子集K, $D \cap K$ 在K 内是开(或闭) 的• 显然X 的每一开(或闭) 子集在X 内是紧开(或紧闭) 的•

令 X 是拓扑空间和I 是有限或无限指标集• 对每一$i \in I$, 令(Y_i, Γ_i) 是G_凸空间和$Y = \prod_{i\in I} Y_i$• 对每一 $i \in I$, π_i 是Y 到Y_i 上的投影映射• 定义 $\Gamma: \mathscr{F}(Y) \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ 如下: 对每一$D \in \mathscr{F}(Y)$, $\Gamma(D) = \prod_{i\in I}\Gamma_i(\pi_i(D))$, 则由使用Tan 和 Zhang[20]的定理 4.1的证明相同的论证, 容易证明(Y, Γ) 也是一G_凸空间• 令$F \in \mathscr{B}(Y, X)$ 和对每一$i \in I$, 令$A_i: X \to 2^{Y_i}$ 是集值映象• 对每一$y \in Y$, 记$y = (y_i)_{i\in I}$ 其中$y_i = \pi_i(y) \in Y_i$• 对每一 $i \in I$, $A_i: X \to 2^{Y_i}$ 被说成是一$G_{\mathscr{B}}$_映象如果

(a) 对每一$N \in \mathscr{F}(Y)$, $F(\Gamma(N)) \cap (\bigcap_{y\in N} A_i^{-1}(\pi_i(y))) = \varnothing$;

(b) 对每一$y_i \in Y_i$, $A_i^{-1}(y_i) = \{x \in X: y_i \in A_i(x)\}$在 X 内紧开•

称族$\{A_i\}_{i\in I}$ 是一$G_{\mathscr{B}}$_映象族如果每一A_i 是$G_{\mathscr{B}}$_映象• 显然$G_{\mathscr{B}}$_映象族是新的• 如果$F = S$ 是单值连续映象和对每一$x \in X$, $A_i(x)$ 是G_凸的, 则条件: 对每一$y \in Y$, $y_i \notin A_i(S(y))$ 蕴含条件(a) 成立• 的确如果(a) 不真, 则存在 $N \in \mathscr{F}(Y)$ 和 $y \in \Gamma(N)$ 使得 $F(y) = S(y) \in \bigcap_{y\in N} A_i^{-1}(\pi_i(y))$ 且因此对每一$y \in N$, $y_i = \pi_i(y) \in A_i(S(y))$, 即 $\pi_i(N) \subseteq A_i(S(y))$• 从$y \in \Gamma(N)$ 推得$y_i = \pi_i(y) \in \pi_i(\Gamma(N)) = \Gamma_i(\pi_i(N))$• 从$A_i(S(y))$ 的 G_凸性推得$y_i = \pi_i(y) \in \Gamma_i(\pi_i(N)) \subset A_i(S(y))$, 这与条件对每一$y \in Y$, $y_i \notin A_i(S(y))$ 相矛盾• 因此每一由 Deguire, Tan 和 Yuan[21, p. 934]引入的L_S_映象必是一$G_{\mathscr{B}}$_映象, 其逆一般不真•

我们需要下面的极大元存在定理, 它是 Ding[14]的定理 2.6•

引理 1.1 设X 是一拓扑空间, K 是X 的非空紧子集和I 是任意指标集• 对每一$i \in I$, 令(Y_i, Γ_i) 是G_凸空间和$Y = \prod_{i\in I} Y_i$ 是如前面定义的 G_凸空间• 令$F \in \mathscr{B}(Y, X)$ 和 $A_i: X \to 2^{Y_i}$ 使得对每一$i \in I$

(i) 对每一$y_i \in Y_i$, $A_i^{-1}(y_i)$ 在X 内是紧开的;

(ii) 对每一$N \in \mathscr{F}(Y)$, $F(\Gamma(N)) \cap (\bigcap_{y\in N} A_i^{-1}(\pi_i(y))) = \varnothing$;

(iii) 对每一$i \in I$ 和$N_i \in \mathscr{F}(Y_i)$, 存在 Y_i 的非空紧 G_凸子集L_{N_i} 包含N_i, 和对每一$x \in X \setminus K$, 存在$i \in I$ 满足$L_{N_i} \cap A_i(x) \neq \varnothing$•

