

文章编号: 1000-0887(2004) 06_0581_10

数据同化中的伴随方法的有关问题的研究^{*}

吕咸青^{1,2}, 吴自库^{1,2}, 谷 艺³, 田纪伟^{1,2}

- (1. 中国海洋大学 海洋环境学院, 青岛 266003;
2. 教育部物理海洋重点实验室, 青岛 266003;
3. 青岛大学 信息学院, 青岛 266071)

(李家春推荐)

摘要: 关于伴随方法应用中只能利用模式的伴随的观点, 被认为是有疑问的。所作的数值模拟实验表明, 对于潮波模型而言, 方程的伴随能够得到与模式的伴随同样的结果: 调和常数的实测值与模拟值的振幅差的绝对值的平均小于 5.0 cm , 迟角差的绝对值的平均小于 5.0° 。这些结果都能够体现渤、黄海 M_2 分潮的基本特征。作为对比, 也利用前人的方法对渤、黄海的 M_2 分潮潮波进行了数值模拟, 首先借助于历史资料和观测资料得到开边界的初始猜测, 然后对开边界的初始猜测值进行调整, 以得到与高度计资料之差尽可能小的模拟结果。但由于开边界的值共有 72 个, 究竟有哪些值需要调整, 需要如何调整, 只有经过不断的调试, 才能部分地解决这些问题。工作量巨大且很难得到令人满意的结果。该文实现了确定开边界条件的自动化过程, 这与前人的方法相比, 有无可比拟的优势。需要特别强调的是如果利用方程的伴随, 可以避免繁琐而冗长的数学推导。因而说明方程的伴随也应该引起足够的重视。

关键词: 数据同化; 变分分析; 伴随方法; 潮汐; 开边界条件
中图分类号: P731.2 **文献标识码:** A

引 言

近些年来, 人们发展了一些数据同化方法, 如多项式内插方法、统计最优插值方法以及变分分析方法等。变分分析方法中的伴随方法在大气和海洋的研究中得到了广泛的应用^[1]。它被用来解决许多不同类型的实际问题, 其中包括: 对模型中的参数、初始条件或边界条件等进行优化。

在利用伴随方法解决实际问题的过程中, 极其重要的环节是如何得到恰当的伴随方程以及有关控制参数的梯度。有两种途径解决这个问题: 一个途径是利用差分格式去导出相应的伴随差分格式(模式的伴随); 另一个途径是利用原方程的连续形式去导出其对应的伴随方程, 并匹配其相应的差分格式(方程的伴随)。两种途径分别导出的伴随差分格式及其参数校正关系是不同的; 但究竟那个好些, 从理论上很难判断其优劣。

* 收稿日期: 2002_08_10; 修订日期: 2003_12_08

基金项目: 国家重点基础研究发展规划资助项目(G1999043808); 国家 863 计划资助项目(2001AA633030); 国家自然科学基金资助项目(40076004)

作者简介: 吕咸青(1963—), 男, 山东胶南人, 教授, 博士(联系人。Tel: + 86_532_2032971(o), + 86_532_5902260(h); Fax: + 86_532_2032471; E_mail: xqinglv@mail.ouc.edu.cn)*

Talagrand^[2] 强调数据同化只能利用模式的伴随, Thacker^[3]、Smedstad^[4]、Schroter^[5] 等对上述观点给予支持。他们的根据之一在于离散的动力学模型作为约束, 之二在于观测结果是离散的。但我们认为他们的观点是值得商榷的: 他们所阐述的理由并不充分, 模式的伴随并不是逻辑上的必然。

Sirkes^[6] 针对一维对流扩散方程所作的数值模拟实验表明: 模式的伴随和方程的伴随对得到梯度而言是同样有效的。我们作过的理想实验^[7] 也表明用方程的伴随所取得的结果与用模式的伴随所取得的结果几乎是没有任何差异。我们所作的实际海区的数值模拟实验表明: 对于潮波模型而言, 分别利用方程的伴随与模式的伴随, 两者所取得的结果之间几乎没有差异。我们之所以要强调方程的伴随, 是因为在利用伴随法反演模型中的控制变量的过程中发现: 如果利用方程的伴随, 可以避免繁琐而冗长的数学推导, 实现起来要相对容易得多。

潮汐潮流数值模拟中的一个主要难点在于开边界条件的确定。在一般的数值模拟工作中, 对开边界的处理主要是依靠经验的积累和主观的判断; 工作量大并且难以取得好的结果。而伴随法则可以把开边界条件的确定变成依赖于区域内部观测值的数值迭代过程, 实现了确定开边界条件的自动化。Larder^[8]、Seiler^[9] 等曾对开边界条件的反演进行过研究。吕咸青^[10, 11] 探讨了实际海区潮汐潮流模型中的开边界条件的反演和底摩擦系数的优化。

本文根据渤、黄海的潮汐调和常数的高度计资料, 利用伴随方法(模式的伴随和方程的伴随)来反演渤、黄海 M_2 潮波在开边界处的潮汐调和常数并同时优化给定的底摩擦系数。这里与文献[10, 11]的不同包括: 1) 实验海区从渤海扩展到渤、黄海。2) 潮波模型中增加了对流项、耗散项和固体潮效应引起的引潮势。3) 假设每一点的底摩擦系数各不相同。实验结果较好地体现了渤、黄海 M_2 潮波的特征, 同时也表明: 方程的伴随和模式的伴随能够得到同样好的结果。

1 二维潮波模型及其有限差分格式

计算所依据的二维潮波支配方程为:

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial [(h + \zeta)u]}{\partial x} + \frac{\partial [(h + \zeta)v]}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + \frac{ku \sqrt{u^2 + v^2}}{h + \zeta} - \\ A \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + g \frac{\partial (\zeta - \zeta_0)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + \frac{kv \sqrt{u^2 + v^2}}{h + \zeta} - \\ A \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + g \frac{\partial (\zeta - \zeta_0)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 t 代表时间; x, y 是 Cartesian 坐标, 本计算中分别取向东和向北为正; $h(x, y)$ 表示 (x, y) 处的静水深度; $\zeta(x, y, t)$ 表示自由表面相对于静止位置的升高; $u(x, y, t)$ 和 $v(x, y, t)$ 分别表示潮流在 x, y 方向的分量; $f = 2\Omega \sin \phi$ 是 Coriolis 参数, Ω 为地球自转角速度, ϕ 为地理纬度; k 是底摩擦系数, A 是侧向涡动粘性系数; ζ_0 是考虑了固体潮效应后的引潮势。

