应用数学和力学,第 27 卷 第 10 期
2006 年 10 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 27, No. 10, Oct. 15, 2006

文章编号: 1000_0887(2006) 10_1226_09

吴消元法在 Lagrange 和 Hamilton 方程中的应用*

贾屹峰[1], 陈玉福[1], 许志强[2]

(1. 中国科学院 研究生院 数学系, 北京 100049;
2. 中国科学院 系统科学与数学研究院, 北京 100080)

(张鸿庆推荐)

摘要: 主要借鉴吴消元法, 研究带约束动力学中多项式类型 Lagrange 方程和 Hamilton 方程, 提出了一种求约束的新算法• 与以前算法相比, 新算法无需求 Hessian 矩阵的秩, 无需判定方程的线性相关性, 从而大为减少了计算步骤, 且计算更为简单• 此外, 计算过程中膨胀较小, 且多数情形下无膨胀• 利用符号计算软件, 新算法可在计算机上实现•

关 键 词: Hamilton 系统; 约束; 特征列; Hessian 矩阵
中图分类号: O313.2 文献标识码: A

引 言

动力学中的 Lagrange 函数是关于 n 个广义坐标, n 个广义速度和时间 t 的函数• 如果 Lagrange 函数的 Hessian 矩阵是非奇异的, 那么这个系统被称为正则的, 否则, 称为退化的• 在现实中, 一些很重要的物理系统和力学系统都是退化的, 例如重力场的 Einstein 理论, 用电势描述的电磁场理论等, 所以研究退化的动力系统是很有必要的•

变分在动力学研究中起了很重要的作用, 利用变分原理, 可以得到动力学基本方程: Euler_Lagrange 方程• 正则的系统, Euler_Lagrange 方程可以通过 Legendre 变换, 变为形式简洁而且对称的 Hamilton 方程• 退化的系统, 带有一些约束, 需要求出; 变量之间有一些关系, 也要找出来, 最后得到的方程为带约束的 Euler_Lagrange 方程• 相应的, 退化的动力系统, Euler_Lagrange 方程也可以经过 Legendre 变换, 变为带约束的 Hamilton 方程• 如何求出约束, 找出变量之间的关系, 就显得非常重要• 比较经典的方法有 Shanmugadhasan 在文献[1]中描述的方法和 Dirac 方法[2~4]• 这两种方法都要首先确定 Hessian 矩阵的秩和判定 Euler_Lagrange 方程的线性相关性• 一般情况下, Hessian 矩阵是一个函数矩阵, Euler_Lagrange 方程的系数也是函数, 因此确定 Hessian 矩阵的秩和判定线性相关性比较困难; 另外 Dirac 方法还需要求函数矩阵的逆, 同样计

* 收稿日期: 2005-09-20; 修订日期: 2006-04-12
资金项目: 国家自然科学基金资助项目(10401021); 中国科学院研究生院科研启动基金资助项目(M3002)
作者简介: 贾屹峰(1972—), 男, 陕西人, 助理研究员, 博士(联系人. Tel: + 86_10_88256128; E_mail: jiayf@mails.gucas.ac.cn).

算比较困难• 在物理学和力学中, 许多系统的 Lagrange 函数都是多项式函数, 从而得到多项式类型的 Euler_Lagrange 方程和 Hamilton 方程• 对于多项式类型的 Hamilton 方程, 文献[5] 中给出了求约束的对合算法, 该算法可以在计算机上实现, 但是在计算过程中需要延拓和完备化, 中间过程膨胀较大, 从而使计算量增大•

本文主要完成了以下工作, 在研究了上述几种方法之后, 首先给出了前两种方法具体的实现步骤, 使得整个方法看起来比较清晰; 其次, 在对上述两种算法做了分析之后, 结合吴消元法[6,7], 对多项式类型的 Euler_Lagrange 方程和 Hamilton 方程提出了一种求约束新的算法• 新算法和前两种方法相比, 不用计算 Hessian 矩阵的秩和判定以函数为系数的方程的线性相关性, 而且易于在计算机上实现, 最后的表达形式为梯形形式• 和前两种方法相比, 形式更为简洁• 新算法和对合法相比, 首先计算步骤比对合法少, 且在计算机上易于实现, 因为新算法把原方程按代数方程处理, 而对合法是把原方程按微分方程来处理; 其次, 新算法不需要延拓和完备化, 所以中间过程膨胀较小, 计算量比对合法大为降低• 新算法得到的结果与 Shanmugadhasan 描述的方法和 Dirac 方法一致, 但表达形式更为简洁•