则存在$\hat{x} \in K$ 使得对每一$i \in I$, $A_i(\hat{x}) = \varnothing$•

注 1.1 引理 1.1从下列方面改进和推广了 Deguire, Tan 和 Yuan[21] 的定理 7: 1) 从Hausdoff 拓扑矢量空间的非空凸子集到 G_凸空间; 2) 从L_S_映象族到$G_{\mathscr{B}}$_映象族•

2 非空交定理

下面非空交定理是引理 1.1 的一个等价形式•

定理 2.1 设X 是拓扑空间, K 是X 的非空紧子集和I 是任意指标集• 对每一$i \in I$, 令(Y_i, Γ_i) 是G_凸空间和$Y = \prod_{i\in I} Y_i$ 是如前定义的G_凸空间• 令$F \in \mathscr{B}(Y, X)$ 和 $G_i: Y_i \to$

2^X 使得对每一 $i \in I$

(i) 对每一 $y_i \in Y_i$, $G_i(y_i)$ 在 X 内是紧闭的;

(ii) 对每一 $N \in \mathscr{F}(Y)$, $F(\Gamma(N)) \cap (\bigcap_{y \in N}(X \setminus G_i(\pi_i(y)))) = \emptyset$;

(iii) 对每一 $i \in I$ 和 $N_i \in \mathscr{F}(Y_i)$, 存在 Y_i 的非空紧 G_凸子集 L_{N_i} 包含 N_i, 和对每一 $x \in X \setminus K$, 存在 $i \in I$ 满足 $L_{N_i} \cap (Y_i \setminus G_i^{-1}(x)) \neq \emptyset$.

则我们有

$$K \cap (\bigcap_{i \in I} \bigcap_{y_i \in Y_i} G_i(y_i)) \neq \emptyset.$$

证明 引理 1.1 ⇒定理 2.1. 对每一 $i \in I$ 定义集值映象 $A_i: X \to 2^{Y_i}$ 如下:

$$A_i(x) = Y_i \setminus G_i^{-1}(x), \qquad \forall x \in X.$$

则我们有对每一 $y_i \in Y_i$,

$$A_i^{-1}(y_i) = \left\{x \in X: y_i \in A_i(x)\right\} = \left\{x \in X: y_i \in (Y_i \setminus G_i^{-1}(x))\right\} = \left\{x \in X: x \notin G_i(y_i)\right\} = X \setminus G_i(y_i).$$

由(i), $A_i^{-1}(y_i)$ 在 X 内是紧开的且因此引理 1.1 的条件(i) 被满足. 显然条件(ii) 和(iii) 蕴含引理 1.1 的条件(ii) 和(iii) 成立. 由引理 1.1, 存在 $\hat{x} \in K$ 使得对每一 $i \in I$, $A_i(\hat{x}) = \emptyset$. 因此我们有对一切 $i \in I$, $A_i(\hat{x}) = Y_i \setminus G_i^{-1}(\hat{x}) = \emptyset$ 和 $Y_i = G_i^{-1}(\hat{x})$. 由此推得对一切 $y_i \in Y_i$ 和 $i \in I$, $\hat{x} \in G_i(y_i)$ 和 $\hat{x} \in \bigcap_{i \in I} \bigcap_{y_i \in Y_i} G_i(y_i)$. 因此我们得到

$$K \cap (\bigcap_{i \in I} \bigcap_{y_i \in Y_i} G_i(y_i)) \neq \emptyset.$$

定理 2.1 ⇒ 引理 1.1. 对每一 $i \in I$, 定义集值映象 $G_i: Y_i \to 2^X$ 如下:

$$G_i(y_i) = X \setminus A_i^{-1}(y_i), \qquad \forall y_i \in Y_i.$$

由引理 1.1 的条件(i) ~ (iii) 和 G_i 的定义, 容易看出定理 2.1 的条件(i) ~ (iii) 被满足. 由定理 2.1 有

$$K \cap (\bigcap_{i \in I} \bigcap_{y_i \in Y_i} G_i(y_i)) \neq \emptyset.$$

任取 $\hat{x} \in K \cap (\bigcap_{i \in I} \bigcap_{y_i \in Y_i} G_i(y_i))$, 我们有 $\hat{x} \in K$ 和

$$\hat{x} \in G_i(y_i) = X \setminus A_i^{-1}(y_i), \qquad \forall y_i \in Y_i \text{ 和 } i \in I.$$

由此推得

$$y_i \notin A_i(\hat{x}), \qquad \forall y_i \in Y_i \text{ 和 } i \in I,$$

且因此对一切 $i \in I$, $A_i(\hat{x}) = \emptyset$. 引理 1.1 的结论成立.