我们利用 Arakawa C 网格, 即水位取在网格的中心, 而流速则取在网格的边缘。为了叙述方便, 我们给出水位的控制场 $C_\zeta(m, n)$ 和流速的控制场 $C_u(m, n)$ 、 $C_v(m, n)$ 。具体做法如

下:

$$h(m, n) \neq 0 \Rightarrow C_\zeta(m, n) = 1, \quad h(m, n) = 0 \Rightarrow C_\zeta(m, n) = 0$$

$$C_u(m, n) = C_\zeta(m, n) \cdot C_\zeta(m+1, n), \quad C_v(m, n) = C_\zeta(m, n) \cdot C_\zeta(m, n+1)$$

我们所选择的有限差分格式(即正向差分格式)见文献[12]。初始条件和开边界条件的设置见文献[10, 11], 闭边界条件的设置与文献[12]相同。

2 离散变分分析与连续变分分析

2.1 离散变分分析: 模式的伴随

利用 Lagrange 乘法子推导出正向差分格式对应的伴随差分格式。代价函数的构造见文献[10, 11], 通过构造 Lagrange 函数(详细推导类似于文献[7]); 得到正向差分格式对应的伴随差分格式(A1)(见附录)。

初始条件和开边界条件的设置见文献[7], 闭边界条件的设置与文献[12]相同。开边界点 Fourier 系数以及底摩擦系数的校正关系式与文献[12]相同。

2.2 连续变分分析: 方程的伴随

构造代价函数

$$J(\zeta) = \frac{1}{2} K_\zeta \int_{\Sigma} (\zeta - \zeta_s)^2 d\sigma, \quad (2)$$

其中 K_ζ 是常数, 参照文献[7]的推导过程, 得到方程组(1)的伴随方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial t} + u \frac{\partial \lambda}{\partial x} + v \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{k\mu u \sqrt{u^2 + v^2}}{(h + \zeta)^2} + \frac{k\nu v \sqrt{u^2 + v^2}}{(h + \zeta)^2} + \\ g \frac{\partial \mu}{\partial x} + g \frac{\partial \nu}{\partial y} = K_\zeta (\zeta - \zeta_s), \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} - \left[f + \frac{k\nu w}{(h + \zeta) \sqrt{u^2 + v^2}} \right] \nu - \mu \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\mu u) + \frac{\partial}{\partial y} (\nu v) + \\ (h + \zeta) \frac{\partial \lambda}{\partial x} + A \left[\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} \right] - \frac{k(2u^2 + v^2)}{(h + \zeta) \sqrt{u^2 + v^2}} \mu = 0, \\ \frac{\partial \nu}{\partial t} + \left[f - \frac{k\mu w}{(h + \zeta) \sqrt{u^2 + v^2}} \right] \mu - \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (\nu u) + \frac{\partial}{\partial y} (\nu v) + \\ (h + \zeta) \frac{\partial \lambda}{\partial y} + A \left[\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} \right] - \frac{k(u^2 + 2v^2)}{(h + \zeta) \sqrt{u^2 + v^2}} \nu = 0. \end{cases} \quad (3)$$

对于伴随方程(3), 我们设计的差分形式为(A2)(见附录)。

3 数值实验及结果分析

我们以渤、黄海作为计算区域, 空间的分辨率是 $10'$, 开边界设在北纬 34° 线处。Coriolis 参数 f 取当地的值。 M_2 潮波的角频率为 $1.405189025 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, 时间步长取为 M_2 分潮周期的 $1/120$ 。伴随方程反向积分时间是 M_2 潮波的一个周期。利用观测得到的潮汐调和常数(高度计资料), 反演 M_2 分潮在开边界处的潮汐调和常数(从零开始反演)同时优化给定的底摩擦系数(预先给定值是 0.002), 且对每一点的底摩擦系数进行校正。实验所用高度计资料(T/P 数据)在渤、黄海区域的地面轨迹如图 1 所示。

本文的数值模拟实验利用 170 个点的高度计资料, 反演渤、黄海开边界处水位的 Fourier 系

数,同时优化给定的底摩擦系数。同化过程完成的判据为:调和常数的实测值与模拟值的振幅差的绝对值的平均小于 5.0 cm,迟角差的绝对值的平均小于 5.0° 。

离散变分分析导出模式的伴随。所谓模式的伴随指的是:利用正向差分格式来求解初边值问题(1),利用差分格式(A1)来求解伴随的初边值问题。

连续变分分析导出方程的伴随。所谓方程的伴随指的是:利用正向差分格式来求解初边值问题(1),利用差分格式(A2)来代替伴随的初边值问题。

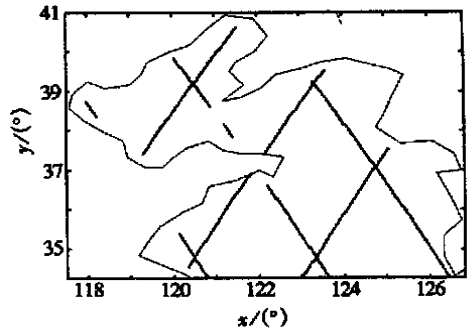


图 1 星下观测点示意图

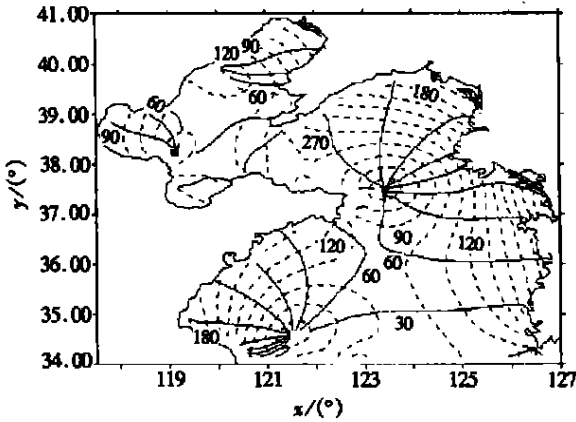


图 2 M_2 分潮等振幅线和等迟角线图

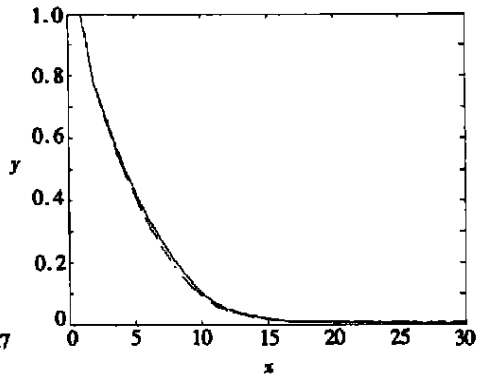


图 3 代价函数的下降情况(实线表示实验 1 的结果,虚线表示实验 2 的结果,横坐标代表同化步数)

