

文章编号: 1000-0887(2004)11-1195-08

# 无约束 Timoshenko 梁横向冲击响应分析<sup>\*</sup>

陈<sup>1,2</sup>, 郑海涛<sup>1</sup>, 薛松涛<sup>1,2,3</sup>, 唐和生<sup>1</sup>, 王远功<sup>1,2</sup>

(1. 同济大学 结构工程与防灾研究所, 上海 200092;

2. 同济大学 空天技术中心, 上海 200092;

3. 日本近畿大学 理工学部 建筑学科, 日本大阪 577-8502)

(我刊原编委何福保推荐)

**摘要:** 将运动刚体与受其横向冲击的无约束 Timoshenko 梁看成是一个接触冲击系统, 用广义 Fourier 级数方法推导了系统的特征方程和特征函数, 得到了冲击响应的解析解。冲击响应可以分解成弹性响应与刚性响应两部分, 验证了接触冲击系统中弹性响应的动量之和为零, 从而得到刚性响应的简便求法。

**关键词:** 无约束; Timoshenko 梁; 横向冲击; 弹性响应; 刚性响应; 动量

**中图分类号:** O347.1      **文献标识码:** A

## 引 言

结构的弹性冲击问题作为一个经典问题可以追溯到二十世纪的初叶, 近年来对于空间结构的动力、控制问题的研究再次引起研究人员对梁中波传播问题的兴趣<sup>[1]</sup>。处于真空、零重力环境中的大型、柔性网架空间结构是由轻质杆件所组成, 由于长宽比较大, 可以近似看成一根梁, 所以研究梁受冲击荷载作用时的瞬态响应即冲击响应对于空间结构的动力控制问题而言是很重要的。

文中采用 Timoshenko 梁模型, 因为剪切效应在结构的冲击动力问题中是不可忽略的因素, 尤其在高阶模态中剪切效应愈加明显。关于 Timoshenko 梁的振动与波动问题, 已经有很多的研究; Boley 和 Chao 用 Laplace 变换方法研究了四种给定突加载荷作用下半无限长梁的响应<sup>[2]</sup>; Miklomit 也用 Laplace 变换法得到了有限长梁的瞬态响应<sup>[3]</sup>; Anderson 和 Calif 给出了有限长梁横向振动的广义级数解<sup>[4]</sup>; Huang 运用分离变量法探讨了六种有限长梁的正规解<sup>[5]</sup>; 刑誉峰给出了质点与有限长梁横向弹性碰撞接触问题的半解析解<sup>[6]</sup>。

在空间轨道上运转的空间结构没有外部支撑, 因此对于长宽比较大的网架空间结构, 其近似模型可以认为是无约束 Timoshenko 梁。无约束结构的冲击问题不同于约束结构之处在于存在刚性响应, 无约束 Timoshenko 梁在运动刚体的横向冲击作用下会产生刚性与弹性两部分响应。文中用广义 Fourier 级数方法推导并得到了无约束 Timoshenko 梁在运动刚体横向冲击过程中的响应解析解, 将刚性响应从总响应中分离出来, 并验证了冲击系统中弹性响应的动量

\* 收稿日期: 2003\_08\_28; 修订日期: 2004\_06\_18

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(59925820)

作者简介: 陈 (1944—), 男, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86\_21\_65982390; E-mail: chenrong@mail.tongji.edu.cn)。

总和为零,从而得到了刚性响应的简便求法。

## 1 基本方程及其通解

Timoshenko 梁运动方程:

$$EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + kAG \left\{ \frac{\partial y}{\partial x} - \phi \right\} - \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - kAG \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} = 0, \quad (2)$$

式中:  $y(x, t)$  为横向位移;  $\phi(x, t)$  为截面由弯曲产生的转角;  $E$  为弹性模量;  $G$  为剪切弹性模量;  $I$  为横截面惯性矩;  $A$  为横截面面积;  $\rho$  为密度;  $k$  为取决于横截面形状的数值因子。