注 2.1 定理 2.1 是 Park 和 Kim[22] 的定理 2 和定理 4 的改进变型. 但我们的论证方法完全不同于[22] 中的证法.

定理 2.2 设 I 是任意指标集. 对每一 $i \in I$, 令 (X_i, Γ_i) 是 G_凸空间, $X = \prod_{i \in I} X_i$ 是如前面定义的 G_凸空间, 和 K 是 X 的非空紧子集. 令 $G_i: X_i \to 2^X$ 使得对每一 $i \in I$

(i) 对每一 $x_i \in X_i$, $G_i(x_i)$ 在 X 内是紧闭的;

(ii) 对每一 $N \in \mathscr{F}(X)$, $\Gamma(N) \cap (\bigcap_{x \in N}(X \setminus G_i(\pi_i(x)))) = \emptyset$;

(iii) 对每一 $i \in I$ 和 $N_i \in \mathscr{F}(X_i)$, 存在 X_i 的非空紧 G_凸子集 L_{N_i} 包含 N_i, 和对每一 $x \in X \setminus K$, 存在 $i \in I$ 满足 $L_{N_i} \cap (X_i \setminus G_i^{-1}(x)) \neq \emptyset$.

则我们有

$$K \cap \left(\bigcap_{i\in I}\bigcap_{y_i\in X_i} G_i(y_i)\right) \neq \varnothing .$$

证明　对每一 $i \in I$, 令 $Y_i = X_i, X = Y = \prod_{i\in I} X_i$, 和令 F 是恒等映象. 则容易看出定理2.2的结论由定理2.1推得.

3　广义矢量平衡的存在性

本节中我们将使用定理2.1来证明SGVEP(1)的某些平衡存在定理. 某些特殊情形也被讨论.

定理3.1　设 X 是拓扑空间, K 是 X 的非空紧子集和 I 是任意指标集. 令 $(Y_i, \Gamma_i)_{i\in I}$ 是一G_凸空间族. 令 $\{D_i\}_{i\in I}$, $\{E_i\}_{i\in I}$ 和 $\{Z_i\}_{i\in I}$ 是拓扑空间族. 令 $Y = \prod_{i\in I} Y_i$ 是如前定义的G_凸空间. 令 $F \in \mathscr{B}(Y, X)$ 和对每一 $i \in I$, 令 $T_i: X \to 2^{D_i}$, $S_i: X \to 2^{E_i}$, $C_i: X \to 2^{Z_i}$ 和 $\varphi_i: D_i \times E_i \times Y_i \to 2^{Z_i}$ 是集值映象使得对每一 $i \in I$

(i) 由 $W_i(x) = Z_i \setminus C_i(x)$ 定义的映象 $W_i: X \to 2^{Z_i}$ 有闭图 $\mathrm{Gr}(W_i)$;

(ii) T_i 和 S_i 是上半连续的具有非空紧值;

(iii) 对每一 $y_i \in Y_i$, $(d_i, e_i) \mapsto \varphi_i(d_i, e_i, y_i)$ 在 $D_i \times E_i$ 上是上半连续的具有非空紧值;

(iv) 对每一 $N \in \mathscr{F}(Y)$ 和对每一 $x \in F(\Gamma(N))$, 存在 $d_i \in T_i(x)$, $e_i \in S_i(x)$ 和 $y \in N$ 使得 $\varphi_i(d_i, e_i, \pi_i(y)) \not\subseteq C_i(x)$;

(v) 对每一 $N_i \in \mathscr{F}(Y_i)$, 存在 Y_i 的非空紧G_凸子集 L_{N_i} 包含 N_i, 和对每一 $x \in X \setminus K$, 存在 $i \in I$ 和 $y_i \in L_{N_i}$ 满足

$$\varphi_i(d_i, e_i, y_i) \subseteq C_i(x), \qquad \forall d_i \in T_i(x) \text{ 和 } e_i \in S_i(x).$$