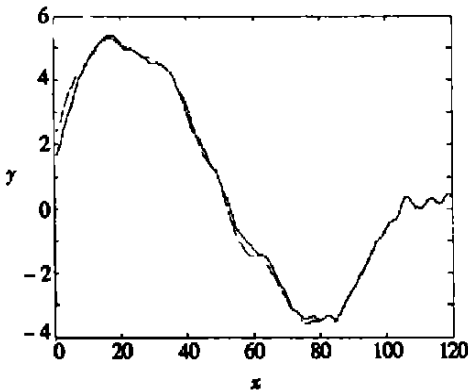


图 4 东经 122.5, 北纬 36° 这一点伴随变量 λ 的比较(横坐标代表时间步数)

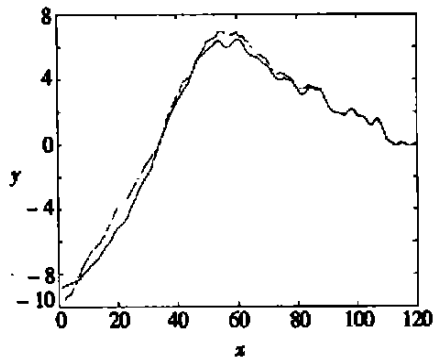


图 5 东经 122.5, 北纬 36° 这一点伴随变量 μ 的比较(横坐标代表时间步数)

为了将不同的方法(方程的伴随与模式的伴随)进行比较,本文作了 3 个数值同化实验:

实验 1: 控制参量的梯度由方程的伴随来求出。

实验 2: 控制参量的梯度由模式的伴随来求出。

实验 3: 控制参量的梯度由方程的伴随和模式的伴随来求出(分别进行单位化然后等权重

相加)。

在实验3中,我们选取了东经 122.5°, 北纬 36° 这一点,将两种方法得到的伴随变量值进行了比较。图2给出了实验3得到的 M_2 分潮等振幅线和等迟角线图。图3是实验1与实验2代价函数的下降情况。

从图4至图6(实线表示方程的伴随实验1的结果,虚线表示模式的伴随实验2的结果)可以看出,结果并无明显差异。在此实验中,我们也多次计算了两种方法得到的梯度方向的相关系数,结果都在 0.98 以上(见图7)。

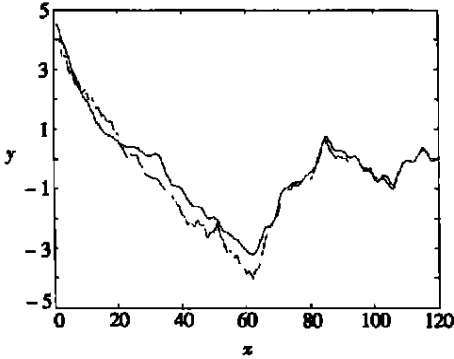


图6 东经 122.5°, 北纬 36° 这一点伴随变量 v 的比较(横坐标代表时间步数)

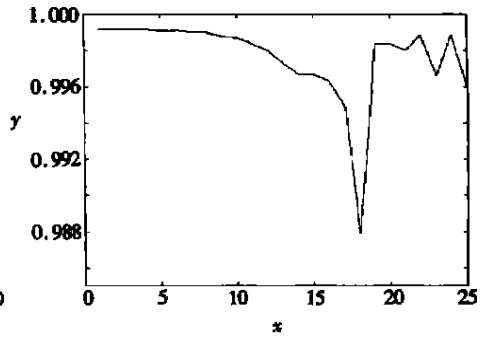


图7 两种方法得到的梯度方向的相关系数(横坐标代表同化步数)

3个实验结果基本是相同的(见表1和2),都能够体现渤、黄海 M_2 分潮的基本特征。最近20年中,关于渤海、黄海、东海潮波数值模拟,王凯^[13](可由此参见其它工作)等学者曾经做过这方面的工作。作为对比,我们也利用前人的方法对渤、黄海的 M_2 分潮潮波进行了数值模拟,首先借助于历史资料和观测资料得到开边界的初始猜测,然后对开边界的初始猜测值进行

表1 3个实验的全场的底摩擦系数和水位的差异

	底摩擦系数 k	水位的振幅差 $\Delta F/m$	水位的迟角差 $\Delta\alpha/(\circ)$
实验1与实验2	0.000 05	0.007	0.7
实验1与实验3	0.000 03	0.004	0.3
实验2与实验3	0.000 03	0.006	0.6

表2 3个实验得到的开边界水位的差异

	水位的振幅差 $\Delta F/m$	水位的迟角差 $\Delta\alpha/(\circ)$
实验1与实验2	0.031	2.6
实验1与实验3	0.010	1.3
实验2与实验3	0.032	2.7

调整,以得到与高度计资料之差尽可能小的模拟结果。但由于开边界的值共有 72 个,究竟有哪些值需要调整,需要如何调整,只有经过不断的调试,才能部分地解决这些问题。工作量很大且很难得到令人满意的结果。本文实现了确定开边界条件的自动化过程,这与前人的方法相比,有无可比拟的优势。最终我们得到的结果为:调和常数的实测值与模拟值的振幅差的绝对值的平均小于 5.0 cm,迟角差的绝对值的平均小于 5.0°。

4 结 论

我们认为过分强调模式的伴随是有疑问的: 首先, 他们所阐述的理由并不充分. 其理由之一在于离散的动力学模型作为约束, 之二在于观测结果是离散的. 不可否认, 他们给出了解决问题的正确方法, 这种方法深刻地影响了近 10 多年的同化方法在海洋及大气研究中的应用. 但这毕竟只是能够取得成功的方法之一, 过分强调模式的伴随而排斥其它的方法难以经得起实践的检验. 其次, 我们作过的数值模拟实验表明有时方程的伴随也能够得到与模式的伴随同样好的结果.

由于非线性算子的伴随算子的推导存在本质上的困难, 也许这是造成人们过分强调模式的伴随的主要原因. 究竟模式的伴随与方程的伴随哪个更优, 这在理论上是极其复杂的, 最终只有靠实践的检验了.

