文章编号: 1000_0887(2006) 11_1271_09

FC_空间内的广义向量变分型不等式*

方 敏[1], 丁协平[2]

(1. 四川大学 数学学院, 成都 610064;
2. 四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066)

(我刊编委 丁协平来稿)

摘要: 在 FC_空间中引入和研究了一类广义向量变分型不等式(GVVTIP), 包含了大多数向量平衡问题, 向量变分不等式问题, 广义向量平衡问题和广义向量变分不等式问题作为特殊情况· 利用 F_KKM 定理, 在非紧 FC_空间中, 建立了关于 GVVTIP 解的某些新的存在定理· 这些定理统一、改进和推广了文献中的一些重要的已知结果·

关 键 词: 广义向量变分型不等式; F_KKM 映射; $F\_P_x\_$ 对角拟凸; FC_空间

中图分类号: O255; O177.92 文献标识码: A

引 言

1980 年, Giannessi[1] 在有限维欧氏空间中首次引入和研究了向量变分不等式(VVIP)· 由于 VVIP 和它的各种推广形式在向量优化, 优化控制, 数学规划, 算子研究和经济平衡问题中有着广泛和重要的应用(参见: 文献[2]~ 文献[5]、文献[6] 和文献[7]、文献[8] ~ 文献[10] 和其中的参考文献), 所以许多作者从各个不同的方向推广和发展了向量变分不等式的理论、方法和技巧· 其中各种广义向量变分不等式问题(GVVIP) 和广义向量平衡问题(GVEP) 也成为一个重要的发展方向·

设 X 是拓扑向量空间 E 的非空凸子集, Z 是拓扑向量空间· 设 $f: X \times X \to 2^Z$ 是集值映射, 其中 2^Z 表示 Z 的一切子集的簇· 设 $P: X \to 2^Z$ 是集值映射, 使得对每一 $x \in X$, $P(x)$ 是 Z 中的一闭凸点锥, 而且 $\operatorname{int}P(x) \neq \varnothing$ 和 $P(x) \neq Z$, 其中 $\operatorname{int}P(x)$ 表示 $P(x)$ 的内点· 广义向量平衡问题(GVEP) 是: 求 $\hat{x} \in X$ 使得

$$f(\hat{x}, y) \nsubseteq -\operatorname{int}P(\hat{x}), \qquad \forall y \in X· \tag{1}$$

Song[2], Ansari 和 Yao[4] 等人引入并研究了 GVEP(1)· 在拓扑空间中, 关于 GVEP 解的一些存在性定理在不同的假设条件下也有人研究· 例如文献[2]、文献[4]、文献[5]·

设 $T: X \to 2^{L(E, Z)}$ 是集值映射, 其中 $L(E, Z)$ 是所有从 E 到 Z 的连续线性算子所组成的空间· $\theta: X \times X \to E$ 是单值映射· 如果 $f(x, y) = \langle Tx, \theta(y, x)\rangle = \bigcup_{\xi \in Tx} \langle \xi, \theta(y, x)\rangle$ 对任意 $(x, y) \in X \times X$ 成立, 其中 $\langle \xi, \theta(y, x)\rangle$ 表示线性算子 $\xi \in Tx \subseteq L(E, Z)$ 在 $\theta(y, x)$ 的值, 则 GVEP

* 收稿日期: 2005_11_01; 修订日期: 2006_08_06
基金项目: 四川省教育厅重点科研基金资助项目(2003A081)
作者简介: 方敏(1980—), 女, 重庆人, 博士(联系人. E_mail: fangmingracie@163.com)·

(1) 化归为下面的广义向量似变分不等式问题(GVVLIP)：求 $\hat{x} \in X$ 使得

$$\forall y \in X,\ \exists \xi \in T(\hat{x}) \text{ 满足 } \langle \xi, \theta(y, \hat{x}) \rangle \notin -\operatorname{int} P(\hat{x})。 \tag{2}$$

GVVLIP(2) 已经由 Ansari, Siddiqi 和 Yao[11], Ding 和 Tarafdar[12],[6], Ding[7], Chang, Tompson 和 Yuan[13], Luo[14] 等人研究。

如果 $\theta(y, x) = y - x$, 对所有 $(y, x) \in X \times X$ 成立, 则 GVVLIP(2) 化归为下面的广义向量变分不等式问题(GVVIP)：求 $\hat{x} \in X$ 使得

$$\forall y \in X,\ \exists \xi \in T(\hat{x}) \text{ 满足 } \langle \xi, y - \hat{x} \rangle \notin -\operatorname{int} P(\hat{x})。 \tag{3}$$

GVVIP(3) 及其应用已经被许多作者广泛研究, 参见由 Giannessi[15] 编辑的书和其中的参考文献。

设 X 和 L 是两个拓扑空间, Z 是拓扑向量空间, $P: X \to 2^Z$ 是集值映射, 使得对每一 $x \in X$, $P(x)$ 是 Z 中的一闭凸点锥, 而且 $\operatorname{int} P(x) \neq \varnothing$ 和 $P(x) \neq Z$, 其中 $\operatorname{int} P(x)$ 表示 $P(x)$ 的内点。 设 $T: X \to 2^L$ 和 $f: X \times X \to 2^Z$ 是两个集值映射, $\psi: L \times X \times X \to Z$ 是单值映射。 我们引入并研究下面的广义向量变分型不等式问题(GVVTIP)：求 $\hat{x} \in X$ 使得

$$\forall y \in X,\ \exists \xi \in T(\hat{x}) \text{ 满足 } f(\hat{x}, y) + \psi(\xi, y, \hat{x}) \not\subset -\operatorname{int} P(\hat{x})。 \tag{4}$$