则存在 $\hat{x} \in K$ 使得对每一 $i \in I$

$$\forall y_i \in Y_i,\ \exists \hat{d}_i \in T_i(\hat{x}), \hat{e}_i \in S_i(\hat{x}) \text{ 使得 } \varphi_i(\hat{d}_i, \hat{e}_i, y_i) \not\subseteq C_i(\hat{x}).$$

证明　对每一 $i \in I$, 定义集值映象 $G_i: Y_i \to 2^X$ 如下:

$$G_i(y_i) = \left\{x \in X: \exists d_i \in T_i(x), e_i \in S_i(x) \text{ 使得 } \varphi_i(d_i, e_i, y_i) \not\subseteq C_i(x)\right\}, \forall y_i \in Y_i.$$

首先证明对每一 $y_i \in Y_i$, $G_i(y_i)$ 在 X 内是紧闭的. 对 X 的任意紧子集 M, 设 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $M \cap G_i(y_i)$ 内一网和 $x_\lambda \to x$. 则我们有 $x \in M$ 和对每一 $i \in I$ 和 $\lambda \in \Lambda$ 存在 $(d_\lambda)_i \in T_i(x_\lambda)$ 和 $(e_\lambda)_i \in S_i(x_\lambda)$ 使得

$$\varphi_i((d_\lambda)_i, (e_\lambda)_i, y_i) \not\subseteq C_i(x_\lambda). \tag{4}$$

因为 M 是紧集, 由(ii)和Aubin和Ekeland[23]的命题3.1.11, $T_i(M)$ 和 $S_i(M)$ 分别在 D_i 和 E_i 内是紧的. 不失一般性, 我们可假设 $(d_\lambda)_i \to d_i$ 和 $(e_\lambda)_i \to e_i$ 且由 T_i 和 S_i 的上半连续性, 我们有 $d_i \in T_i(x)$ 和 $e_i \in S_i(x)$. 对每一 $y_i \in Y_i$, 由(4), 存在 $(v_\lambda)_i \in \varphi_i((d_\lambda)_i, (e_\lambda)_i, y_i)$ 使得 $(v_\lambda)_i \notin C_i(x_\lambda)$ 且因此 $(v_\lambda)_i \in W_i(x_\lambda)$. 因为 $T_i(M) \times S_i(M)$ 是紧的, 由条件(iii)和Aubin和Ekeland[23]的命题3.1.11, $\varphi_i(T_i(M), S_i(M), y_i)$ 是紧的. 不失一般性, 我们能假设 $(v_\lambda)_i \to v_i$ 且由(iii)得到 $v_i \in \varphi_i(d_i, e_i, y_i)$ 对每一 $i \in I$ 成立. 由条件(i), 我们有 $v_i \in W_i(x)$ 且因此 $v_i \notin C_i(x)$. 由此推得 $x \in M \cap G_i(y_i)$, 即对每一 $i \in I$ 和 $y_i \in Y_i$, $G_i(y_i)$ 在 X 内是紧闭的. 定理2.1的条件(i)被满足. 从条件(iv)推得对每一 $N \in \mathscr{F}(Y)$ 有 $F(\Gamma(N)) \subseteq \bigcup_{y\in N} G_i(\pi_i(y))$, 故 $F(\Gamma(N)) \cap (\bigcap_{y\in N}(X \setminus G_i(\pi_i(y)))) = \varnothing$. 定理2.1的条件(ii)成立. 对每一 $i \in I$ 和 $x \in X$, 我们有

$$G_i^{-1}(x)=\left\{y_i\in Y_i:\exists\, d_i\in T_i(x),\ e_i\in S_i(x)\text{ 使得 }\varphi_i(d_i,e_i,y_i)\not\subseteq C_i(x)\right\},$$

且因此

$$Y_i\setminus G_i^{-1}(x)=\left\{y_i\in Y_i:\varphi_i(d_i,e_i,y_i)\subseteq C_i(x),\ \forall d_i\in T_i(x),\ e_i\in S_i(x)\right\}•$$