1　吴代数消元法

k 是特征为 0 的域, $k[u_1, \cdots, u_s, x_1, \cdots, x_n]$ 是 k 上的多项式环, 多项式环中变量分为两组:

$$u_1, \cdots, u_s;\ x_1, \cdots, x_n;$$

$u_1, \cdots, u_s$ 作为参变量, $x_1, \cdots, x_n$ 是主变量• p 是一多项式, p 中出现的最大下标的变量称为主变元, 主变元的下标称为 p 的类, 记作 $\mathrm{CLS}(p)$; 如果 $x_1, \cdots, x_n$ 在 p 中不出现, 则类为 0, p 称为平凡的• 在 p 中关于某一变元 x_l 的最高次幂记作 $\deg_{x_l} p = d_l$; 设 p 的类为 l, (l, d_l) 称为多项式 p 的秩• 主变元的最高次幂的系数称为 p 的初式, 记作: $I(p)$• 对于每一个多项式, 就可以按主变元的降幂写出•

定义 1.1　对于两个非零多项式 p、q, 如果

1) $\mathrm{CLS}(p) > \mathrm{CLS}(q)$, 或者

2) $\mathrm{CLS}(p) = \mathrm{CLS}(q) = l > 0$, 但 $\deg_{x_l} p < \deg_{x_l} q$,

则称 p 小于 q, 记作 $p < q$; 如果 p 和 q 有相同的秩, 则称 p 和 q 等价, 记作 $p \sim q$•

定义 1.2　对于两个非零多项式 p、q, 如果 $\deg_{x_l} q < \deg_{x_l} p$, 其中 $\mathrm{CLS}(p) = l > 0$, 则称 q 关于 p 是约化的•

定理 1.3　对于两个非零多项式 p、q, 其中 $\mathrm{CLS}(p) = l > 0$•

$$p = c_m x_l^m + c_{m-1} x_l^{m-1} + \cdots + c_1 x_l + c_0,$$

$$q = d_n x_l^n + d_{n-1} x_n^{n-1} + \cdots + d_1 x_l + d_0,$$

则存在 $g, r \in k[u_1, \cdots, u_s, x_1, \cdots, x_n]$, $s \in \mathbf{N}$ 使得

$$I(p)^s \cdot q = g \cdot p + r, \tag{1}$$

且 $\deg_{x_l} r < m$, (1) 式称为 q 关于 p 的带余除法, 记作 $\mathrm{Re}(q, p)$, r 称为余式;

设 $P = \{p_1, \cdots, p_k\}$, 是一多项式集, q 是一非零多项式, 记

$$r_k = \mathrm{Re}(q, p_k), r_{k-1} = \mathrm{Re}(r_k, p_{k-1}), \cdots, r_1 = \mathrm{Re}(r_2, p_1), \tag{2}$$

(2) 式称为 q 关于 P 的带余除法, 记作 $Re(q, P)$•

对于两个多项式集 P、Q, 我们常记

$$\mathrm{Re}(Q, P) = \{\mathrm{Re}(q, P) \mid \mathrm{Re}(q, P) \neq 0, q \in Q\}• \tag{3}$$

定义 1.4　$p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是一组多项式, 如果有

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_k, \tag{4}$$

则称(4)式为升列; 数域 k 中任一非零常数构成的特殊升列称为矛盾升列; 如果 p_i 关于 $p_1, \cdots, p_{i-1}$ 都是约化的, 则称(4)式是为约化升列•

对于两个约化升列

$$P: p_1, \cdots, p_k; \quad Q: q_1, \cdots, q_l•$$

如果有 $j \leqslant \min\{k, l\}$, 使得

$$p_1 \sim q_1, \cdots, p_{j-1} \sim q_{j-1}, \qquad p_j < q_j;$$

或者 $l < k$, 且

$$p_1 \sim q_1, \cdots, p_l \sim q_l,$$

则称 P 小于 Q, 记作 $P < Q$• 如果 $l = k$, 并且对所有的 $j \leqslant l$, 有 $p_j \sim q_j$, 则称 P 和 Q 等价, 记作 $P \sim Q$•

定理 1.5 P 是一非空多项式集, 根据上面给出的约化升列的序, P 一定存在极小的约化升列, P 的极小约化升列称为基列; P 的约化升列 G 是基列当且仅当 $P \setminus G$ 不存在关于 G 约化的非零多项式[7]•

上面的定理也给出了求一个有限多项式集基列的方法, 下面具体给出求基列的算法•

算法 1

[输入]: 多项式集 Q

[输出]: Q 的基列 B_s

Step1 令 $B_s = \varnothing$, 先在 Q 中找出一个秩最低的多项式 f• 若 $\mathrm{CLS}(f) = 0$, 则 f 就是基列, $B_s = B_s \cup f$, 输出 B_s; 否则转入下一步;