GVVTIP(4) 是一种新的模型且称 $\hat{x}$ 是 GVVTIP(4) 的弱 Pareto 型解。

称 $(\hat{x}, \xi)$ 是 Pareto 型解, 如果存在 $\hat{x} \in X$ 和 $\xi \in T(\hat{x})$ 使得

$$f(\hat{x}, y) + \psi(\xi, y, \hat{x}) \not\subset -\operatorname{int} P(\hat{x}), \qquad \forall y \in X。$$

本文只考虑 GVVTIP(4) 的弱 Pareto 型解的存在性。

设 X 是拓扑向量空间 E 的非空凸子集, Z 是拓扑向量空间, $\theta: X \times X \to E$, $T: X \to 2^{L(E, Z)}$ 和 $f: X \times X \to 2^Z$, 其中 $L(E, Z)$ 是所有从 E 到 Z 的连续线性算子所组成的空间。 令 $L = L(E, Z)$ 和 $\psi(\xi, y, x) = \langle \xi, \theta(y, x) \rangle$, 对每一 $x, y \in X$ 和 $\xi \in T(x)$ 成立, 则 GVVTIP(4) 化归为下面的广义向量变分不等式问题(GVVTIP)：求 $\hat{x} \in X$ 使得

$$\forall y \in X,\ \exists \xi \in T(\hat{x}) \text{ 满足 } f(\hat{x}, y) + \langle \xi, \theta(y, \hat{x}) \rangle \not\subset -\operatorname{int} P(\hat{x})。 \tag{5}$$

GVVTIP(5) 已经由 Oettli 和 Schläger[5], Lee[16] 等人研究。

如果 $T: X \to L(X, Z)$ 是单值映射, 则 GVVTIP(5) 化归为下面的向量变分型不等式问题(VVTIP)：求 $\hat{x} \in X$ 使得

$$f(\hat{x}, y) + \langle T\hat{x}, \theta(y, \hat{x}) \rangle \not\subset -\operatorname{int} P(\hat{x}), \qquad \forall y \in X。 \tag{6}$$

很显然, 如果 $T(x) = \{0\}$, 对任意的 $x \in X$ 都成立, 那么 GVVTIP(4) 化归为 GVEP(1)。 如果 $f(x, y) = 0$, 对任意的 $x, y \in X$ 成立, 那么 GVVTIP(4) 化归为 GVVLIP(2)。 因此 GVVTIP(4) 包含了(1) ~ (3), (5) 和(6) 作为特殊情况。

另一方面, 经典的 KKM 定理已经被许多作者推广到非常一般的空间。 最近, Ding[17] 引入并研究了一类无凸性结构的有限连续拓扑空间(简称 FC_空间), 建立了 KKM 型定理和极大元定理。

本文利用广义的 F_KKM 定理, 在非紧 FC_空间中, 建立了关于 GVVTIP(4) 弱 Pareto 型解的某些存在定理。 我们在更弱的条件下得到了最近文献中的重要结果。

1 预备知识

令 X 和 Y 是非空集。 我们将分别用 2^Y 和 $\langle X \rangle$ 表 Y 的一切子集的簇和 $\langle X \rangle$ 的一切非空有限子集的簇。 对任何 $A \in \langle X \rangle$, $|A|$ 表 A 的基数。 令 Δ_n 是具有顶点 $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ 的 n_

维标准单形• 如果 J 是 $\{0, 1, \cdots, n\}$ 的非空子集, 我们用 Δ_J 表顶点集 $\{e_j : j \in J\}$ 的凸包• 令 X 是拓扑空间和 A 是 X 的非空子集, 称 A 在 X 内是紧开(紧闭)的, 如果对 X 的每一非空紧子集 K, $A \cap K$ 在 K 内是开(闭)的• 设 X 和 Y 是拓扑空间, 称集值映射 $T: X \to 2^Y$ 在 X 上是上半连续的(u.s.c), 如果对 Y 的每一开子集 U, 集 $\{x \in X: T(x) \subseteq U\}$ 在 X 中是开的• 称 T 在 X 上是下半连续的(l.s.c), 如果对 Y 的每一开子集 U, 集 $\{x \in X: T(x) \cap U \neq \emptyset\}$ 在 X 中是开的•

在本篇文章中, 我们假设所有的拓扑空间具有 Hausdorff 性质•

定义 1.1[17] 称 $(X, \{\varphi_N\})$ 是 FC_空间, 如果 X 是拓扑空间和任意 $N = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \langle X\rangle$, 其中一些元素可能是相同的, 存在一连续映射 $\varphi_N: \Delta_n \to X$• 称 $(X, \{\varphi_N\})$ 的子集 D 是 X 的 FC_子空间, 如果对任意 $N = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \langle X\rangle$ 和任意 $\{x_{i_0}, \cdots, x_{i_k}\} \subset N \cap D$, 蕴涵 $\varphi_N(\Delta_k) \subset D$, 其中 $\Delta_k = \mathrm{co}(\{e_{i_j}: j = 0, \cdots, k\})$•