由条件(v),对每一$N_i\in\mathscr{F}(Y_i)$,存在Y_i的非空紧G_凸子集L_{N_i}包含N_i,和对每一$x\in X\setminus K$,存在$i\in I$和$y_i\in L_{N_i}$满足对一切$d_i\in T_i(x)$和$e_i\in S_i(x)$, $\varphi_i(d_i,e_i,y_i)\subseteq C_i(x)$• 因此,我们有$y_i\in Y_i\setminus G_i^{-1}(x)$• 故$L_{N_i}\cap(Y_i\setminus G_i^{-1}(x))\neq\emptyset$和定理2.1的条件(iii)成立• 由定理2.1,有

$$K\cap\Big(\bigcap_{i\in I}\bigcap_{y_i\in Y_i}G_i(y_i)\Big)\neq\emptyset•$$

任取$\hat{x}\in K\cap(\bigcap_{i\in I}\bigcap_{y_i\in Y_i}G_i(y_i))$,得到$\hat{x}\in K$和对每一$i\in I$

$$\forall y_i\in Y_i,\ \exists\,\hat{d}_i\in T_i(\hat{x}),\hat{e}_i\in S_i(\hat{x})\text{ 使得 }\varphi_i(\hat{d}_i,\hat{e}_i,y_i)\not\subseteq C_i(\hat{x}),$$

即$\hat{x}$是SGVEP(1)的一平衡点•

作为定理3.1的简单推论,我们得到G_凸空间内广义隐变分不等式组解的下面存在性定理•

系3.1 设I是任意指标集,$(X_i,\Gamma_i)_{i\in I}$是一G_凸空间族和$\left\{D_i\right\}_{i\in I}$是一族拓扑空间•令$X=\prod_{i\in I}X_i$是如前定义的G_凸空间• 对每一$i\in I$,令$T_i:X\to 2^{D_i}$是集值映象和$\varphi_i:D_i\times X_i\times X_i\to\mathbf{R}$是实值函数使得对每一$i\in I$

(i) T_i是上半连续的具有非空紧值;

(ii) 对每一$y_i\in X_i$, $(d_i,x_i)\mapsto\varphi_i(d_i,x_i,y_i)$在$D_i\times X_i$上连续;

(iii) 对每一$N\in\mathscr{F}(X)$和对每一$x\in\Gamma(N)$,存在$d_i\in T_i(x)$和$y\in N$使得$\varphi_i(d_i,x_i,\pi_i(y))\leqslant 0$;

(iv) 存在X_i的非空紧子集K_i和对每一$N_i\in\mathscr{F}(X_i)$存在X_i的非空紧G_凸子集L_{N_i}包含N_i,和对每一$x\in X\setminus K$,存在$i\in I$和$y_i\in L_{N_i}$满足

$$\varphi_i(d_i,x_i,y_i)>0,\qquad\forall d_i\in T_i(x)•$$

则存在$\hat{x}\in K$使得对每一$i\in I$

$$\forall y_i\in X_i,\ \exists\,\hat{d}_i\in T_i(\hat{x})\text{ 使得 }\varphi_i(\hat{d}_i,\hat{x}_i,y_i)\leqslant 0•$$

即$\hat{x}\in K$是广义隐变分不等式组的一解•

证明 对每一$i\in I$,令$(X_i,\Gamma_i)=Y_i=E_i$, $X=\prod_{i\in I}X_i=Y$和$Z_i=\mathbf{R}$• 令F是X上的恒等映象和对每一$i\in I$, $x\in X$,令$C_i(x)=(0,+\infty)$和$S_i(x)=\pi_i(x)=x_i$其中π_i是X到X_i上的投影映象• 显然$K=\prod_{i\in I}K_i$是X的紧子集• 容易看出定理3.1的一切条件被满足• 由定理3.1,存在$\hat{x}\in K$使得对每一$i\in I$

$$\forall y_i\in X_i,\ \exists\,\hat{d}_i\in T_i(\hat{x})\text{ 使得 }\varphi_i(\hat{d}_i,\hat{x}_i,y_i)\leqslant 0•$$

即$\hat{x}\in K$是广义隐变分不等式组的解•

注3.1 系3.1在很弱的假设下改进和推广了Ansari和Yao[7]的定理2.1和2.2到乘积G_凸空间•

定理3.2 设I是任意指标集,$(X_i,\Gamma_i)_{i\in I}$和$(Y_i,\Gamma_i')_{i\in I}$是两族G_凸空间• 令$\left\{Z_i\right\}_{i\in I}$是拓扑空间族,和$X=\prod_{i\in I}X_i$和$Y=\prod_{i\in I}Y_i$是如前定义的G_凸空间• 令$F:Y\to X$是连续单值映象,和对每一$i\in I$, $C_i:X\to 2^{Z_i}$和$f_i:X\times Y_i\to 2^{Z_i}$是集值映象使得对每一$i\in I$