附 录

A.1 正向差分格式对应的伴随差分格式

$$\begin{aligned}
 & \frac{\lambda_{m,n}^{\mathfrak{J}} - \lambda_{m,n}^{2\mathfrak{J}+1}}{\Delta t} + \frac{g(\mu_{m-1,n}^{2\mathfrak{J}} - \mu_{m,n}^{2\mathfrak{J}})}{\Delta x_n} + \frac{g(\nu_{m,n-1}^{2\mathfrak{J}} - \nu_{m,n}^{2\mathfrak{J}})}{\Delta y} + \\
 & \frac{\lambda_{m-1,n}^{2\mathfrak{J}+1} \mu_{m-1,n}^{2\mathfrak{J}} + \lambda_{m,n}^{2\mathfrak{J}+1, 2\mathfrak{J}} \mu_{m,n}^{2\mathfrak{J}} - \lambda_{m,n}^{2\mathfrak{J}+1} \mu_{m-1,n}^{2\mathfrak{J}} - \lambda_{m+1,n}^{2\mathfrak{J}+1} \mu_{m,n}^{2\mathfrak{J}}}{2\Delta x_n} + \\
 & \frac{\lambda_{m,n-1}^{2\mathfrak{J}+1} \nu_{m,n-1}^{2\mathfrak{J}} + \lambda_{m,n}^{2\mathfrak{J}+1, 2\mathfrak{J}} \nu_{m,n}^{2\mathfrak{J}} - \lambda_{m,n}^{2\mathfrak{J}+1} \nu_{m,n-1}^{2\mathfrak{J}} - \lambda_{m,n+1}^{2\mathfrak{J}+1} \nu_{m,n}^{2\mathfrak{J}}}{2\Delta y} - \\
 & \frac{k_{m+1/2,n} \mu_{m,n}^{2\mathfrak{J}+1, \mathfrak{J}} [\alpha u_{m,n}^{2\mathfrak{J}+1} + (1-\alpha) u_{m,n}^{2\mathfrak{J}}]}{2 \left(h_{m+1/2,n} + \zeta_{m+1/2,n}^{2\mathfrak{J}} \right)^2} - \\
 & \frac{k_{m-1/2,n} \mu_{m-1,n}^{2\mathfrak{J}+1, \mathfrak{J}} [\alpha u_{m-1,n}^{2\mathfrak{J}+1} + (1-\alpha) u_{m-1,n}^{2\mathfrak{J}}]}{2 \left(h_{m-1/2,n} + \zeta_{m-1/2,n}^{2\mathfrak{J}} \right)^2} - \\
 & \frac{k_{m,n+1/2} \nu_{m,n}^{2\mathfrak{J}+1, \mathfrak{J}} [\alpha v_{m,n}^{2\mathfrak{J}+1} + (1-\alpha) v_{m,n}^{2\mathfrak{J}}]}{\left(h_{m,n+1/2} + \zeta_{m,n+1/2}^{2\mathfrak{J}} \right)^2} - \\
 & \frac{k_{m,n-1/2} \nu_{m,n-1}^{2\mathfrak{J}+1, \mathfrak{J}} [\alpha v_{m,n-1}^{2\mathfrak{J}+1} + (1-\alpha) v_{m,n-1}^{2\mathfrak{J}}]}{\left(h_{m,n-1/2} + \zeta_{m,n-1/2}^{2\mathfrak{J}} \right)^2} + \\
 & K_d D_{m,n}(\zeta_{m,n}^{2\mathfrak{J}} - \xi_{m,n}^{2\mathfrak{J}}) = 0, \tag{A1.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\nu_{m,n}^{2\mathfrak{J}} - \nu_{m,n}^{2\mathfrak{J}+1}}{\Delta t} + \frac{\left(h_{m,n+1/2} + \zeta_{m,n+1/2}^{2\mathfrak{J}} \right) (\lambda_{m,n}^{2\mathfrak{J}} - \lambda_{m,n+1}^{\mathfrak{J}})}{\Delta x_n} + \\
 & \frac{(1-\alpha) k_{m,n+1/2} \nu_{m,n}^{2\mathfrak{J}+1, 2\mathfrak{J}}}{h_{m,n+1/2} + \zeta_{m,n+1/2}^{2\mathfrak{J}}} + \frac{\alpha k_{m,n+1/2} \nu_{m,n}^{2\mathfrak{J}}}{h_{m,n+1/2} + \zeta_{m,n+1/2}^{2\mathfrak{J}}} + \\
 & \frac{\nu_{m-1,n}^{2\mathfrak{J}+1} \mu_{m-1,n}^{2\mathfrak{J}} - \nu_{m+1,n}^{2\mathfrak{J}+1} \mu_{m+1,n}^{2\mathfrak{J}}}{2\Delta x_n} + \frac{\nu_{m,n-1}^{2\mathfrak{J}+1} \nu_{m,n-1}^{2\mathfrak{J}} - \nu_{m,n+1}^{2\mathfrak{J}+1} \nu_{m,n+1}^{2\mathfrak{J}}}{2\Delta y} + \\
 & \frac{\nu_{m,n}^{2\mathfrak{J}+1} (v_{m,n+1}^{2\mathfrak{J}} - v_{m,n}^{2\mathfrak{J}})}{2\Delta y} - \frac{A(\nu_{m+1,n}^{2\mathfrak{J}+1} - 2\nu_{m,n}^{2\mathfrak{J}+1} + \nu_{m-1,n}^{2\mathfrak{J}+1})}{\Delta x_n^2} - \\
 & \frac{A(\nu_{m,n+1}^{2\mathfrak{J}+1} - 2\nu_{m,n}^{2\mathfrak{J}+1} + \nu_{m,n-1}^{2\mathfrak{J}+1})}{\Delta y^2} + \frac{k_{m,n+1/2} \nu_{m,n}^{2\mathfrak{J}+1} [\alpha v_{m,n}^{\mathfrak{J}+1} + (1-\alpha) v_{m,n}^{2\mathfrak{J}}] v_{m,n}^{2\mathfrak{J}}}{\left(h_{m,n+1/2} + \zeta_{m,n+1/2}^{2\mathfrak{J}} \right) s_{m,n}^{\mathfrak{J}}} + \\
 & \frac{v_{m,n}^{2\mathfrak{J}} \xi_{m,n}^{2\mathfrak{J}+1}}{\left(h_{m,n+1/2} + \zeta_{m,n+1/2}^{2\mathfrak{J}} \right) r_{m,n}^{2\mathfrak{J}}} = 0; \tag{A1.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mu_{m,n}^{2\mathfrak{J}} - \mu_{m,n}^{2\mathfrak{J}+1}}{\Delta t} + \frac{\left(h_{m+1/2,n} + \zeta_{m+1/2,n}^{\mathfrak{J}} \right) (\lambda_{m,n}^{2\mathfrak{J}} - \lambda_{m+1,n}^{2\mathfrak{J}})}{\Delta x_n} + \\
 & \frac{(1-\alpha) k_{m+1/2,n} \mu_{m,n}^{2\mathfrak{J}+1, 2\mathfrak{J}}}{h_{m+1/2,n} + \zeta_{m+1/2,n}^{2\mathfrak{J}}} + \frac{\alpha k_{m+1/2,n} \mu_{m,n}^{2\mathfrak{J}}}{h_{m+1/2,n} + \zeta_{m+1/2,n}^{2\mathfrak{J}}} + \\