定义 1.2 设 X 是 FC_空间 $(E, \{\varphi_N\})$ 的非空子集, $T: X \to 2^E$ 是集值映射, 称 T 是 F_KKM 映射, 如果对任意 $\{e_{i_0}, \cdots, e_{i_k}\} \subset \{e_0, \cdots, e_n\}$

$$\varphi_N(\Delta_k) \subseteq \bigcup_{j=0}^{k} T(x_{i_j})\text{•}$$

其中 $\Delta_k = \mathrm{co}(\{e_{i_j}: j = 0, \cdots, k\})$•

注 1.1 F_KKM 映射包含了由 Ding[18], Deng 和 Xia[19] 引入的相对应概念•

定义 1.3 设 Z 是非空集, X 是 FC_空间 $(E, \{\varphi_N\})$ 的非空子集, $G: X \times X \to 2^Z$ 和 $C: X \to 2^Z$ 是两个集值映射• 称 $G(x, y): X \times X \to 2^Z$ 对 y 是关于 C 的 F_对角拟凸(resp., F_对角拟凹), 如果对任意 $A = \{x_1, \cdots, x_n\} \in \langle X\rangle$ 和任意 $x_0 \in \varphi_A(\Delta_k)$, 存在一 $j \in \{1, \cdots, n\}$, 使得 $G(x_0, x_j) \not\subseteq C(x_0)$ (resp, $G(x_0, x_j) \subseteq C(x_0)$)•

注 1.2 定义 1.3 推广了 Ding[8] 中定义 1.4(2) 相对应的概念•

定义 1.4 设 Z 是拓扑向量空间, X 是 FC_空间 $(E, \{\varphi_N\})$ 的非空子集, $P: X \to 2^Z$ 是集值映射, 使得对每一 $x \in X$, $P(x)$ 是 Z 中的一闭凸点锥, 而且 $\mathrm{int}P(x) \neq \emptyset$ 和 $P(x) \neq Z$, 其中 $\mathrm{int}P(x)$ 表示 $P(x)$ 的内点• 称 $G(x, y): X \times X \to 2^Z$ 对 y 是关于 P 的 F_P_x 对角拟凸(F_P_x_DQC), 如果对任意 $A = \{x_1, \cdots, x_n\} \in \langle X\rangle$ 和任意 $x_0 \in \varphi_A(\Delta_k)$, 存在一 $j \in \{1, \cdots, n\}$, 使得 $G(x_0, x_j) \not\subseteq -\mathrm{int}P(x_0)$•

定义 1.5 设 X 是 FC_空间 $(E, \{\varphi_N\})$ 的非空子集, L 是拓扑空间, Z 是拓扑向量空间, $P: X \to 2^Z$ 是集值映射, 使得对每一 $x \in X$, $P(x)$ 是 Z 中的一闭凸点锥, 而且 $\mathrm{int}P(x) \neq \emptyset$ 和 $P(x) \neq Z$, 其中 $\mathrm{int}P(x)$ 表示 $P(x)$ 的内点• 设 $\psi: L \times X \times X \to E$, $f: X \times X \to 2^Z$ 和 $T: X \to 2^L$• 称映射 f, ψ 和 T 有 F_P_x 对角拟凸关系(F_P_x_DQCR), 如果对任意 $A = \{x_1, \cdots, x_n\}$ 和任意 $x_0 \in \varphi_A(\Delta_k)$, 存在 $j \in \{1, \cdots, n\}$ 和 $\xi \in T(x_0)$, 使得 $f(x_0, x_j) + \psi(\xi, x_j, x_0) \not\subseteq -\mathrm{int}P(x_0)$•

定义 1.6 设 X 是拓扑向量空间 E 的非空凸子集, Z 是拓扑向量空间, $P: X \to 2^Z$ 是集值映射, 使得对每一 $x \in X$, $P(x)$ 是 Z 中的一闭凸点锥, 而且 $\mathrm{int}P(x) \neq \emptyset$ 和 $P(x) \neq Z$, 其中 $\mathrm{int}P(x)$ 表示 $P(x)$ 的内点• 设 $f: X \times X \to 2^Z$, $\theta: X \times X \to E$ 和 $T: X \to 2^{L(E, Z)}$, 其中 $L(E, Z)$ 表示所有从 E 到 Z 的连续线性算子所组成的空间• 称 f, θ 和 T 有 P_x_对角拟凸关系(P_x_DQCR), 如果对任意 $A = \{x_1, \cdots, x_n\} \in \langle X\rangle$ 和任意 $x_0 \in \mathrm{co}(A)$, 存在 $j \in \{1, \cdots, n\}$ 和 ξ

$\in T(x_0)$, 使得 $f(x_0, x_j) + \langle \xi, \theta(x_j, x_0) \rangle$ ¾ $-\ \mathrm{int}P(x_0)$•

定义 1.7[9]　设 X 是拓扑向量空间 E 的非空凸子集, $f: X \times X \to \mathrm{R}$ 是函数• 则称 $f(x, y)$ 对 y 是 P_x_ 拟凸, 如果对任意在 X 中的有限集 $N = \{y_1, \cdots, y_n\}$ 和任意 $y \in \mathrm{co}(N)$ $\left(y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right.$, 且 $\alpha_i \geqslant 0$ 和 $\left.\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\right)$ 使得

$$f(x, y) \subseteq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x, y_i) - P(x)•$$