(1)、(2)式整理以后可写成

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \left\{ \rho I + \frac{\rho EI}{kG} \right\} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0, \quad (3)$$

$$EI \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \left\{ \rho I + \frac{\rho EI}{kG} \right\} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 \phi}{\partial t^4} = 0. \quad (4)$$

令:

$$y(\xi, t) = Y(\xi, p) \sin pt, \quad (5)$$

$$\phi(\xi, t) = \Psi(\xi, p) \sin pt, \quad (6)$$

$$\xi = x/L, \quad (7)$$

其中:  $\xi$  为梁的无量纲坐标;  $p$  为角频率;  $L$  为梁长。将(5)~(7)式代入(1)、(2)式,消去  $\sin pt$ , 可以得到:

$$s^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - (1 - b^2 r^2 s^2) \Psi + \frac{1}{L} \frac{\partial Y}{\partial \xi} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} + b^2 s^2 Y - L \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = 0, \quad (9)$$

式中

$$b^2 = \rho A L^4 p^2 / (EI), \quad (10)$$

$$r^2 = I / A L^2, \quad (11)$$

$$s^2 = EI / (k A G L^2). \quad (12)$$

由(8)、(9)式,可得

$$\frac{\partial^4 Y}{\partial \xi^4} + b^2 (r^2 + s^2) \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} - b^2 (1 - b^2 r^2 s^2) Y = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial \xi^4} + b^2 (r^2 + s^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - b^2 (1 - b^2 r^2 s^2) \Psi = 0. \quad (14)$$

(13)、(14)式的通解:

$$Y = C_1 \cos b \alpha \xi + C_2 \sin b \alpha \xi + C_3 \cos b \beta \xi + C_4 \sin b \beta \xi \quad (15)$$

$$\Psi = D_1 \sin b \alpha \xi + D_2 \cos b \alpha \xi + D_3 \sin b \beta \xi + D_4 \cos b \beta \xi \quad (16)$$

$$\text{式中 } \frac{\alpha}{\beta} = \left[ \frac{r^2 + s^2}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{r^2 - s^2}{2} \right)^2 + \frac{1}{b^2}} \right]^{1/2}, \quad (17)$$

将(15)、(16)式代入(9)式,可得

$$\begin{aligned} & - (C_1 b^2 \alpha^2 \cos b \alpha \xi + C_2 b^2 \alpha^2 \sin b \alpha \xi + C_3 b^2 \beta^2 \cos b \beta \xi + C_4 b^2 \beta^2 \sin b \beta \xi) + \\ & b^2 s^2 (C_1 \cos b \alpha \xi + C_2 \sin b \alpha \xi + C_3 \cos b \beta \xi + C_4 \sin b \beta \xi) - L (D_1 b \alpha \cos b \alpha \xi - \\ & D_2 b \alpha \sin b \alpha \xi + D_3 b \beta \cos b \beta \xi - D_4 b \beta \sin b \beta \xi) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

为满足上式的成立, 系数  $C_1 \sim C_4$  和  $D_1 \sim D_4$  满足以下关系:

$$C_1 = L\alpha/b \cdot D_1/(s^2 - \alpha^2), \tag{19}$$

$$C_2 = -L\alpha/b \cdot D_2/(s^2 - \alpha^2), \tag{20}$$

$$C_3 = L\beta/b \cdot D_3/(s^2 - \beta^2), \tag{21}$$

$$C_4 = -L\beta/b \cdot D_4/(s^2 - \beta^2). \tag{22}$$

## 2 冲击系统的固有频率和固有振型

一两端自由的无约束 Timoshenko 梁中点处受一质量  $M_0$ 、速度  $V_0$  的运动刚体的横向冲击 (如图 1 所示), 将梁与刚体看成一个接触冲击系统。考虑到冲击系统的对称性, 可以选取左半段梁  $[0, L/2]$  (如图 2 所示) 进行分析。