 & \frac{\mu_{m-1,n}^{2\mathfrak{J}+1} \nu_{m-1,n}^{2\mathfrak{J}} - \mu_{m+1,n}^{2\mathfrak{J}+1} \nu_{m+1,n}^{2\mathfrak{J}}}{2\Delta x_n} + \frac{\mu_{m,n-1}^{2\mathfrak{J}+1} \nu_{m,n-1}^{2\mathfrak{J}} - \mu_{m,n+1}^{2\mathfrak{J}+1} \nu_{m,n+1}^{2\mathfrak{J}}}{2\Delta y} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_{m,n}^{2j+1}(u_{m+1,n}^{2j} - u_{m-1,n}^{2j})}{2\Delta x_n} + \frac{\nu_{m,n}^{2j+1}(v_{m+1,n}^{2j} - v_{m-1,n}^{2j})}{2\Delta x_n} + \frac{\nu_{m,n}^{2j}(v_{m+1,n}^{2j-1} - v_{m-1,n}^{2j-1})}{2\Delta x_n} - \\ & \frac{A(\mu_{m+1,n}^{2j+1} - 2\mu_{m,n}^{2j+1} + \mu_{m-1,n}^{2j+1})}{\Delta x_n^2} - \frac{A(\mu_{m+1,n}^{2j+1} - 2\mu_{m,n}^{2j+1} + \mu_{m-1,n}^{2j+1})}{\Delta y^2} + \\ & \frac{k_{m+1/2,n}\mu_{m,n}^{2j+1}[\alpha u_{m,n}^{2j+1} + (1-\alpha)u_{m,n}^{2j}]u_{m,n}^{2j}}{\left(h_{m+1/2,n} + \zeta_{m+1/2,n}^{2j}\right)r_{m,n}^{2j}} + \left(\frac{u_{m,n}^{2j}\Pi_{m,n}^{2j+1}}{h_{m+1/2,n} + \zeta_{m+1/2,n}^{2j}}\right)s_{m,n}^{2j} + \\ & f_n(\nu_{m,n}^{2j} + \nu_{m,n}^{2j+1}) = 0, \end{aligned} \tag{A1.3}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_{m,n}^{2j-1} - \lambda_{m,n}^{2j}}{\Delta t} + \frac{g(\mu_{m+1,n}^{2j} - \mu_{m,n}^{2j})}{\Delta x_n} + \frac{g(\nu_{m,n}^{2j} - \nu_{m,n}^{2j-1})}{\Delta y} + \\ & \frac{\lambda_{m-1,n}^{2j}u_{m-1,n}^{2j-1} + \lambda_{m,n}^{2j}u_{m,n}^{2j-1} - \lambda_{m,n}^{2j}u_{m-1,n}^{2j-1} - \lambda_{m+1,n}^{2j}u_{m,n}^{2j-1}}{2\Delta x_n} + \\ & \frac{\lambda_{m,n-1}^{2j}v_{m,n-1}^{2j-1} + \lambda_{m,n}^{2j}v_{m,n}^{2j-1} - \lambda_{m,n}^{2j}v_{m,n-1}^{2j-1} - \lambda_{m,n+1}^{2j}v_{m,n}^{2j-1}}{2\Delta y} - \\ & \frac{k_{m+1/2,n}\mu_{m,n}^{2j}v_{m,n}^{2j-1}[\alpha u_{m,n}^{2j} + (1-\alpha)u_{m,n}^{2j-1}]}{\left(h_{m+1/2,n} + \zeta_{m+1/2,n}^{2j-1}\right)^2} - \\ & \frac{k_{m-1/2,n}\mu_{m-1,n}^{2j}v_{m-1,n}^{2j-1}[\alpha u_{m-1,n}^{2j} + (1-\alpha)u_{m-1,n}^{2j-1}]}{\left(h_{m-1/2,n} + \zeta_{m-1/2,n}^{2j-1}\right)^2} - \\ & \frac{k_{m,n+1/2}\nu_{m,n}^{2j}v_{m,n}^{2j-1}[\alpha v_{m,n}^{2j} + (1-\alpha)v_{m,n}^{2j-1}]}{\left(h_{m,n+1/2} + \zeta_{m,n+1/2}^{2j-1}\right)^2} - \\ & \frac{k_{m,n-1/2}\nu_{m,n-1}^{2j}v_{m,n-1}^{2j-1}[\alpha v_{m,n-1}^{2j} + (1-\alpha)v_{m,n-1}^{2j-1}]}{\left(h_{m,n-1/2} + \zeta_{m,n-1/2}^{2j-1}\right)^2} + \\ & K_j D_{m,n}(\zeta_{m,n}^{2j-1} - \zeta_{m,n}^{2j-1}) = 0, \end{aligned} \tag{A1.4}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_{m,n}^{2j-1} - \mu_{m,n}^{2j}}{\Delta t} + \left(\frac{h_{m+1/2,n} + \zeta_{m+1/2,n}^{2j-1}}{\Delta x_n}\right)(\lambda_{m,n}^{2j-1} - \lambda_{m+1,n}^{2j-1}) + \\ & \frac{(1-\alpha)k_{m+1/2,n}\mu_{m,n}^{2j}v_{m,n}^{2j-1}}{h_{m+1/2,n} + \zeta_{m+1/2,n}^{2j-1}} + \frac{\alpha k_{m+1/2,n}\mu_{m,n}^{2j-1}r_{m,n}^{2j-2}}{h_{m+1/2,n} + \zeta_{m+1/2,n}^{2j-1}} + \\ & \frac{\mu_{m-1,n}^{2j}u_{m-1,n}^{2j-1} - \mu_{m+1,n}^{2j}u_{m+1,n}^{2j-1}}{2\Delta x_n} + \frac{\mu_{m,n-1}^{2j}v_{m,n-1}^{2j-1} - \mu_{m,n+1}^{2j}v_{m,n+1}^{2j-1}}{2\Delta y} + \\ & \frac{\mu_{m,n}^{2j}(u_{m+1,n}^{2j-1} - u_{m-1,n}^{2j-1})}{2\Delta x_n} - \frac{A(\mu_{m+1,n}^{2j} - 2\mu_{m,n}^{2j} + \mu_{m-1,n}^{2j})}{\Delta x_n^2} - \\ & \frac{A(\mu_{m+1,n}^{2j} - 2\mu_{m,n}^{2j} + \mu_{m-1,n}^{2j})}{\Delta y^2} + \frac{k_{m+1/2,n}\mu_{m,n}^{2j}[\alpha u_{m,n}^{2j} + (1-\alpha)u_{m,n}^{2j-1}]u_{m,n}^{2j-1}}{\left(h_{m+1/2,n} + \zeta_{m+1/2,n}^{2j-1}\right)r_{m,n}^{2j-1}} + \\ & \left(\frac{u_{m,n}^{2j}\Pi_{m,n}^{2j}}{h_{m+1/2,n} + \zeta_{m+1/2,n}^{2j-1}}\right)s_{m,n}^{2j-1} = 0, \end{aligned} \tag{A1.5}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\nu_{m,n}^{2j-1} - \nu_{m,n}^{2j}}{\Delta t} + \left(\frac{h_{m,n+1/2} + \zeta_{m,n+1/2}^{2j-1}}{\Delta x_n}\right)(\lambda_{m,n}^{2j-1} - \lambda_{m,n+1}^{2j-1}) + \\ & \frac{(1-\alpha)k_{m,n+1/2}\nu_{m,n}^{2j}v_{m,n}^{2j-1}}{h_{m,n+1/2} + \zeta_{m,n+1/2}^{2j-1}} + \frac{\alpha k_{m,n+1/2}\nu_{m,n}^{2j-1}r_{m,n}^{2j-2}}{h_{m,n+1/2} + \zeta_{m,n+1/2}^{2j-1}} + \\ & \frac{\nu_{m-1,n}^{2j}v_{m-1,n}^{2j-1} - \nu_{m+1,n}^{2j}v_{m+1,n}^{2j-1}}{2\Delta x_n} + \frac{\nu_{m,n-1}^{2j}v_{m,n-1}^{2j-1} - \nu_{m,n+1}^{2j}v_{m,n+1}^{2j-1}}{2\Delta y} + \\ & \frac{\nu_{m,n}^{2j}(v_{m+1,n}^{2j-1} - v_{m-1,n}^{2j-1})}{2\Delta y} + \frac{\mu_{m,n}^{2j}(u_{m+1,n}^{2j-1} - u_{m-1,n}^{2j-1})}{2\Delta y} + \frac{\mu_{m,n-1}^{2j}(u_{m,n}^{2j-2} - u_{m,n-1}^{2j-2})}{2\Delta y} - \\ & \frac{A(\nu_{m+1,n}^{2j} - 2\nu_{m,n}^{2j} + \nu_{m-1,n}^{2j})}{\Delta x_n^2} - \frac{A(\nu_{m+1,n}^{2j} - 2\nu_{m,n}^{2j} + \nu_{m-1,n}^{2j})}{\Delta y^2} + \\ & \frac{k_{m,n+1/2}\nu_{m,n}^{2j}[\alpha v_{m,n}^{2j} + (1-\alpha)v_{m,n}^{2j-1}]v_{m,n}^{2j-1}}{\left(h_{m,n+1/2} + \zeta_{m,n+1/2}^{2j-1}\right)s_{m,n}^{2j-1}} + \left(\frac{v_{m,n}^{2j}\xi_{m,n}^{2j}}{h_{m,n+1/2} + \zeta_{m,n+1/2}^{2j-1}}\right)r_{m,n}^{2j-1} - \\ & f_n(\mu_{m,n}^{2j-1} + \mu_{m,n}^{2j}) = 0 \end{aligned} \tag{A1.6}$$