为了证明我们的主要结果, 我们需要下面的引理•

引理 1.1　设 X 是紧 FC_ 空间, $G: X \to 2^X$ 是 F_KKM 映射且具有紧闭值, 则 $\bigcap_{x \in X} G(x) \neq$ ƒ•

引理 1.2　设 X 是 FC_空间 $(E, \{\varphi_N\})$ 的非空子集, 设 $T: X \to 2^E$ 是 F_KKM 映射且具有紧闭值• 如果对任意 $A = \{x_1, \cdots, x_n\} \in \langle X \rangle$, 在 E 中存在紧 FC_子空间 L_A 且包含 $\{x_1, \cdots, x_n\} \in \langle X \rangle$ 和非空紧子集 K, 使得 $L_A \cap (\bigcap_{x \in L_A} Tx) \subset K$, 则 $K \cap (\bigcap_{x \in X} Tx) \neq$ ƒ•

注 1.3　引理 1.1 是文献[10] 中推论 2.1 的不同形式, 引理 1.2 的证明类似于文献[10] 中定理 2.3 的证明, 我们这里省略•

引理 1.3[8]　设 Y 是非空集, X 和 Z 是两个拓扑空间• 设 $F: X \times Y \to 2^Z$ 和 $C: X \to 2^Z$ 是两个集值映射, 使得

(i) 映射 $C(\cdot)$ 在 $X \times Z$ 中有开图•

(ii) 对任意 $y \in Y$, 映射 $x \mapsto F(x, y)$ 在 X 的任意紧子集上是上半连续, 且具有非空紧值•

则对任意 $y \in Y$, 集 $T(y) = \{x \in X: F(x, y)$ ¾ $C(x)\}$ 在 X 中是紧闭的•

2　主要定理

定理 2.1　设 $(X, \{\varphi_N\})$ 是 FC_ 空间, K 是 X 的非空紧子集, L 是拓扑空间和 Z 是拓扑向量空间• 设 $P: X \to 2^Z$ 是集值映射, 使得对每一 $x \in X$, $P(x)$ 是 Z 中的一闭凸点锥, 而且 $\mathrm{int}P(x) \neq$ ƒ 和 $P(x) \neq Z$, 其中 $\mathrm{int}P(x)$ 表示 $P(x)$ 的内点• 设 $T: X \to 2^L$ 和 $f, g: X \times X \to 2^Z$ 是 3 个集值映射• $\psi: L \times X \times X \to Z$ 是单值映射, 使得对任意 $y \in X$, 映射 $(\xi, x) \mapsto \psi(\xi, x, y)$ 是连续的• 假设下面的条件成立

(i) T 是上半连续的且具有非空紧值•

(ii) 对每一 $y \in X$, $x \mapsto g(x, y)$ 在 X 的每个紧子集内是下半连续的•

(iii) f, ψ 和 T 具有 F_P_x_DQCR•

(iv) 对任意 $x, y \in X$ 和 $\xi \in Tx$, 如果 $f(x, y) + \psi(\xi, y, x)$ ¾ $-\ \mathrm{int}P(x)$, 则 $g(x, y) + \psi(\xi, x, y) \subseteq -\ P(y)$•

(v) 对每一 $x \in X$ 和 $\xi \in Tx$, 如果 $g(x, y) + \psi(\xi, x, y) \subseteq -\ P(y)$ 对每一 $y \in X$ 成立, 则有 $f(x, y) + \psi(\xi, y, x)$ ¾ $-\ \mathrm{int}P(x)$, 对每一 $y \in X$ 成立•

(vi) 对每一 $N \in \langle X \rangle$, 存在 X 的非空紧 FC_子空间 L_N 且包含 N, 使得对每一 $x \in L_N \setminus K$, 存在一 $y \in L_N$ 使得 $f(x, y) + \psi(\xi, y, x) \subseteq -\ \mathrm{int}P(x)$, 对每一 $\xi \in Tx$ 成立•

则存在 $\hat{x} \in K$ 使得

$$\forall y \in X,\ \exists \xi \in T(\hat{x})\ 满足 f(\hat{x}, y) + \psi(\xi, y, \hat{x}) \not\subseteq -\operatorname{int}P(\hat{x})。$$

证明 定义集值映射 $G: X \to 2^X$ 如下

$$G(y) = \left\{x \in X:\ \exists \xi \in Tx\ 使得 f(x, y) + \psi(\xi, y, x) \not\subseteq -\operatorname{int}P(x)\right\},\quad \forall y \in X。$$

首先证明对每一 $y \in X$, $G(y)$ 在 X 内是紧闭的。 对 X 的任意紧子集 K, 设 $\left\{x_\alpha\right\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 $G(y) \cap K$ 内一网和 $x_\alpha \to x_0$, 则有 $x_0 \in K$ 和对任意 $\alpha \in \Lambda$, 存在 $\xi_\alpha \in T(x_\alpha)$ 使得

$$f(x_\alpha, y) + \psi(\xi_\alpha, y, x_\alpha) \not\subseteq -\operatorname{int}P(x_\alpha)。$$