Step2 $Q = Q \setminus B_s$, 如果 $Q = \varnothing$ 或关于 B_s 都是非约化的, 则输出 B_s, 否则找出 Q 所有关于 B_s 约化的多项式, 取秩最小的一个 f, $B_s = B_s \cup f$, 返回 Step2•

注 由于 Q 是有限的, 所以该算法能够在有限步内结束•

定义 1.6 对于任意有限多项式集 $P = \{g_1, \cdots, g_d\}$, $\mathrm{Zero}(P)$ 是 P 的零点集• 多项式集 C 称为 P 的特征列, 如果 C 满足以下条件:

1) C 是一非矛盾升列;

(2) $\mathrm{Zero}(P) \subset \mathrm{Zero}(C)$;

(3) $\mathrm{Re}(P, C) = \varnothing$•

这里 $\mathrm{Zero}(P) = \{v \in k^n \mid p(v) = 0, \ \forall p \in P\}$•

下面给出求特征列的算法•

算法 2

[输入]: 多项式集 P_s

[输出]: P_s 的特征列 A_s

$$\begin{array}{llll} P_s = P_{s1} & P_{s2} & \cdots & P_{sk} \\ & B_{s1} \quad B_{s2} & \cdots & B_{sk} = A_s \\ & R_{s1} \quad R_{s2} & \cdots & R_{sk} = \varnothing• \end{array}$$

其中 B_{si} 是 P_{si} 的基列, $R_{si} = \mathrm{Re}(P_{si} \setminus B_{si}, B_{si})$ 且 $R_{si} \neq \varnothing$, $P_{si} = P_{si-1} \cup B_{si-1}$; 如果某一 B_{si} 是一平凡多项式, 则终止循环, 输出 B_{si}•

定理 1.7(零点分解定理) 设 $P = \{p_1, \cdots, p_n\}$ 是一多项式集, $F = \{f_1, \cdots, f_s\}$ 是它的一

个特征列, I_i 是 f_i 的初式, $i = 1, \cdots, s$, 则

$$\mathrm{Zero}(P) = \mathrm{Zero}(F/J) \cup \bigcup_{i=1}^{s} \mathrm{Zero}(P, I_i), \tag{5}$$

其中 J 是各个初式 I_i 的乘积; 而多项式集 $P \cup I_i$ 又可以利用算法 2 求其特征列 F_i, 如此继续, 最终可得

$$\mathrm{Zero}(P) = \bigcup_{j=1} \mathrm{Zero}(F_j/J_j), \tag{6}$$

其中 J_j 是 F_j 中各个初式的乘积•

2 动力学中的 Lagrange 方程与 Hamilton 方程

文献[1~4]给出了求退化的 Euler_Lagrange 方程和 Hamilton 方程约束的方法• 在上述文献中, 这些方法是以描述性的语言给出的, 为了进一步对上述算法进行研究, 并加以改进, 或者以此为基础提出新的算法, 我们首先对文献中描述的方法进行了改写, 以算法的形式给出, 改写后的算法也更加简洁•

在介绍 Langrange 方程和 Hamilton 方程之前, 先给出下面两个定义• 如果不特别说明, 此后, 在方程里出现两个相同的上标或者是下标, 就表示求和•

定义 2.1 设 (f_{ij}) 是一个 $n \times n$ 矩阵, 其中 $f_{ij} = f_{ij}(x_1, \cdots, x_s)$ 是 $(x_1, \cdots, x_s) \in F^s$ 的函数, F 是一数域, 当 (f_{ij}) 的行列式不恒等于 0 时, 称 (f_{ij}) 非奇异, 否则称为奇异的• (f_{ij}) 非奇异子阵的最大阶数称为 (f_{ij}) 的秩•

定义 2.2 设 $\boldsymbol{f}_i = (f_{i1}, \cdots, f_{in})$ 是一向量, 其中 $f_{ij} = f_{ij}(x_1, \cdots, x_s)$ 是 $(x_1, \cdots, x_s) \in F^s$ 的函数, 且 $f_{ij} \in C^k(F^s)$• $\boldsymbol{f}_i$, $i = 1, \cdots, n$ 线性相关当且仅当存在不全为零的 $v_i \in C^k(F^s)$, $i = 1, \cdots, n$, 使得

$$\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{f}_i = 0 \cdot$$

在具有有限个自由度的系统中, 运动方程用广义坐标 q_i, $i = 1, \cdots, n$ 和广义速度 $\dot{q}_i$, $i = 1, \cdots, n$ 可以描述为