此处, $D_{m,n}$ 是由所有观测点构成的集合, $\mu_{m,n}^j, \nu_{m,n}^j, \zeta_{m,n}^{j+1}, \Pi_{m,n}^{j+1}, \xi_{m,n}^j, \Pi_{m,n}^j$ 表达式见文献[7].

A.2 伴随方程(3)的差分形式

$$\frac{\lambda_{m,n}^{j+2} - \lambda_{m,n}^{2j+1}}{\Delta t} + \frac{(u_{m,n}^{2j+1} + u_{m-1,n}^{2j+1})(\lambda_{m,n}^{2j+2} - \lambda_{m-1,n}^{2j+2})}{2\Delta x_n} + \frac{(v_{m,n}^{2j+1} + v_{m,n-1}^{2j+1})(\lambda_{m,n}^{j+2} - \lambda_{m,n-1}^{2j+2})}{2\Delta y} +$$

$$\frac{k_{m+1/2,n} \mu_{m,n}^{2j+2} u_{m,n}^{2j+1} \sqrt{(u_{m,n}^{2j+1})^2 + (v_{m,n}^{2j+1})^2}}{\left(h_{m+1/2,n} + \zeta_{m+1/2,n}^{2j+1}\right)^2} + \frac{k_{m,n+1/2} v_{m,n}^{2j+2} u_{m,n}^{2j+1} \sqrt{(u_{m,n}^{2j+1})^2 + (v_{m,n}^{2j+1})^2}}{\left(h_{m,n+1/2} + \zeta_{m,n+1/2}^{2j+1}\right)^2} +$$

$$\frac{g(\mu_{m,n}^{j+2} - \mu_{m-1,n}^{2j+2})}{\Delta x_n} + \frac{g(\nu_{m,n}^{2j+2} - \nu_{m,n-1}^{2j+2})}{\Delta y} - K_{\zeta} D_{m,n}(\zeta_{m,n}^{2j+1} - \zeta_{m,n}^{2j+1}) = 0, \quad (\text{A2.1})$$

$$\frac{\nu_{m,n}^{2j+2} - \nu_{m,n}^{2j+1}}{\Delta t} + (f_n - c_{m,n}^{2j+1}) \mu_{m,n}^{2j+2} - e_{m,n}^{2j+1} [(1-\alpha) \nu_{m,n}^{2j+1} + \alpha \mu_{m,n}^{2j+2}] +$$

$$\frac{(h_{m,n-1/2} + \zeta_{m,n-1/2}^{2j+1})(\lambda_{m,n}^{2j+1} - \lambda_{m,n-1}^{2j+1})}{\Delta y} - \frac{\mu_{m,n}^{2j+2}(u_{m,n+1}^{2j+1} - u_{m,n-1}^{2j+1})}{2\Delta y}$$