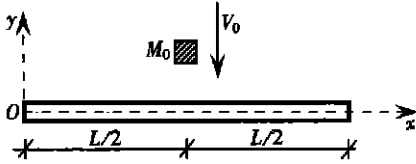


图 1 冲击系统

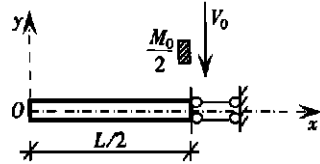


图 2 等效冲击系统

### 2.1 固有频率

图 2 所示的等效冲击系统的边界条件如下:

$$\left[ \frac{1}{L} \frac{\partial Y}{\partial \xi} - \Psi \right] \Big|_{\xi=0} = 0, \tag{23}$$

$$\partial \Psi / \partial \xi \Big|_{\xi=0} = 0, \tag{24}$$

$$kAG \left[ \frac{1}{L} \frac{\partial Y}{\partial \xi} - \Psi \right] \Big|_{\xi=L/2} = \frac{1}{L} M_0 \cdot p^2 \cdot Y \Big|_{\xi=L/2}, \tag{25}$$

$$\Psi \Big|_{\xi=L/2} = 0. \tag{26}$$

将(15)、(16)式代入上述边界条件, 联立(19)~(22), 引入质量比  $\lambda = \rho \cdot A \cdot L / M_0$ , 可得:

$$\frac{s^2}{\alpha^2 - s^2} D_2 + \frac{s^2}{\beta^2 - s^2} D_4 = 0, \tag{27}$$

$$b\alpha \cdot D_1 + b\beta \cdot D_3 = 0, \tag{28}$$

$$\begin{aligned} & \frac{L}{b^2(\alpha^2 - s^2)} \left[ 2\lambda \sin \frac{b\alpha}{2} + b\alpha \cos \frac{b\alpha}{2} \right] D_1 + \frac{L}{b^2(\alpha^2 - s^2)} \left[ 2\lambda \cos \frac{b\alpha}{2} - b\alpha \sin \frac{b\alpha}{2} \right] D_2 + \\ & \frac{L}{b^2(\beta^2 - s^2)} \left[ 2\lambda \sin \frac{b\beta}{2} + b\beta \cos \frac{b\beta}{2} \right] D_3 + \\ & \frac{L}{b^2(\beta^2 - s^2)} \left[ 2\lambda \cos \frac{b\beta}{2} - b\beta \sin \frac{b\beta}{2} \right] D_4 = 0, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\sin(b\alpha/2) D_1 + \cos(b\alpha/2) D_2 + \sin(b\beta/2) D_3 + \cos(b\beta/2) D_4 = 0. \tag{30}$$

上述(27)~(30)式可以写成矩阵形式, 记为

$$A d = \mathbf{0}, \tag{31}$$

其中

$$d = (D_1, D_2, D_3, D_4)^T;$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & s^2/(\alpha^2 - s^2) & 0 & s^2/(\beta^2 - s^2) \\ b\alpha & 0 & b\beta & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ \sin(b\alpha/2) & \cos(b\alpha/2) & \sin(b\beta/2) & \cos(b\beta/2) \end{bmatrix};$$

$$\begin{cases} A_{31} = \frac{L \left[ 2\lambda \sin(b\alpha/2) + b\alpha \cos(b\alpha/2) \right]}{b^2(\alpha^2 - s^2)}; & A_{32} = \frac{L \left[ 2\lambda \cos(b\alpha/2) - b\alpha \sin(b\alpha/2) \right]}{b^2(\alpha^2 - s^2)}; \\ A_{33} = \frac{L \left[ 2\lambda \sin(b\beta/2) + b\beta \cos(b\beta/2) \right]}{b^2(\beta^2 - s^2)}; & A_{34} = \frac{L \left[ 2\lambda \cos(b\beta/2) - b\beta \sin(b\beta/2) \right]}{b^2(\beta^2 - s^2)}. \end{cases} \quad (32)$$