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_i, \dot{q}_i)\,\mathrm{d}t,$$

其中 L 是 Lagrange 函数• 利用变分原理, 可以得到物体运动的 Euler_Lagrange 方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \cdots, n) \cdot \tag{7}$$

当 Hessian 矩阵

$$[W_{ij}] = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right] \tag{8}$$

非奇异时, Euler_Lagrange 方程称为正则的, 否则称为是退化的• 本文主要研究退化的 Euler_Lagrange 方程• 对于退化的 Euler_Lagrange 方程, 有一些约束, 称为 Lagrange 约束• (7) 式可以改写为

$$W_{ij} \cdot \ddot{q}_j = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j = A_i \cdot \tag{9}$$

Lagrange 方程实际是一微分方程组, 记为 L_s• 文献[1]中给出了求 Euler_Lagrange 方程约束的方法, 但只是描述性的给出, 该方法加以总结, 可以给出如下算法• 设 (W_{ij}) 的秩为 $n - r$•

算法 3

[输入]: Euler_Lagrange 方程 L_s

[输出]：带约束的 Lagrange 方程

Step1　确定Hessian 矩阵的秩, 设秩为 $n-r$, 则在方程(7) 或(9) 中有 $n-r$ 个方程是线性独立的, 找出这 $n-r$ 个方程. 则其余 r 个方程可以被这 $n-r$ 个方程线性表出, 且这 r 个方程可能退化为如下形式:

$$B_k(t, q_i, \dot{q}_i) = 0 \qquad (k = 1, \cdots, r); \tag{10}$$

Step2　确定矩阵 $(\partial B_k/\partial \dot{q}_r)$ 的秩, 如果秩为 r, 则上面 r 个方程相互独立, 转入 Step3; 否则, 如果秩为 $r' < r$, 则和 Step1 类似, 可以找出 $r-r'$ 个退化的方程

$$C_l(t, q_i) = 0 \qquad (l = 1, \cdots, r-r'); \tag{11}$$

Step3　求相容条件:

$$\dot{B}_k(t, q_i, \dot{q}_i) = 0, \quad \dot{C}_l(t, q_i) = 0; \tag{12}$$

Step4　设 $B_s = \left\{\dot{B}_1, \cdots, \dot{B}_r\right\}$, $C_s = \left\{\dot{C}_1, \cdots, \dot{C}_r\right\}$, 如果 L_s 等于 $L_s \cup B_s \cup C_s$, 结束循环, 输出 L_s, 否则, 令 $L_s = L_s \cup B_s \cup C_s$, 返回 Step1.

输出的 L_s 中, 含 $\ddot{q}$ 是运动方程, 其余的是约束. 运动方程必须满足约束, 应将约束代入运动方程. 最后得到带约束的 Euler_Lagrange 方程. 由于 Euler_Lagrange 方程是有限的, 最高阶导数不超过 2, 所以上述算法可以在有限步内完成. 在有些文献中[5], 把不含有对 t 一阶导数, 也就是不含有速度的约束称为 A 型约束; 把含有对 t 一阶导数, 也就是含有速度的约束称为 B 型约束. 本文把这两者统一称为约束.

Euler_Lagrange 方程经常化为Hamilton 方程来研究. 带约束的Hamilton 方程, Dirac 引入弱相等"$\approx$"和强相等"$\simeq$"[2~4], 利用 Possion 括号, 给出了求约束的方法, 称为 Dirac 方法. 引入动量和Legendre 变换:

$$p_i = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i}(t, q_i, \dot{q}_i), \tag{13}$$

$$H_c = p_i \dot{q}_i - L, \tag{14}$$

式(13)可以看成一个坐标变换, Hessian 矩阵就是坐标变换的 Jacobi 矩阵. 如果 Hessian 矩阵非奇异, 根据隐函数定理, $\dot{q}_i$, $i = 1, \cdots, n$ 可以被显式表示. 如果 Hessian 矩阵是奇异的, 设它的秩为 R, 经过计算, 从式(13) 可以解出 R 个 $\dot{\boldsymbol{q}}$, 并得到 $n-R$ 个方程

$$p_r = g_r(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \quad r = R+1, \cdots, n. \tag{15}$$

式(15)称为首约束, 有时也写成隐式形式 $\theta_r(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = 0$. 把解出 R 个 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 和(15) 式代入(14) 式, 得到的 H_c 称为规范的Hamilton函数. 引入乘子 λ_r, $r = 1, \cdots, n-R$, λ_r 为待定函数. 可得首 Hamilton 函数和运动方程:

$$H_p \approx H_c + \lambda_r \theta_r, \tag{16}$$

$$\dot{q}_i \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda_r \frac{\partial \theta_r}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_r \frac{\partial \theta_r}{\partial q_i}. \tag{17}$$