由(iv)可以推得

$$g(x_\alpha, y) + \psi(\xi_\alpha, x_\alpha, y) \subseteq -P(y)。$$

因为 K 是紧集, 由(i)和Aubin_Ekeland[20]的命题3.1.11, $\bigcup_{x\in K} Tx$ 是紧的。 不失一般性, 我们可以假设 $\xi_\alpha \to \xi_0 \in L$。 由 T 的上半连续性, 我们有 $\xi_0 \in T(x_0)$。 又因为对任意 $y \in X$, $(\xi, x) \mapsto \psi(\xi, x, y)$ 是连续, 则有 $\psi(\xi_\alpha, x_\alpha, y) \to \psi(\xi_0, x_0, y)$。 注意到对任意固定 $y \in X$, $x \mapsto g(x, y)$ 是下半连续和 $(\xi, x) \mapsto \psi(\xi, x, y)$ 是连续。 由Klein和Thompson[21]的定理7.3.15, 映射 $(\xi, x) \mapsto g(x, y) + \psi(\xi, x, y)$ 也是下半连续。 由于 $-P(y)$ 是闭的, 则对任意 $y \in X$, 集

$$\left\{(\xi, x) \in L \times X:\ g(x, y) + \psi(\xi, x, y) \subset -P(y)\right\}$$

也是闭的(参见文献[5], p.28)。 因此 $g(x_0, y) + \psi(\xi_0, x_0, y) \subseteq -P(y)$, 对任意 $y \in X$ 成立。 由(v), $f(x_0, y) + \psi(\xi_0, y, x_0) \not\subseteq -\operatorname{int}P(x_0)$, 对任意 $y \in X$ 成立。 故对任一 $y \in X$, $x_0 \in G(y) \cap K$ 和 $G(y)$ 在 X 内是紧闭的。

其次, 我们证明 G 是F_KKM映射。 如果假设不成立, 则存在一有限子集 $N = \left\{y_0, \cdots, y_n\right\} \in \langle X\rangle$ 和 $\left\{e_{i_0}, \cdots, e_{i_k}\right\} \subset \left\{e_0, \cdots, e_n\right\}$, 使得 $x_0 \in \varphi_N(\Delta_k)$ 和 $x_0 \notin \bigcup_{j=0}^{k} G(y_j)$。 根据 G 的定义

$$f(x_0, y_j) + \psi(\xi, y_j, x_0) \subseteq -\operatorname{int}P(x_0),\qquad \forall \xi \in T(x_0);\ j \in \left\{0, \cdots, k\right\}。$$

这与条件 f, ψ 和 T 具有F_P_x_DQCR相矛盾。 所以 G 是F_KKM映射。 由(vi), 对每一 $x \in L_N \setminus K$, 存在一 $y \in L_N$ 使得 $x \notin G(y)$。 因此

$$L_N \cap \left(\bigcap_{y\in L_N} G(y)\right) \subset K。$$

由引理1.2可知

$$K \cap \left(\bigcap_{y\in X} G(y)\right) \neq \emptyset。$$

任取 $\hat{x} \in K \cap \left(\bigcap_{y\in X} G(y)\right)$, 由此推得 $\hat{x} \in K$ 使得

$$\forall y \in X,\ \exists \xi \in T(\hat{x})\ 满足 f(\hat{x}, y) + \psi(\xi, y, \hat{x}) \not\subseteq -\operatorname{int}P(\hat{x})。$$

定理2.2 设 X 是拓扑向量空间 E 的非空凸子集, K、Z、P、f、g 与定理2.1中的假设相同, 设 $T: X \to 2^{L(E, Z)}$ 是集值映射, 其中 $L(E, Z)$ 是从 E 到 Z 的所有连续线性算子组成的空间且 $\langle\cdot, \cdot\rangle$ 在 $L(Z, E) \times X$ 内是连续的(参见文献[12]中的引理1), $\theta: X \times X \to E$ 是连续映射, 定理2.1中的条件(i)、(ii)满足且

(iii) f, θ 和 T 具有 P_x_DQCR。

(iv) 对任意 $x, y \in X$ 和 $\xi \in Tx$, $f(x, y) + \langle \xi, \theta(y, x)\rangle \not\subseteq -\operatorname{int}P(x)$ 推出 $g(x, y) + \langle \xi, \theta(x, y)\rangle \subseteq -P(y)$。

(v) 对任意 $x \in X$ 和 $\xi \in Tx$, $g(x, y) + \langle \xi, \theta(x, y) \rangle \subseteq - P(y)$ 对任意 $y \in X$ 成立, 则有 $f(x, y) + \langle \xi, \theta(y, x) \rangle$ ¾ $- \operatorname{int} P(x)$ 对任意 $y \in X$ 成立•

(vi) 在 X 内存在非空紧凸子集 X_0 和非空紧子集 K, 使得对任意 $x \in X \setminus K$, 存在一 $y \in \operatorname{co}(X_0 \cup \{x\})$ 满足 $f(x, y) + \langle \xi, \theta(y, x) \rangle \subseteq - \operatorname{int} P(x)$, $\forall \xi \in Tx$•

则存在一 $\hat{x} \in K$ 使得

$$\forall y \in X, \exists \xi \in T(\hat{x}) \text{ 满足 } f(\hat{x}, y) + \langle \xi, \theta(y, \hat{x}) \rangle \text{ ¾ } - \operatorname{int} P(\hat{x})•$$