$$\frac{\nu_{m,n}^{2j+2}(v_{m,n+1}^{2j+1} - v_{m,n-1}^{2j+1})}{2\Delta y} + \frac{\nu_{m+1,n}^{2j+2} u_{m+1,n}^{2j+1} - \nu_{m-1,n}^{2j+2} u_{m-1,n}^{2j+1}}{2\Delta x_n} +$$

$$\frac{\nu_{m,n}^{2j+2} v_{m,n+1}^{2j+1} - \nu_{m,n-1}^{2j+2} v_{m,n-1}^{2j+1}}{2\Delta y} + \frac{A(\nu_{m+1,n}^{2j+2} - 2\nu_{m,n}^{2j+2} + \nu_{m-1,n}^{2j+2})}{\Delta x_n^2} +$$

$$\frac{A(\nu_{m,n+1}^{2j+2} - 2\nu_{m,n}^{2j+2} + \nu_{m,n-1}^{2j+2})}{\Delta y^2} = 0, \quad (\text{A2.2})$$

$$\frac{\mu_{m,n}^{2j+2} - \mu_{m,n}^{2j+1}}{\Delta t} - (f_n + b_{m,n}^{2j+1}) \nu_{m,n}^{2j+1} - d_{m,n}^{2j+1} [(1-\alpha) \mu_{m,n}^{2j+1} + \alpha \nu_{m,n}^{2j+2}] +$$

$$\frac{(h_{m-1/2,n} + \zeta_{m-1/2,n}^{2j+1})(\lambda_{m,n}^{2j+1} - \lambda_{m-1,n}^{2j+1})}{\Delta x_n} - \frac{\mu_{m,n}^{2j+2}(u_{m+1,n}^{2j+1} - u_{m-1,n}^{2j+1})}{2\Delta x_n}$$

$$\frac{\nu_{m,n}^{2j+1}(v_{m+1,n}^{2j+1} - v_{m-1,n}^{2j+1})}{2\Delta x_n} + \frac{\mu_{m+1,n}^{2j+2} u_{m+1,n}^{2j+1} - \mu_{m-1,n}^{2j+2} u_{m-1,n}^{2j+1}}{2\Delta x_n} +$$

$$\frac{\mu_{m,n+1}^{2j+2} v_{m,n+1}^{2j+1} - \mu_{m,n-1}^{2j+2} v_{m,n-1}^{2j+1}}{2\Delta y} + \frac{A(\mu_{m+1,n}^{2j+2} - 2\mu_{m,n}^{2j+2} + \mu_{m-1,n}^{2j+2})}{\Delta x_n^2} +$$

$$\frac{A(\mu_{m,n+1}^{2j+2} - 2\mu_{m,n}^{2j+2} + \mu_{m,n-1}^{2j+2})}{\Delta y^2} = 0, \quad (\text{A2.3})$$

$$\frac{\lambda_{m,n}^{j+1} - \lambda_{m,n}^j}{\Delta t} + \frac{(u_{m,n}^{2j} + u_{m-1,n}^{2j})(\lambda_{m,n}^{j+1} - \lambda_{m-1,n}^{j+1})}{2\Delta x_n} + \frac{(v_{m,n}^{2j} + v_{m,n-1}^{2j})(\lambda_{m,n}^{j+1} - \lambda_{m,n-1}^{j+1})}{2\Delta y} +$$

$$\frac{k_{m+1/2,n} \mu_{m,n}^{2j+1} u_{m,n}^{2j} \sqrt{(u_{m,n}^{2j})^2 + (v_{m,n}^{2j})^2}}{\left(h_{m+1/2,n} + \zeta_{m+1/2,n}^{2j}\right)^2} + \frac{k_{m,n+1/2} v_{m,n}^{2j+1} u_{m,n}^{2j} \sqrt{(u_{m,n}^{2j})^2 + (v_{m,n}^{2j})^2}}{\left(h_{m,n+1/2} + \zeta_{m,n+1/2}^{2j}\right)^2} +$$

$$\frac{g(\mu_{m,n}^{j+1} - \mu_{m-1,n}^{2j+1})}{\Delta x_n} + \frac{g(\nu_{m,n}^{2j+1} - \nu_{m,n-1}^{2j+1})}{\Delta y} - K_{\zeta} D_{m,n}(\zeta_{m,n}^{2j} - \zeta_{m,n}^{2j}) = 0, \quad (\text{A2.4})$$

$$\frac{\mu_{m,n}^{2j+1} - \mu_{m,n}^{2j}}{\Delta t} - (f_n + b_{m,n}^{2j}) \nu_{m,n}^{2j+1} - d_{m,n}^{2j} [(1-\alpha) \mu_{m,n}^{2j} + \alpha \nu_{m,n}^{2j+1}] +$$

$$\frac{(h_{m-1/2,n} + \zeta_{m-1/2,n}^{2j})(\lambda_{m,n}^{2j} - \lambda_{m-1,n}^{2j})}{\Delta x_n} - \frac{\mu_{m,n}^{2j+1}(u_{m+1,n}^{2j} - u_{m-1,n}^{2j})}{2\Delta x_n}$$

$$\frac{\nu_{m,n}^{2j+1}(v_{m+1,n}^{2j} - v_{m-1,n}^{2j})}{2\Delta x_n} + \frac{\mu_{m+1,n}^{2j+1} u_{m+1,n}^{2j} - \mu_{m-1,n}^{2j+1} u_{m-1,n}^{2j}}{2\Delta x_n} +$$

$$\frac{\nu_{m,n+1}^{2j+1} v_{m,n+1}^{2j} - \nu_{m,n-1}^{2j+1} v_{m,n-1}^{2j}}{2\Delta y} + \frac{A(\mu_{m+1,n}^{2j+1} - 2\mu_{m,n}^{2j+1} + \mu_{m-1,n}^{2j+1})}{\Delta x_n^2} +$$

$$\frac{A(\mu_{m,n+1}^{2j+1} - 2\mu_{m,n}^{2j+1} + \mu_{m,n-1}^{2j+1})}{\Delta y^2} = 0, \quad (\text{A2.5})$$

$$\frac{\nu_{m,n}^{2j+1} - \nu_{m,n}^{2j}}{\Delta t} + (f_n - c_{m,n}^{2j}) \mu_{m,n}^{2j} - e_{m,n}^{2j} [(1-\alpha) \nu_{m,n}^{2j} + \alpha \mu_{m,n}^{2j+1}] +$$