首约束(15) 必须满足相容条件, 对时间 t 求导等式仍然成立, 可得 $n-R$ 个方程

$$\dot{\theta}_b(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = 0. \tag{18}$$

在引进Poisson 括号后, 任意函数 $g(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 对 t 求导可以写为

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t} + [g, H] + \lambda_r [g, \theta_r]. \tag{19}$$

把(18) 式代入(19) 式, 并移项, 则有

$$\lambda_s[\theta_s, \lambda_b] \approx \frac{\partial \theta_b}{\partial t} + [\theta_b, H]. \tag{20}$$

式(20)是关于 λ 的线性方程组，它的系数和非齐次项都是多项式．当系数矩阵非奇异时，非齐次项不是零向量，则有唯一非零解，解出 λ 并代入首 Hamilton 函数和运动方程；非齐次项是零向量，只有零解，这是一种特殊情况，这里不做研究．当系数矩阵奇异时，如果系数矩阵的秩和增广矩阵的秩相同，λ_i 有解，其中有些是任意的；如果系数矩阵的秩小于增广矩阵的秩，则有新的约束产生．新的约束也必须满足相容条件，得到新的关于 λ 的线性方程，和原方程构成新的线性方程组，再继续上面的讨论．如此继续，直到没有新的约束产生，解出 λ 代入首 Hamilton 函数和运动方程，得到 Hamilton 函数和 Hamilton 运动方程．新约束称为次约束．上述步骤可以在有限步内结束．Dirac 方法的详细推导过程可以参阅文献[2～4]．归纳如上所述，可以得到下面的算法．

算法 4

[输入]：Lagrange 函数 L_s

[输出]：带约束的 Hamilton 运动方程

Step1　计算动量 p_i；并解出 $\dot{q}_i$，不含 $\dot{q}_i$ 的方程就是首约束 θ；

Step2　进行 Legendre 变换，得到运动方程．如果没有首约束，转入 Step4．否则引入乘子 λ，计算首 Hamilton 函数 H_p．求首约束的相容条件，得到 λ 的线性方程组 H_s；

Step3　求解 H_s，如果有新约束，记作 θ_s，求相容条件 $\dot{\theta}_s$，$H_s = H_s \cup \dot{\theta}_s$，返回 Step3；

Step4　将 λ 代入 H_p 和运动方程，输出 H_p、θ_s 和运动方程．

3　利用吴消元法分析动力学方程

研究带约束的动力学系统，首先要求出所有的约束．利用算法 3 求 Euler_Lagrange 方程的约束时，确定 Hessian 矩阵的秩和找出线性独立的方程比较困难．在算法 4 中，引入动量，首先要从式(13)中解 $\dot{q}_i$，看是否有首约束，式(13)是多项式方程组，求解 $\dot{q}_i$ 并不容易．其次，如果有首约束，引入乘子，计算相容条件，得到线性方程组(20)，虽然是解线性方程组，但系数是多项式，求解也不容易．分析算法 3 和算法 4，可以看出 Euler_Lagrange 方程和 Hamilton 方程实际都被看成代数方程，只是在求约束时加入了相容条件，所以我们把吴消元法和算法 3、算法 4 相结合，给出一种求带约束的 Euler_Lagrange 方程和 Hamilton 方程的新算法．

在新的算法中，把 Euler_Lagrange 方程看成以 $\boldsymbol{q}$、$\dot{\boldsymbol{q}}$、$\ddot{\boldsymbol{q}}$ 为未知元的代数方程组 L_s．给定一个序，首先利用算法 2 求出 L_s 特征列 B_s，B_s 中不包含 $\ddot{q}_i$ 的方程就是约束，必须满足相容条件．求出所有的相容条件，并把所得相容条件添加到原方程 L_s 中，仍记为 L_s；再求 L_s 特征列 B_s 和相容条件，如此继续，直到 B_s 不再改变，也就是没有新的约束出现，这时 B_s 即为带约束的 Euler_Lgarange 方程．对 Hamilton 方程，首先引入动量(13)，把式(13)看成关于 $\boldsymbol{q}$、$\dot{\boldsymbol{q}}$、$\boldsymbol{p}$ 的多项式，求式(13)的特征列，特征列中不含 $\dot{q}_i$ 的方程就是首约束．如果没有首约束，系统是正则的，进行 Legendre 变换，得到 Hamilton 函数 H 和运动方程．如果有首约束，则系统是退化的，引入乘子 λ，得到规范 Hamilton 函数 H_c 和首 Hamilton 函数 H_p，求首约束的相容条件，得到关于 λ 的线性方程组 H_s，求 H_s 的特征列 B_s，如果 B_s 中有新的约束出现，继续求相容条件，又得到新的方程，新方程和 H_s 合在一起，再求特征列，直到没有新的约束出现．最后得到的特征列 B_s 是含有乘子 λ 和约束的多项式组，解出 λ，代入首 Hamilton 函数 H_p 和运动方程(17)，最终得到 Hamilton 函数 H 和 Hamilton 运动方程．在这里并不解出 λ，而是用多项式带余除法．用 B_s 中含 λ 的多项式去除 H_p 和运动方程(17)，从第 1 节式(1)～(4)可以看出，多项式带余除法实际也是一