证明 对任意 $N \in \langle X \rangle$, 设 $\varphi_N(\Delta_k) = \operatorname{co}(N)$, 则有 $(E, \{\varphi_N\})$ 是 FC_空间• 令 $L = L(E, Z)$ 和 $\psi(\xi, y, x) = \langle \xi, \theta(y, x) \rangle$, 对所有 $x, y \in X$ 和 $\xi \in T(x)$ 成立• 很容易验证定理 2.1 的条件(i) ~ (v) 是满足的• 对任意 $N \in \langle X \rangle$, 令 $L_N = \operatorname{co}(X_0 \cup N)$, 则 L_N 是 X 内的紧凸子集且包含 N• 由(vi), 对任意 $x \in L_N \setminus K \subseteq X \setminus K$, 存在 $y \in \operatorname{co}(X_0 \cup \{x\}) = L_N$ 使得 $f(x, y) + \langle \xi, \theta(y, x) \rangle \subseteq - \operatorname{int} P(x)$ 对任意 $\xi \in Tx$ 成立• 因此定理 2.1 的条件(vi) 也是满足的• 由定理 2.1, 存在一 $\hat{x} \in K$ 使得

$$\forall y \in X, \exists \xi \in T(\hat{x}) \text{ 满足 } f(\hat{x}, y) + \langle \xi, \theta(y, \hat{x}) \rangle \text{ ¾ } - \operatorname{int} P(\hat{x})•$$

推论 2.1 假设定理 2.2 中的所有条件都满足且 $\theta(\cdot, x)$ 是仿射映像和 $\theta(x, x) = 0$ 对任意 $x \in X$ 成立, 除了条件(iii) 被替代为

(iii)′ 对任意 $x \in X$, $f(x, y)$ 是 P_x_拟凸的•

(iv)′ 对任意 $x \in X$, $f(x, x)$ ¾ $- \operatorname{int} P(x)$•

则存在一 $\hat{x} \in K$ 使得

$$\forall y \in X, \exists \xi \in T(\hat{x}) \text{ 满足 } f(\hat{x}, y) + \langle \xi, \theta(y, \hat{x}) \rangle \text{ ¾ } - \operatorname{int} P(\hat{x})•$$

证明 首先证明定理 2.2 中的条件(iii) 成立• 如果条件(iii) 不成立, 则存在 $N = \{y_1, \ldots, y_n\} \in \langle X \rangle$ 和 $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \in \operatorname{co} N$, 其中 $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$ 和 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, 使得 $f(x_0, y_i) + \langle \xi, \theta(y_i, x_0) \rangle \subseteq - \operatorname{int} P(x_0)$, 对所有 $\xi \in Tx_0$ 和 $i = 1, \ldots, n$ 成立• 由(iii)′ 易知

$$f(x_0, x_0) \subseteq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_0, y_i) - P(x_0)•$$

注意到 $\theta(\cdot, x)$ 是仿射映像且 $\theta(x, x) = 0$, 可以推得

$$\begin{aligned} f(x_0, x_0) &\subseteq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_0, y_i) - P(x_0) \subseteq \\ &\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (f(x_0, y_i) + \langle \xi, \theta(y_i, x_0) \rangle) - P(x_0) \subseteq \\ &- \operatorname{int} P(x_0) - P(x_0) \subseteq - \operatorname{int} P(x_0), \end{aligned}$$

这与条件 $f(x_0, x_0)$ ¾ $- \operatorname{int} P(x_0)$ 相矛盾, 因此 f, θ 和 T 具有 P_x_DQCR• 那么定理 2.2 的所有条件都满足• 由定理 2.2, 存在 $\hat{x} \in K$ 使得

$$\forall y \in T(\hat{x}), \exists \xi \in T(\hat{x}) \text{ 满足 } f(\hat{x}, y) + \langle \xi, \theta(y, \hat{x}) \rangle \text{ ¾ } - \operatorname{int} P(\hat{x})•$$

由定理 2.2, 我们容易得到 GVVTIP(4) 的 Pareto 型解, 其中 T 是单值映射•

推论 2.2 在定理 2.2 的假设条件下, 如果设 $T: X \to L(E, Z)$ 是单值映射, 则存在一 $\hat{x} \in K$ 使得

$$f(\hat{x}, y) + \langle T(\hat{x}), \theta(y, \hat{x}) \rangle \text{ ¾ } - \operatorname{int} P(\hat{x}), \qquad \forall y \in X,$$

即 $\hat{x}$ 是 VVTIP(6) 的解•

定理 2.3 假设 X、E、K、Z、P、T、f、θ 与定理 2.2 中的假设相同, $\theta(\cdot, x)$ 是仿射映像且

$\theta(x,x)=0$ 对任意 $x\in X$ 成立• 假设下面的条件成立

(i) T 是上半连续的且具有非空紧值•

(ii) 对每一 $y\in X$, $x\mapsto f(y,x)$ 在 X 的每一紧子集内是下半连续的•

(iii) 对每一 $x\in X$, $f(x,y)$ 是 P_x_拟凸的•

(iv) 对任意 $x,y\in X$ 和 $\xi\in Tx$, 如果 $f(x,y)+\langle\xi,\theta(y,x)\rangle$ ¾ $-\mathrm{int}P(x)$, 则 $f(y,x)+\langle\xi,\theta(x,y)\rangle\subseteq -P(y)$•