(i) 由$W_i(x)=Z_i\setminus C_i(x)$定义的映象$W_i:X\to 2^{Z_i}$有闭图$\mathrm{Gr}(W_i)$;

(ii) 对每一 $y_i \in Y_i$, $x \mapsto f_i(x, y_i)$ 是上半连续的具有非空紧值;

(iii) 对每一 $N \in \mathscr{F}(Y)$ 和对每一 $x \in F(\Gamma(N))$, 存在 $x \in X$ 和 $y \in N$ 使得 $f_i(x, \pi_i(y))$ ¾ $C_i(x)$;

(iv) 存在 X_i 的非空紧子集 K_i 和对每一 $N_i \in \mathscr{F}(Y_i)$ 存在 Y_i 的非空紧G_凸子集 L_{N_i} 包含 N_i, 且对每一 $x \in X \setminus K$, 存在 $i \in I$ 和 $y_i \in L_{N_i}$ 满足

$$f_i(x, y_i) \subseteq C_i(x),$$

其中 $K = \prod_{i \in I} K_i$•

则存在 $\hat{x} \in K$ 使得对每一 $i \in I$

$f_i(\hat{x}, y_i)$ ¾ $C_i(\hat{x})$, $\quad \forall y_i \in Y_i$•

证明 显然 $K = \prod_{i \in I} K_i$ 是 X 的非空紧子集• 对每一 $i \in I$, 令 $D_i = X_i$ 和 $E_i = X^i = \prod_{j \in I, j \neq i} X_j$• 对每一 $x \in X$ 和 $y_i \in Y_i$, 记 $x = (x_i, x^i)$ 和 $f_i(x, y_i) = \varphi_i(x_i, x^i, y_i)$ 其中 $x^i \in X^i$• 对每一 $i \in I$ 和 $x \in X$, 令 $T_i(x) = \pi_i(x) = x_i$ 和 $S_i(x) = \pi^i(x) = x^i$ 其中 π_i 和 π^i 分别是从 X 到 X_i 和 X^i 的投影映象• 容易检验定理3.1的一切条件被满足• 由定理3.1, 存在 $\hat{x} \in K$ 使得对每一 $i \in I$

$f_i(\hat{x}, y_i) = \varphi_i(\hat{x}_i, \hat{x}^i, y_i)$ ¾ $C_i(\hat{x})$, $\quad \forall y_i \in Y_i$•

在定理3.2中, 当 I 是单点集时, 我们得到下面结果•

系 3.2 设 (X, Γ) 和 (Y, Γ') 是G_凸空间和 Z 是拓扑空间• 设 $F: Y \to X$ 是连续单值映象和 $C: X \to 2^Z$ 和 $f: X \times Y \to 2^Z$ 是集值映象使得

(i) 由 $W(x) = Z \setminus C(x)$ 定义的映象 $W: X \to 2^Z$ 有闭图 $\mathrm{Gr}(W)$;

(ii) 对每一 $y \in Y$, $x \mapsto f(x, y)$ 是上半连续的具有非空紧值;

(iii) 对每一 $N \in \mathscr{F}(Y)$ 和对每一 $x \in F(\Gamma(N))$, 存在 $x \in X$ 和 $y \in N$ 使得 $f(x, y)$ ¾ $C(x)$;

(iv) 存在 X 的紧子集 K 和对每一 $N \in \mathscr{F}(Y)$, 存在 Y 的非空紧G_凸子集 L_N 包含 N 使得对每一 $x \in X \setminus K$, 存在 $y \in L_N$ 满足

$$f(x, y) \subseteq C(x)•$$

则存在 $\hat{x} \in X$ 使得

$f(\hat{x}, y)$ ¾ $C(\hat{x})$, $\quad \forall y \in Y$•

注 3.2 定理3.2在相当弱的假设下改进和推广了Ansari, Schaible 和 Yao[8] 的定理2.1和2.2从拓扑矢量空间到G_凸空间• 对与系3.2密切相关的结果, 读者可参考[6~13]•

[参 考 文 献]

[1] Giannessi F. Theorems of alternative, quadratic programs and complementarity problems[A]. In: R W Cottle, F Giannessi, J_L Lions Eds. Variational Inequalities and Complementarity Problems[C]. New York: J Wiley Sons, 1980, 151—186.