种代入。 下面给出新算法。 对Lagrange系统, 利用算法5可以直接得到Lagrange约束。 对Hamilton系统, 为了编程方便, 算法分为两个。 算法6判断是否正则, 如果是退化的, 求出首约束。 算法7求出所有的次约束。

算法5

[输入]: Lagrange函数L

[输出]: 带约束的Euler_Lagrange方程

Step1　给定序满足:

$$q_1 < q_2 < \cdots < q_n < \dot{q}_1 < \dot{q}_2 < \cdots < \dot{q}_n < \ddot{q}_1 < \ddot{q}_2 < \cdots < \ddot{q}_n; \tag{21}$$

根据L, 求Euler_Lagrange方程, 记为L_s。 令$C_s = \emptyset$;

Step2　求L_s的特征列B_s, 从B_s找出所有不含关于t的二阶导数的方程, 记为D_s。 如果C_s等于D_s, 转入Step4。 否则转入Step3;

Step3　令$C_s = D_s \cup C_s$, C_s中所有的方程对t求一阶导数, 记为DC_s。 令$L_s = L_s \cup DC_s$, 返回Step2;

Step4　C_s代入L_s。 输出L_s。

算法6

[输入]: Lagrange函数L

[输出]: $\dot{q}$的显式表达式和首约束

Step1　给定序满足:

$$q_1 < \cdots < q_n < p_1 < \cdots < p_n < \dot{q}_1 < \cdots < \dot{q}_n; \tag{22}$$

Step2　并令$C_s = \emptyset$。 计算

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{23}$$

记$P_s = \left\{ p_i - \partial L/\partial \dot{q}_i \,\middle|\, i = 1, \ldots, n \right\}$。 求$P_s$的特征列, 记为$B_s$;

Step3　从B_s中找出不含$\dot{q}$的方程, 添加到C_s, $B_s = B_s - C_s$, 输出B_s和C_s。

如果C_s是空集, 系统是正则的, 否则是退化的。 正则的不再研究。 退化的, 引入乘子λ, 得到规范Hamilton函数和首Hamilton函数。 利用算法7求出次约束和乘子, 并代入首Hamilton函数和运动方程。 运动方程(17)记作M_s。

算法7

[输入]: 首Hamilton函数H_p, 首约束C_s和运动方程M_s

[输出]: Hamilton函数H, Hamilton运动方程M_s和约束D_s

Step1　给定序满足:

$$q_1 < \cdots < q_n < p_1 < \cdots < p_n < \dot{q}_1 < \cdots < \dot{q}_n < \dot{p}_1 < \cdots < \dot{p}_n < \lambda_1 < \cdots < \lambda_R; \tag{24}$$

Step2　求C_s的相容条件, 记作P_s;

Step3　求P_s的特征列B_s并从中取出不含λ的方程, 记作D_s。 如果D_s是空集, 转入Step4, 否则, 求D_s的相容条件, 记作H_s。 如果H_s等于D_s, 转入Step4, 否则$P_s = P_s \cup H_s$, 返回Step3;

Step4　$H = \mathrm{Re}(H_p, (B_s - D_s))$, $H_s = \mathrm{Re}(M_s, (B_s - D_s))$, 输出$D_s$、$H$和$H_s$。