对于矩阵方程  $A \cdot d = 0$ , 只有当  $|A| = 0$  时才有非零解. 令  $f(b) = |A|$ , 则

$$\begin{aligned} f(b) = & \frac{2L\lambda \cdot \alpha \cdot s^2}{b(\alpha^2 - s^2)^2} \left( 1 - \frac{\alpha^2 - s^2}{\beta^2 - s^2} \right) \left[ \frac{\beta}{\alpha} \sin \frac{b\alpha}{2} \cos \frac{b\beta}{2} - \frac{\alpha^2 - s^2}{\beta^2 - s^2} \sin \frac{b\beta}{2} \cos \frac{b\alpha}{2} \right] + \\ & \frac{L\alpha \cdot \beta \cdot s^2}{(\alpha^2 - s^2)(\beta^2 - s^2)} \left[ -2 + \left( \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right) \sin \frac{b\alpha}{2} \sin \frac{b\beta}{2} + \right. \\ & \left. \left( \frac{\alpha^2 - s^2}{\beta^2 - s^2} + \frac{\beta^2 - s^2}{\alpha^2 - s^2} \right) \cos \frac{b\alpha}{2} \cos \frac{b\beta}{2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

就是冲击系统的特征方程(即频率方程), 方程有无穷多个正实数根  $b_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 并对应于冲击系统的无穷多阶固有频率  $p_n (n = 1, 2, 3, \dots)$  (对应关系见(10)式)。

## 2.2 固有振型

由(27)、(28)式, 可得

$$\zeta = \frac{D_4}{D_2} = -\frac{\beta^2 - s^2}{\alpha^2 - s^2}, \quad (34)$$

$$\mu = \frac{D_3}{D_1} = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad (35)$$

由(27)、(28)和(30)式, 可得

$$\eta_1 = \frac{D_2}{D_1} = -\frac{\sin \frac{b\alpha}{2} + \mu \cdot \sin \frac{b\beta}{2}}{\cos \frac{b\alpha}{2} + \zeta \cdot \cos \frac{b\beta}{2}}. \quad (36)$$

将(34)~(36)式代入(16)式, 可得

$$\Psi = D_1 \cdot (\sin b\alpha \xi + \eta_1 \cos b\alpha \xi + \mu \sin b\beta \xi + \eta_2 \cos b\beta \xi). \quad (37)$$

将(19)~(22)式代入(15)式, 并结合(34)~(36)式, 可得:

$$Y = x \cdot D_1 \cdot \left( \cos b\alpha \xi - \eta_1 \sin b\alpha \xi + \frac{1}{\xi} \cos b\beta \xi - \frac{\eta_1}{\mu} \sin b\beta \xi \right), \quad (38)$$

其中  $x = \frac{L\alpha}{b(s^2 - \alpha^2)}. \quad (39)$

对于特征方程(33)的实数根  $b_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 对应的冲击系统的各阶模态(固有振型):

$$Y_n = x_n \cdot \left( \cos b_n \alpha \xi - \eta_n \sin b_n \alpha \xi + \frac{1}{\xi_n} \cos b_n \beta \xi - \frac{\eta_n}{\mu_n} \sin b_n \beta \xi \right), \quad (40)$$

$$\Psi_n = \sin b_n \alpha \xi + \eta_n \cos b_n \alpha \xi + \mu_n \sin b_n \beta \xi + \eta_n \zeta_n \cos b_n \beta \xi. \quad (41)$$

## 3 冲击系统的动力响应

由(37)、(38)式可知, 各阶模态  $Y_n$  和  $\Psi_n$  之间有一一对应的关系; 另外, 由于结构与荷载的对称性, 梁只存在平动刚性位移, 而不存在转动刚性位移. 因此, 冲击系统的横向位移和弯曲转角可以表示成级数形式:

$$y(\xi, t) = A_0 \cdot t + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cdot Y_n(\xi) \cdot \sin p_n t, \quad (42)$$

$$\phi(\xi, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cdot \Psi_n(\xi) \cdot \sin p_n t \quad (43)$$

(42) 式中的右边第一项表示冲击系统的刚性响应部分, 即冲击系统的零频率响应, 其刚性模态为  $Y_0(\xi) = 1$ ; (42)、(43) 式中的级数项表示冲击系统的弹性响应部分, 前者即梁的挠度, 后者为弯曲转角。计算中需要选取足够频率以满足计算不同响应的精度要求。