(v) 映射 $x\to -\mathrm{int}P(x)$ 在 $X\times Z$ 内有开图•

(vi) 对任意 $x,y\in X$, 映射 $x\mapsto f(x,y)$ 在 $\mathrm{co}(\{x,y\})$ 内是上半连续的且有紧值•

(vii) 对任一 $x\in X$, $f(x,x)$ ¾ $-\mathrm{int}P(x)$•

(viii) 在 X 内存在紧凸子集 X_0 和非空紧子集 K, 使得对任意 $x\in X\setminus K$, 存在一 $y\in\mathrm{co}(X_0\cup\{x\})$ 满足 $f(x,y)+\langle\xi,\theta(y,x)\rangle\subseteq -\mathrm{int}P(x)$, $\forall\xi\in Tx$•

则存在一 $\hat{x}\in K$ 使得

$$\forall y\in X,\ \exists\xi\in T(\hat{x})\ \text{满足}\ f(\hat{x},y)+\langle\xi,\theta(y,\hat{x})\rangle\ \text{¾}\ -\mathrm{int}P(\hat{x})•$$

证明　令 $g(x,y)=f(y,x)$, 首先证明推论 2.1 的条件(v) 成立• 如果不成立, 则存在一 $x\in X$ 和 $\xi\in Tx$, $g(x,y)+\langle\xi,\theta(x,y)\rangle=f(y,x)+\langle\xi,\theta(x,y)\rangle\subseteq -P(y)$ 对任意 $y\in X$ 成立, 但是 $f(x,\hat{y})+\langle\xi,\theta(\hat{y},x)\rangle\subseteq -\mathrm{int}P(x)$ 对某些 $\hat{y}\in X$ 成立• 因为 $\langle\cdot,\cdot\rangle: L(E,Z)\times E\to Z$ 是连续的和 $x\mapsto f(x,y)$ 是在 $\mathrm{co}(\{x,y\})$ 内上半连续且具有紧值• 由 Klein 和 Thompson[21] 中定理 7.3.15, 对任意 $y\in X$ 和 $\xi\in L(E,Z)$, 映射 $u\mapsto f(u,y)+\langle\xi,\theta(y,u)\rangle$ 在 $\mathrm{co}(\{x,y\})$ 内是上半连续的, 则由引理 1.3, 集

$$\{u\in\mathrm{co}(\{x,\hat{y}\}): f(u,\hat{y})+\langle\xi,\theta(\hat{y},u)\rangle\subseteq -\mathrm{int}P(u)\},$$

在 $\mathrm{co}(\{x,\hat{y}\})\subseteq X$ 内是开的• 因此存在一 $u\in\mathrm{co}(\{x,\hat{y}\})\setminus\{x,\hat{y}\}$, 使得 $f(u,\hat{y})+\langle\xi,\theta(\hat{y},u)\rangle\subseteq -\mathrm{int}P(u)$• 由假设 $f(u,x)+\langle\xi,\theta(x,u)\rangle\subseteq -P(u)$ 和(iii), 存在 $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1,2$ 且 $\alpha_1+\alpha_2=1$ 使得

$$f(u,u)\subseteq\alpha_1 f(u,x)+\alpha_2 f(u,\hat{y})-P(u)•$$

注意到 $\theta(\cdot,x)$ 是仿射映像且 $\theta(x,x)=0$, 故

$$f(u,u)\subseteq\alpha_1(f(u,x)+\langle\xi,\theta(x,u)\rangle)+\alpha_2(f(u,\hat{y})+\langle\xi,\theta(\hat{y},u)\rangle)-P(u)\subseteq$$
$$-\alpha_1 P(u)-\alpha_2\mathrm{int}P(u)-P(u)\subseteq -\mathrm{int}P(u)$$

这与条件(vii) 相矛盾, 故推论 2.1 中的条件(v) 也是满足的• 由推论 2.1, 存在一 $\hat{x}\in K$ 使得

$$\forall y\in X,\ \exists\xi\in T(\hat{x})\ \text{满足}\ f(\hat{x},y)+\langle\xi,\theta(y,\hat{x})\rangle\ \text{¾}\ -\mathrm{int}P(\hat{x})•$$

推论 2.3　在定理 2.3 中, 令 θ 是恒等映射, 且其他所有条件满足

则存在一 $\hat{x}\in K$ 使得

$$\forall y\in X,\ \exists\xi\in T(\hat{x})\ \text{满足}\ f(\hat{x},y)+\langle\xi,y-\hat{x}\rangle\ \text{¾}\ -\mathrm{int}P(\hat{x})•$$

证明　令 $\langle\xi,\theta(y,x)\rangle=\langle\xi,y-x\rangle$, 对所有 $\xi\in L(E,Z)$ 和 $x,y\in X$ 成立• 则由定理 2.2 直接得到推论 2.3•