由算法2和算法3可知, 算法5, 算法6和算法7在有限步内能够结束。 选择不同的序, 得

到的结果的形式可能不一样• 借助于符号计算软件, 3 个算法可以在计算机上实现•

下面给出用算法 5、算法 6 和算法 7 的几个例子• 这几个算例的维数比较低, 可以手工计算• 用文献[1] 中给出的方法和 Dirac 方法, 首先要判断系统是否正则, 这一步就不是很容易• 如果是退化的, 要反复求解关于 $\ddot{q}$ 和乘子的线性方程组, 直到没有新的约束出现• 虽然是线性方程组, 但其系数是多项式, 比较麻烦, 计算量非常大, 而且容易出错• 如果用手工完成算法 5、算法 6 和算法 7, 在给定序的基础上求特征列, 这个过程要反复对多项式排序和进行多项式除法, 手工计算比前两个算法更麻烦, 计算量更大• 因为这 3 个算法的初衷就是用计算机来实现• 所以, 虽然可以用手工完成, 但是比较困难• 对于高维数的, 手工计算更加困难•

例 1　Lagrange 函数为 $L = \dot{q}_1^2/2 + q_2\dot{q}_1 + (1-\alpha)q_1\dot{q}_2 + (\beta/2)(q_1-q_2)^2$• 只考虑 $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, $\beta\neq\alpha^2$, 其它情况比较简单, 不做分析• 利用算法 5 可得: 运动方程 $\ddot{q}_1 = 0$, $\ddot{q}_2 = 0$, 约束 $\alpha\dot{q}_1 = \beta(q_1-q_2)$, $\alpha\dot{q}_2 = \beta(q_1-q_2)$• 将约束代入运动方程后可得 $\alpha\dot{q}_1 - \beta(q_1-q_2) = 0$, $\dot{q}_1 - \dot{q}_2 = 0$•

利用算法 6 得到首约束 $\theta = p_2 + (\alpha-1)q_1$, 系统是退化的• 规范 Hamilton 函数为 $H_c = (p_1-q_2)^2/2 - (\beta/2)(q_1-q_2)^2$, 引入乘子 λ, 首 Hamilton 函数为 $H_p = H_c + \lambda\theta$• 利用算法 7 得到次约束 $\theta' = \alpha(p_1-q_2) - \beta(q_1-q_2)$, Hamilton 函数是 $H = H_c + (\beta/\alpha)(q_1-q_2)(p_2+(\alpha-1)q_1)$• 运动方程:

$$\dot{p}_1 = \frac{\beta}{\alpha}(q_1-q_2),\ \dot{p}_2 = \frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha}(q_1-q_2);\ \dot{q}_1 = p_1-q_2,\ \dot{q}_2 = \frac{\beta}{\alpha}(q_1-q_2)•$$

例 2　Lagrange 函数为 $L = q_1(\dot{q}_2 - q_3) - \dot{q}_1q_2$, 利用算法 5 直接可以得到带约束的 Euler_Lagrange 方程: $q_1 - \dot{q}_1 = 0$, $q_2 - \dot{q}_2 = 0$, 最后得到的方程不含 $\ddot{q}$•

利用算法 6 可得首约束 $\theta_1 = p_1 + q_2$, $\theta_2 = p_2 - q_1$, $\theta_3 = p_3$• 系统是退化的• 规范 Hamilton 函数为 $H_c = q_1q_3$, 引入乘子 λ_1、λ_2、λ_3, 首 Hamilton 函数为 $H_p = H_c + \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \lambda_3\theta_3$• 利用算法 7 得到次约束 $\theta_4 = q_1$, Hamilton 函数是 $H = q_1q_3 + q_3(p_2-q_1)/2 + \lambda_3p_3$, 其中 λ_3 是任意函数• 运动方程为:

$$\dot{p}_1 = \frac{q_3}{2},\ \dot{p}_2 = 0,\ \dot{p}_3 = \frac{p_2+q_1}{2},\ \dot{q}_1 = 0,\ \dot{q}_2 = \frac{q_3}{2},\ \dot{q}_3 = \lambda_3•$$

下面两个例子, 一般只在 Hamilton 系统中研究, 这里只给出算法 6 和算法 7 计算的结果•

例 3　质量为 m, 带有完整约束的点粒子, 在球面上运动的 Lagrange 函数为 $L = m^2\dot{q}^2/2 + \mu(q^2-1)$, $q^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$, μ 是附加坐标• 利用算法 6 可得首约束 $p_\mu (= \partial L/\partial\dot{\mu})$, 规范 Hamilton 函数为 $H_c = p^2/2m^2 - \mu(q^2-1)$, $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$• 引入乘子 λ, 首 Hamilton 函数为 $H_p = H_c + \lambda p_\mu$• 利用算法 7 得到次约束 q^2-1, $2m^2q_1^2 + 2m^2q_2^2\mu - 2m^2\mu + q_2^2p_1^2 + q_1^2p_2^2 - p_2^2 - 2q_1q_2p_1p_2$, $\sum_{i=1}^{3}p_iq_i$, Hamilton 函数为 $H = H_c$, 运动方程为:

$$\dot{p}_1 = 2\mu q_1,\ \dot{p}_2 = 2\mu q_2,\ \dot{p}_3 = 2\mu q_3;\ \dot{q}_1 = \frac{p_1}{m^2},\ \dot{q}_2 = \frac{p_2}{m^2},\ \dot{q}_3 = \frac{p_3}{m^2}•$$