冲击系统的初始条件如下:

$$\left. \frac{\partial y(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \begin{cases} -V_0 & (\xi = 1/2), \\ 0 & (0 \leq \xi \leq 1/2), \end{cases} \quad (44)$$

$$\left. \frac{\partial \phi(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (45)$$

由(42)、(43)可得:

$$g(\xi) = \left. \frac{\partial y(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cdot p_n \cdot Y_n(\xi), \quad (46)$$

$$h(\xi) = \left. \frac{\partial \phi(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cdot p_n \cdot \Psi_n(\xi). \quad (47)$$

### 3.1 刚性响应系数 $A_0$

对(46)式两边乘以  $Y_0(\xi) = 1$  和梁的分布质量  $m(\xi) = \rho AL$ , ( $0 \leq \xi \leq 1/2$ ) (并考虑冲击端  $\xi = 1/2$  处刚体的集中质量  $M = M_0/2$ )。对  $\xi$  在  $[0, 1/2)$  上积分, 可得

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_0^{1/2-\varepsilon} m(\xi) \cdot Y_0(\xi) \cdot g(\xi) \cdot d\xi \right] + M \cdot Y_0\left(\frac{1}{2}\right) \cdot g\left(\frac{1}{2}\right) = \\ & A_0 \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_0^{1/2-\varepsilon} m(\xi) \cdot Y_0(\xi) \cdot d\xi \right] + M \cdot Y_0\left(\frac{1}{2}\right) \right\} + \\ & \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cdot p_n \cdot \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_0^{1/2-\varepsilon} m(\xi) \cdot Y_0(\xi) \cdot Y_n(\xi) \cdot d\xi \right] + \right. \\ & \left. M \cdot Y_0\left(\frac{1}{2}\right) \cdot Y_n\left(\frac{1}{2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

对于刚性模态  $Y_0(\xi) = 1$  和弹性模态  $Y_n(\xi)$ , 有正交条件:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_0^{1/2-\varepsilon} m(\xi) \cdot Y_0(\xi) \cdot Y_n(\xi) \cdot d\xi \right] + M \cdot Y_0\left(\frac{1}{2}\right) \cdot Y_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (49)$$

将初始条件(44)~(47)式和正交条件(49)式代入(48)式, 可得:

$$A_0 = \frac{1}{1+\lambda} \cdot (-V_0). \quad (50)$$

注意到, 上式中  $A_0$  即系统的刚性速度响应  $v_r = (-V_0)/(1+\lambda)$ , 则系统刚性响应的动量为  $(1+\lambda) \cdot M_0 \cdot (-V_0)/(1+\lambda)$ , 恰等于冲击前刚体  $M_0$  的动量(初始动量)  $-M_0 \cdot V_0$ 。因此, 根据动量守恒定理, 无约束梁的弹性响应的动量总和为 0。根据这个性质可以直接地导出系统的刚性响应。

### 3.2 弹性响应系数 $A_n$

对(46)式两边乘以  $Y_m(\xi)$  和梁的分布质量  $m(\xi) = \rho AL$ , ( $0 \leq \xi \leq 1/2$ ) (并考虑冲击端  $\xi = 1/2$  处刚体的集中质量  $M = M_0/2$ )。对  $\xi$  在  $[0, 1/2)$  上积分, 可得

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_0^{1/2-\varepsilon} m(\xi) \cdot Y_m(\xi) \cdot g(\xi) \cdot d\xi \right] + M \cdot Y_m\left(\frac{1}{2}\right) \cdot g\left(\frac{1}{2}\right) = \\ & A_0 \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_0^{1/2-\varepsilon} m(\xi) \cdot Y_m(\xi) \cdot d\xi \right] + M \cdot Y_m\left(\frac{1}{2}\right) \right\} + \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cdot p_n \cdot \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_0^{1/2-\varepsilon} m(\xi) \cdot Y_m(\xi) \cdot Y_n(\xi) \cdot d\xi \right] + M \cdot Y_m \left( \frac{1}{2} \right) \cdot Y_n \left( \frac{1}{2} \right) \right\} \cdot \quad (51)$$