注 2.1　把定理 2.1 和定理 2.2 与文献[5] 内的定理 2 作比较, 我们得到以下结论

1) 数学模型 GVVTIP(4) 比文献[5] 内的模型更广泛•

2) 定理 2.1 和定理 2.2 中的假设条件比文献[5] 中定理 2 的条件更弱一些, 例如

(a) 在文献[5] 内 M 的凸性和紧性被去掉•

(b) 从推论 2.1 的证明过程可以看出, 定理 2.2 中的条件(iii) 比文献[5] 内定理 2 的条件(iii) 和(iv) 更弱

一些•

(c) 文献[5]内定理2的假设条件 $g(\cdot, x)$ 是 $P(x)$_凸的被去掉•

(d) 定理2.1内的FC_空间是没有线性结构的空间•

3) 定理2.1和定理2.2得到的是弱Pareto型解,但是在文献[5]内定理2得到的是Pareto型解,所以定理2.1和定理2.2是新的结果•

4) 定理2.3用同样的方式推广了文献[5]内的推论2•

[参 考 文 献]

[1] Giannessi F. Theorems of alternative, quadratic programs and complementary problems[A]. In: Cottle R W, Giannessi F, Lions J L, Eds. Variational Inequalities and Complementarity Problems [C]. New York: John Wiley Sons, 1980, 151—186.

[2] Song W. Vector equilibrium problems with set_valued mappings[A]. In: Giannessi F, Ed. Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria [C]. London: Kluwer Acad Pub, 2000, 403—422.

[3] Lin L J, Park S. On some generalized quasi_equilibrium problem[J]. J Math Anal Appl, 1998, **224**(2): 167—181.

[4] Ansari Q H, Yao J C. An existence result for the generalized vector equilibrium problem[J]. Appl Math Lett, 1999, **12**(8): 53—56.

[5] Oettli W, Schläger D. Existence of equilibrium for g_monotone mappings[A]. In: Takahashi W, Tanaka T, Eds. Nonlinear Analysis and Convex Analysis [C]. Singapore: World Sci Pub, 1999, 26—33.

[6] DING Xie_ping, Tarafdar E. Generalized vector variational_like inequalities with C_x_η_pseudomontone set_valued mappings[A]. In: Giannessi F, Ed. Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria [C]. London: Kluwer Acad Pub, 2000, 125—140.

[7] DING Xie_ping. The generalized vector quasi_variational_like inequalities[J]. Computers Math Appl, 1999, **37**(6): 57—67.

[8] DING Xie_ping, Park J Y. Generalized vector equilibrium problems in generalized convex spaces[J]. J Optim Theory Appl, 2004, **120**(2): 327—353.

[9] DING Xie_ping, Park J Y. Fixed points and generalized vector equilibrium problems in generalized convex spaces[J]. Indian J Pure Appl Math, 2003, **34**(6): 973—990.

[10] DING Xie_ping. Generalized R_KKM type theorems in topological spaces and application[J]. 四川师范大学学报, 2005, **28**(5): 505—513.

[11] Ansari Q H, Siddiqi A H, Yao J C. Generalized vector variational_like inequalities and their scalarizations[A]. In: Giannessi F, Ed. Vector Variational Inequalities and Vector Equlibria [C]. London: Kluwer Acad Pub, 2000, 17—37.

[12] DING Xie_ping, Tarafdar E. Generalized vector variational_like inequalities without monotonicity[A]. In: Giannessi F, Ed. Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria [C]. London: Kluwer Acad Pub, 2000, 113—124.

[13] Chang S S, Thompson H B, Yuan G X Z. Existence of solutions for generalized vector variational_like inequalities[A]. In: Giannessi F, Ed. Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria [C]. London: Kluwer Acad Pub, 2000, 39—53.

[14] Luo Q. Generalized vector variational_like inequalities[A]. In: Giannessi F, Ed. Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria [C]. London: Kluwer Acad Pub, 2000, 363—369.

[15] Giannessi F. Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria [M]. London: Kluwer Acad Pub, 2000.

[16] Lee B S, Lee S J. Vector variational_type inequalities for set_valued mappings[J]. Appl Math Lett,

2000, **13**(3): 57—62.

[17] DING Xie_ping. Maximal elements theorems in product FC_space and generalized games[J]. J Math Anal Appl, 2005, **305**(1): 29—42.

[18] DING Xie_ping. Generalized G_KKM theorems in generalized convex space and their applications[J]. J Math Anal Appl, 2002, **266**(1): 21—37.

[19] Deng L, Xia X. Generalized R_KKM theorems in topological space and their application[J]. J Math Anal Appl, 2003, **285**(2): 679—690.

[20] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis[M]. New York: John Wiley Sons, 1984.

[21] Klein E, Thompson A C. Theory of Correspondences[M]. New York: John Wiley Sons, 1984.

Generalized Vector Variational_Type Inequalities in FC_Spaces

FANG Min[1], DING Xie_ping[2]

(1. College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P.R. China;
2. College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P.R. China)

Abstract: A class of generalized vector variational_type inequality problems (in short, GVVTIP) are studied in FC_spaces, which include most of vector equilibrium problems, vector variational inequality problems, generalized vector equilibrium problems and generalized vector variational inequality problem as special cases. By using F_KKM theorem, some new existence results for GVVTIP are established in noncompact FC_space. As consequences, some recent known results in literature are obtained under much weaker assumption.

Key words: generalized vector variational_type inequality; F_KKM mapping; F_P_x_diagonally quasi-convex; FC_space