例 4　0+1 维时空中 SU(2) Yang_Mills 场[8], 这个模型的 Lagrange 函数是 $L = 0.5(D_t)_i(D_t)_i$, $(D_t)_i = \dot{x}_i + g\varepsilon_{ijk}y_jx_k$, $1\leqslant i, j, k\leqslant 3$, ε_{ijk} 是反对称指标, $\varepsilon_{123} = 1$• 利用算法 6 可得首约束 $p_i^y = \partial L/\partial\dot{y}_i$, 规范 Hamilton 函数为 $H_c = 0.5p_ip_i - g\varepsilon_{ijk}x_jp_ky_i$• 引入乘子 λ_1、λ_2、λ_3, 首 Hamilton 函数为 $H_p = H_c + \lambda_1p_1^y + \lambda_2p_2^y + \lambda_3p_3^y$• 利用算法 7 得到次约束 $p_2x_1 - p_1x_2$, $-p_3x_1 + p_1x_3$• 在文献[8] 中, 次约束是 3 个, $\phi_1 = p_3x_2 - p_2x_3$, $\phi_2 = -p_3x_1 + p_1x_2$, $\phi_3 = p_2x_1$

$-x_2p_1$, 但是这3个约束并不独立, $x_1\phi_1+x_2\phi_2+x_3\phi_3=0$, 这里的两个次约束是相互独立的。Hamilton函数和首Hamilton函数相同。运动方程为:

$$\dot{p}_i=-g\varepsilon_{ijk}p_ky_i,\ \dot{p}^y_i=-g\varepsilon_{ijk}p_kx_j;\ \dot{x}_i=p_i-g\varepsilon_{ijk}x_ky_j,\ \dot{y}_i=\lambda_i.$$

本文利用吴消元法对带约束动力学作了研究。对Lagrange系统, 利用算法5可以判断Lagrange系统是否正则。如果是退化的, 可以很快求出Lagrange约束。Hamilton系统是否正则利用算法6来判断, 如果是退化的, 并可以求出首约束。退化的Hamilton系统, 在算法6的基础上, 利用算法7可以求出次约束。我们用Mathematica符号计算软件编写了算法5、6和7的程序。上述几个算例在Intel CPU 2.0G的机器上运行时间均不超过2 s。

[参 考 文 献]

[1] Shanmugadhasan S. Generalized Canonical formalism for degnerate dynamical systems[J]. Proc Camb Phil Soc, 1963, **59**: 743—757.

[2] Dirac P A M. Generalized Hamiltonian dynamics[J]. Canda J Math, 1950, **2**: 129—148.

[3] Dirac P A M. Generalized Hamiltonian dynamics[J]. Proc Roy Soc A, 1958, **246**: 326—332.

[4] Sundermeyer K. Constrained Dynamics[M]. Lecture Notes in Physics **169**. New York: Springer-Verlag, 1982.

[5] Seiler Werner M, Tucker Robin W. Involution and consrtrained dynamics Ⅰ: The Dirac approach[J]. Journal of Physics A_Mathematical and General, 1995, **28**: 4431—4451.

[6] 吴文俊, 数学机械化[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[7] 何青. 计算代数[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1997.

[8] Gogilidze S A, Khvedelidze A M. Hamiltonian reduction of SU(2) Dirac_Yang_Mills mechanics[J]. Phys Rev D, 1998, **57**: 7488—7500.

Application of Wu Elimination Method to Constrained Dynamics

JIA Yi_feng[1], CHEN Yu_fu[1], XU Zhi_qiang[2]

(1. Department of Mathematics, Graduate University, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, P.R.China;

2. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P.R.China)

Abstract: The polynomial type Lagrange equation and Hamilton equation of finite dimensional constrained dynamics are considered. A new algorithm was presented for solving constraints based on Wu elimination method. The new algorithm does not need to calculate the rank of Hessian matrix and determine the linear dependence of equations, so the steps of calculation decrease greatly. In addition, the expanding of expression occurring in the computing process is smaller. Using the symbolic computation software platform, the new algorithm can be executed in computers.

Key words: Hamilton system; constrained dynamics; characteristic chain; Hessian matrix