对(47)式两边乘以  $\Psi_m(\xi)$  和梁的分布转动惯量  $I(\xi) = \rho L$ , ( $0 \leq \xi \leq 1/2$ ) (并考虑冲击端  $\xi = 1/2$  处弯曲转角  $\Psi_m(1/2) = 0$ )。对  $\xi$  在  $[0, 1/2)$  上积分, 可得:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_0^{1/2-\varepsilon} I(\xi) \cdot \Psi_m(\xi) \cdot h(\xi) \cdot d\xi \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cdot p_n \cdot \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_0^{1/2-\varepsilon} I(\xi) \cdot \Psi_m(\xi) \cdot \Psi_n(\xi) \cdot d\xi \right] \right\} \cdot \quad (52)$$

将(51)、(52)两式相加, 并代入初始条件(44)~(47)式和正交条件(49)式, 可得:

$$M \cdot Y_m \left( \frac{1}{2} \right) \cdot g \left( \frac{1}{2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cdot p_n \times \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_0^{1/2-\varepsilon} [m(\xi) \cdot Y_m(\xi) \cdot Y_n(\xi) + I(\xi) \cdot \Psi_m(\xi) \cdot \Psi_n(\xi)] \cdot d\xi \right] + M \cdot Y_m \left( \frac{1}{2} \right) \cdot Y_n \left( \frac{1}{2} \right) \right\} \cdot \quad (53)$$

对于位移模态  $Y_n(\xi)$  和转角模态  $\Psi_n(\xi)$ , 有正交条件:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_0^{1/2-\varepsilon} [m(\xi) \cdot Y_m(\xi) \cdot Y_n(\xi) + I(\xi) \cdot \Psi_m(\xi) \cdot \Psi_n(\xi)] \cdot d\xi \right\} + M \cdot Y_m \left( \frac{1}{2} \right) \cdot Y_n \left( \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (m \neq n) \cdot \quad (54)$$

将(54)式代入(53)式, 可以得到广义系数:

$$A_n = \frac{M \cdot Y_n \left( \frac{1}{2} \right) \cdot g \left( \frac{1}{2} \right)}{p_n \cdot \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_0^{1/2-\varepsilon} [m(\xi) \cdot Y_n^2(\xi) + I(\xi) \cdot \Psi_n^2(\xi)] \cdot d\xi \right] + M \cdot Y_n^2 \left( \frac{1}{2} \right) \right\}} \cdot \quad (55)$$

当冲击系统的位移、转角响应已知时, 可以进一步得到速度  $V(\xi, t)$ 、剪力  $Q(\xi, t)$  和冲击力  $P(t)$  等动力响应:

$$V(\xi, t) = \frac{\partial y(\xi, t)}{\partial t} = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cdot p_n \cdot Y_n(\xi) \cdot \cos p_n t, \quad (56)$$

$$Q(\xi, t) = -kAG \cdot \left[ \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial y(\xi, t)}{\partial t} - \phi(\xi, t) \right] = -kAG \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cdot \left[ \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial Y_n(\xi, t)}{\partial \xi} - \Psi_n(\xi) \right] \cdot \sin p_n t \cdot \quad (57)$$

由于结构和荷载的对称性, 梁内剪力呈反对称分布, 因此梁在冲击作用点处的剪力是间断的,  $\xi = 1/2$  处两侧的剪力分别为  $Q(1/2-, t)$  和  $Q(1/2+, t)$ 。于是, 可以得到运动刚体对梁中点处的冲击力:

$$P(t) = Q \left[ \frac{1}{2} + 1, t \right] - Q \left[ \frac{1}{2} - 0, t \right] = -2Q \left[ \frac{1}{2} - 0, t \right] \cdot \quad (58)$$

#### 4 数值算例分析

算例中取梁长  $L = 36.567$  cm; 截面积  $A = 6.452$  cm<sup>2</sup>; 弹性模量  $E = 3.067 \times 10^5$  MPa; 质量密度  $\rho = 77.5 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>; 截面形状系数  $k = 2/3$ ; 弹性、剪切模量比  $E/G = 8/3$ ; 梁与刚体的质量比  $\lambda = 1$ ; 由(11)、(12)式可得  $s = 2r$ , 取  $r = 0.02$ , 则  $s = 0.04$ 。因此, 挠曲波波前速