[2] Giannessi F. Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria Mathematics Theories[M]. London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[3] Pang J S. Asymmetric variational inequality problems over product sets: applications and iterative methods[J]. Math Programming, 1985, **31**(2): 206—219.

[4] Zhu D L, Marcotte P. Co_coercivity and its role in the convergence of iterative schemes for solving variational inequalities[J]. SIAM J Optim, 1996, **6**(3): 714—726.

[5] Cohen G, Chaplais F. Nested monotony for variational inequalities over product of spaces and convergence of iterative algorithms[J]. J Optim Theory Appl, 1988, **59**(2): 360—390.

[6] Ansari Q H, Yao J C. A fixed point theorem and its applications to a system of variational inequalities[J]. Bull Austral Math Soc, 1999, **59**(2): 433—442.

[7] Ansari Q H, Yao J C. System of generalized variational inequalities and their applications[J]. Appl Anal, 2000, **76**(3/4): 203—217.

[8] Ansari Q H, Schaible S, Yao J C. System of vector equilibrium problems and their applications[J]. J Optim Theory Appl, 2000, **107**(3): 547—557.

[9] Ding X P, Park J Y. Fixed points and generalized vector equilibrium problems in G_convex spaces [J]. Indian J Pure Appl Math, 2003, **34**(6): 973—990.

[10] DING Xie_ping, Park J Y. Generalized vector equilibrium problems in generalized convex space[J]. J Optim Theory Appl, 2004, **120**(2): 327—353.

[11] Ansari Q H, Yao J C. An existence result for the generalized vector equilibrium problem[J]. Appl Math Lett, 1999, **12**(8): 53—56.

[12] Oettli W, Schläger D. Existence of equilibria for g_monotone mappings[A]. In: W Takahashi, T Tanaka Eds. Nonlinear Analysis and Convex Analysis [C]. Singapore: World Scientific Pub, 1999, 26—33.

[13] Lin L J, Yu Z T. Fixed_point theorems and equilibrium problems[J]. Nonlinear Anal, 2001, **43**: 987—999.

[14] 丁协平. 乘积 G_凸空间内的 G_B_优化映象的极大元及其应用(Ⅰ)[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(6): 583—594.

[15] 丁协平. 乘积 G_凸空间内的 G_B_优化映象的极大元及其应用(Ⅱ)[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(9): 899—905.

[16] Park S, Kim H. Coincidence theorems for admissible multifunctions on generalized convex spaces [J]. J Math Anal Appl, 1996, **197**(1): 173—187.

[17] Park S, Kim H. Foundations of the KKM theory on generalized convex spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **209**(3): 551—571.

[18] Park S. Continuous selection theorems for admissible multifunctions on generalized convex spaces [J]. Numer Funct Anal Optimiz, 1999, **25**(3): 567—583.

[19] Park S. Fixed points of admissible maps on generalized convex spaces[J]. J Korean Math Soc, 2000, **37**(4): 885—899.

[20] Tan K K, Zhang X L. Fixed point theorems on G_convex spaces and applications[J]. Proc Nonlinear Funct Anal Appl, 1996, **1**: 1—19.

[21] Deguire P, Tan K K, Yuan X Z. The study of maximal elements, fixed points for L_S_majorized mappings and their applications to minimax and variational inequalities in product topological spaces[J]. Nonlinear Anal, 1999, **37**: 933—951.

[22] Park S, Kim H, Coincidence theorems on a product of generalized convex spaces and applications to equilibria[J]. J Korean Math Soc, 1999, **36**(4): 813—828.

[23] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis[M]. New York: John Wiley & Sons, 1984.

Nonempty Intersection Theorems and System of Generalized Vector Equilibrium Problems in Product G_Convex Spaces

DING Xie_ping
(Department of Mathematics, Sichuan Normal University,
Chengdu 610066, P.R.China)

Abstract: By using an existence theorems of maximal elements for a family of set_valued mappings in G_convex spaces due to the author, some new nonempty intersection theorems for a family of set_valued mappings were established in noncompact product G_convex spaces. As applications, some equilibrium existence theorems for a system of generalized vector equilibrium problems were proved in noncompact product G_convex spaces. These theorems unify, improve and generalize some important known results in literature.

Key words: family of set_valued mapping; nonempty intersection theorem; system of generalized vector equilibrium problem; product G_convex space