$$\frac{(h_{m,n-1/2} + \zeta_{m,n-1/2}^{2j})(\lambda_{m,n}^{2j} - \lambda_{m,n-1}^{2j})}{\Delta y} - \frac{\mu_{m,n}^{2j}(u_{m,n+1}^{2j} - u_{m,n-1}^{2j})}{2\Delta y}$$

$$\frac{\nu_{m,n}^{2j+1}(v_{m,n+1}^{2j} - v_{m,n-1}^{2j})}{2\Delta y} + \frac{\nu_{m+1,n}^{2j+1} u_{m+1,n}^{2j} - \nu_{m-1,n}^{2j+1} u_{m-1,n}^{2j}}{2\Delta x_n} +$$

$$\frac{V_{m,n+1}^{2j+1} - 2V_{m,n+1}^{2j} + V_{m,n-1}^{2j+1} - 2V_{m,n-1}^{2j}}{2\Delta y} + \frac{A(V_{m+1,n}^{2j+1} - 2V_{m,n}^{2j+1} + V_{m-1,n}^{2j+1})}{\Delta x_n^2} + \frac{A(V_{m,n+1}^{2j+1} - 2V_{m,n}^{2j+1} + V_{m,n-1}^{2j+1})}{\Delta y^2} = 0 \quad (\text{A2.6})$$

这里, $u_{m,n}^j$ 、 $v_{m,n}^j$ 的表达式见文献[7],

$$b_{m,n}^j = \frac{k_{m+1/2,n}}{h_{m+1/2,n} + \zeta_{m+1/2,n}^j} \frac{u_{m,n}^j v_{m,n}^j}{\sqrt{(u_{m,n}^j)^2 + (v_{m,n}^j)^2}},$$

$$c_{m,n}^j = \frac{k_{m,n+1/2}}{h_{m,n+1/2} + \zeta_{m,n+1/2}^j} \frac{u_{m,n}^j v_{m,n}^j}{\sqrt{(u_{m,n}^j)^2 + (v_{m,n}^j)^2}},$$

$$d_{m,n}^j = \frac{k_{m+1/2,n}}{h_{m+1/2,n} + \zeta_{m+1/2,n}^j} \frac{2(u_{m,n}^j)^2 + (v_{m,n}^j)^2}{\sqrt{(u_{m,n}^j)^2 + (v_{m,n}^j)^2}},$$

$$e_{m,n}^j = \frac{k_{m,n+1/2}}{h_{m,n+1/2} + \zeta_{m,n+1/2}^j} \frac{(u_{m,n}^j)^2 + 2(v_{m,n}^j)^2}{\sqrt{(u_{m,n}^j)^2 + (v_{m,n}^j)^2}}.$$

[参 考 文 献]

- [1] Navon I M. Practical and theoretical aspects of adjoint parameter estimation and identifiability in meteorology and oceanography[J]. Dynamics of Atmospheres and Oceans, 1997, 27(1): 55—79.
- [2] Talagrand O, Courtier P. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation—Part I : Theory[J]. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 1987, 113(478): 1311—1328.
- [3] Thacker W C, Long R B. Fitting dynamics to data[J]. Journal of Geophysical Research, 1988, 93(2): 1227—1240.
- [4] Smedstad O M, O'Brien J J. Variational data assimilation and parameter estimation in an equatorial pacific ocean model[J]. Progress in Oceanography, 1991, 26(2): 171—241.
- [5] Schroter J, Seiler U, Wenzel M. Variational assimilation of geo_sat data into an eddy_resolving model of the gulf stream extension area[J]. Journal of Physical Oceanography, 1993, 23(5): 925—953.
- [6] Sirkes Z. Finite difference of adjoint or adjoint of finite difference[J]. Monthly Weather Review, 1997, 125(12): 3373—3378.
- [7] 吕咸青, 张杰. 如何利用水位资料反演开边界条件(一、二)[J]. 水动力学研究与进展, 1999, 14(4B): 92—109.
- [8] Lardner R W. Optimal control of an open boundary conditions for a numerical tidal model[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1993, 102(3/4): 367—387.
- [9] Seiler U. Estimation of open boundary conditions with the adjoint method[J]. Journal of Geophysical Research, 1993, 98(12): 22855—22870.
- [10] 吕咸青, 方国洪. 渤海 M_2 分潮的伴随模式数值实验[J]. 海洋学报, 2002, 24(1): 17—24.
- [11] 吕咸青, 方国洪. 渤海开边界潮汐的伴随法反演[J]. 海洋与湖沼, 2002, 33(2): 113—120.
- [12] 吕咸青, 吴自库, 殷忠斌, 等. 渤、黄、东海潮汐开边界的 1 种反演方法[J]. 青岛海洋大学学报, 2003, 33(2): 155—172.
- [13] 王凯, 方国洪, 冯士. 渤海、黄海、东海 M_2 潮汐潮流的三维数值模拟[J]. 海洋学报, 1999, 21(4): 1—13.

Study on the Adjoint Method in Data Assimilation and the Related Problems

LÜ Xian_qing^{1,2}, WU Zi_ku^{1,2}, GU Yi³, TIAN Ji_wei^{1,2}

(1. College of Physical and Environmental Oceanography,
Ocean University of China, Qingdao 266003, P. R. China;

2. Key Laboratory of Physical Oceanography,
Ministry of Education, Qingdao 266003, P. R. China;

3. College of Information and Engineering, Qingdao University,
Qingdao 266071, P. R. China)

Abstract: It is not reasonable that one can only use the adjoint of model in data assimilation. The simulated numerical experiment shows that for the tidal model, the result of the adjoint of equation is almost the same as that of the adjoint of model: the averaged absolute difference of the amplitude between observations and simulation is less than 5.0 cm and that of the phase lag is less than 5.0°. The results are both in good agreement with the observed M₂ tide in the Bohai Sea and the Yellow Sea. For comparison, the traditional methods also have been used to simulate M₂ tide in the Bohai Sea and the Yellow Sea. The initial guess values of the boundary conditions are given first, and then are adjusted to acquire the simulated results that are as close as possible to the observations. As the boundary conditions contain 72 values, which should be adjusted and how to adjust them can only be partially solved by adjusting them many times. The satisfied results are hard to acquire even gigantic efforts are done. Here, the automation of the treatment of the open boundary conditions is realized. The method is unique and superior to the traditional methods. It is emphasized that if the adjoint of equation is used, tedious and complicated mathematical deduction can be avoided. Therefore the adjoint of equation should attract much attention.

Key words: data assimilation; variational analysis; adjoint method; tide; open boundary condition