度(等于纵波波速)与剪切波波速分别为  $c = \sqrt{E/\rho}$  和  $c_s = \sqrt{kG/\rho}$ , 二者之比为  $c/c_s = 2$

图3表示梁冲击端的无量纲冲击力响应。可以看出: 从无量纲时间  $\tau = \tau c/L = 1$  时开始, 也就是挠曲波波前传播到梁自由端 ( $\xi = 0$ ) 经一次反射后回到冲击端 ( $\xi = 1/2$ ) 时, 冲击力响应开始出现小幅振荡; 从  $\tau = 1.5$  时开始, 也就是挠曲波再次传播到梁自由端时, 冲击力响应开始出现大幅振荡; 在大约  $\tau = 1.6$  时冲击力变为零, 刚体与梁开始分离, 冲击过程结束。

图4表示  $\tau = 0.4$  时梁的无量纲剪力分布图。可以看出:  $\tau = 0.4$  时挠曲波波前未传播到梁段  $\xi = 0 \sim 0.1$  和  $\xi = 0.9 \sim 1$ , 因此在此区段内没有剪力响应; 而剪切波在此时传播到达处 ( $\xi = 0.3, 0.7$ ) 就出现剪力的阶跃; 由于剪力响应呈反对称分布, 所以梁冲击端处 ( $\xi = 1/2$ ) 也出现剪力的阶跃。

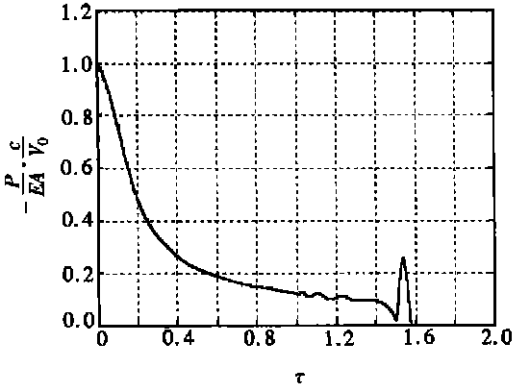


图3 冲击力响应

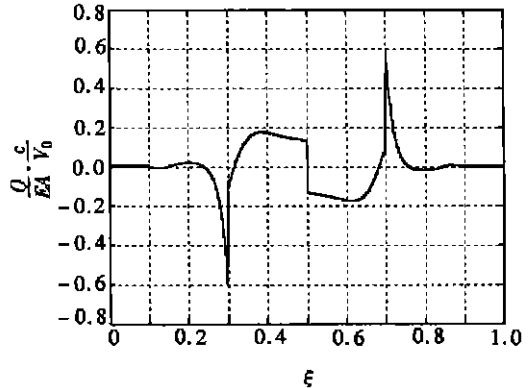


图4 剪力分布 ( $\tau = 0.4$ )

与文献[7]比较可以看出, 无约束梁的冲击响应中弹性响应的特性与简支梁的冲击响应是相似的。图5、6表示  $\tau = 0.4$  时梁的无量纲速度分布图。其中图5所示直线为刚性速度  $V_r$ , 即(56) 式中等式右边的常数项  $A_0$ , 因为算例中取质量比  $\lambda = 1$ , 因此由(50) 式可知刚性速度为  $V_r = 0.5(-V_0)$ ; 图5所示曲线为弹性速度  $V_e$ , 即(56) 式中等式右边的级数项; 图6表示总速度  $V$ , 即刚性速度  $V_r$  和弹性速度  $V_e$  之和。可以看出: 除了速度响应呈对称分布之外, 速度分布的变化特征与剪力分布是一致的。

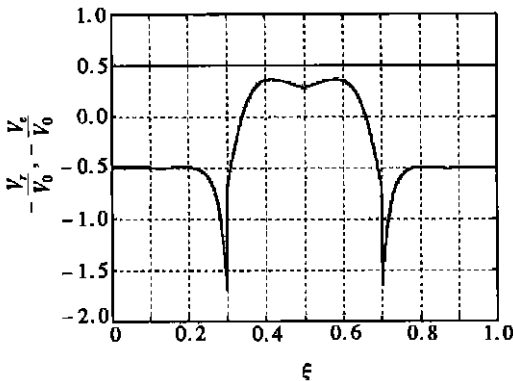


图5 刚性速度和弹性速度分布 ( $\tau = 0.4$ )

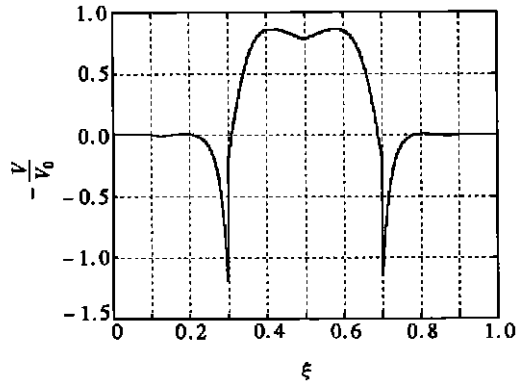


图6 速度分布 ( $\tau = 0.4$ )

## 4 结 论

1) 受刚体横向冲击的无约束 Timoshenko 梁的动力响应由刚性响应和弹性响应两部分构

成;由算例可知,无约束梁的冲击响应中弹性响应的特性与简支梁的冲击响应是相似的。

2) 冲击系统的刚性响应的动量等于冲击作用前运动刚体的动量,根据动量守恒原理,冲击系统的弹性响应的动量总和为零;冲击系统的刚性响应主要由质量比决定。

### [参 考 文 献]

- [1] Su X Y, Pao Y H. Ray normal mode and hybrid analysis of transient waves in a finite beam[J]. Journal of Sound and Vibration, 1992, **151**(2): 351—368.
- [2] Boley B A, Chao C C. Some solutions of the Timoshenko beam equations[J]. Journal of Applied Mechanics, 1955, **22**(3): 579—586.
- [3] Miklowitz J, Calif P. Flexural wave solutions of coupled equations representing the more exact theory of beams[J]. Journal of Applied Mechanics, 1953, **20**(3): 511—514.
- [4] Anderson R A, Calif P. Flexural vibrations in uniform beams according to the Timoshenko theory[J]. Journal of Applied Mechanics, 1953, **20**(3): 504—510.
- [5] Huang T C. The effect of rotary inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions[J]. Journal of Applied Mechanics, 1961, **28**(3): 579—584.
- [6] 刑誉峰. 有限长 Timoshenko 梁弹性碰撞接触瞬间的动态特性[J]. 力学学报, 1999, **31**(1): 67—74.

## Analysis on Transverse Impact Response of an Unrestrained Timoshenko Beam

CHEN Rong<sup>1,2</sup>, ZHENG Hai\_tao<sup>1</sup>, XUE Song\_tao<sup>1,2,3</sup>,  
TANG He\_sheng<sup>1</sup>, WANG Yuan\_gong<sup>1,2</sup>

(1. Research Institution of Structural Engineering and Disaster Reduction,  
Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China;

2. Center for Aerospace Technology, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China;

3. Department of Architecture, School of Science and Engineering,  
Kinki University, Osaka 577\_8502, Japan)

**Abstract** A moving rigid\_body and an unrestrained Timoshenko beam, which is subjected to the transverse impact of the rigid\_body, are treated as a contact\_impact system. The generalized Fourier\_series method was used to derive the characteristic equation and the characteristic function of the system. The analytical solutions of the impact responses for the system were presented. The responses can be divided into two parts: elastic responses and rigid responses. The momentum sum of elastic responses of the contact\_impact system is demonstrated to be zero, which makes the rigid responses of the system easy to evaluate according to the principle of momentum conservation.

**Key words:** unrestrained; Timoshenko beam; transverse impact; elastic response; rigid response; momentum