

Minkowski 空间中定向曲面上的 的第二类松弛弹性线

A 图塔, A 萨里欧格 卢基尔

(昂都库兹_马伊斯大学 理学与文学学院 数学系, 库鲁佩里特_山桑 55139, 土耳其)

(郭兴明推荐)

摘要: 在 Minkowski 空间中, 定义了定向曲面上的第二类松弛弹性线, 推导了在定向曲面上的第二类松弛弹性线的 Euler-Lagrange 方程 进一步阐明了, 这些曲线是否落在曲率线上, 最后给出相关的实例

关键词: 弹性线; 测地线; Minkowski 空间; Euler-Lagrange 方程

中图分类号: O186.11; O186.12 **文献标识码:** A

引 言

变分法在物理学、几何学和工程学的场分析中日渐扮演着重要的角色 因此, 有许多数学家曾对此做过研究, 特别是针对弹性理论的研究^[1~5]

Nickerson 和 Manning^[3] 将长为 l 的弹性线定义为携带有相关能量的一段曲线, 表示为

$$K = \int_0^l \kappa^2(s) ds, \quad (1)$$

式中 s 为沿曲线的弧长, $\kappa^2(s)$ 称为平方曲率 积分 K 称为总平方曲率

Manning^[2] 认为, 若在 $s = l$ 处没有强制边界条件, 同时, 在任意 s 处, 没有外力作用时, 弹性线是松弛的. 对空间中平面上的松弛弹性线, 它的轨迹线为直线 这时所有 s 处的平方曲率为 0, 确定 K 位置的不定量取得最小值 0 而对约束在一般曲面上的松弛弹性线, 它的轨迹线依赖于该曲面曲率, 使得 K 可能取值远大于 0

Hilbert 和 Cohn-Vossen^[6] 错误地认为, 在 $s = 0$ 处指定了初始位置和切线的松弛弹性线, 它的轨迹线总是一条测地线 Manning^[2] 和 Nickerson-Manning^[3] 证明了, Hilbert 和 Cohn-Vossen^[6] 的松弛弹性线总是测地线的结论是不正确的 Nickerson-Manning^[3] 得到了, 定向曲面上松弛弹性线方程, 并且提出了定向曲面上松弛弹性线作为 DNA 分子的模型 他们发展了用 Euler-Lagrange 方程研究拘泥于曲面上的弹性线的平衡路径, 弄清楚各种形式生物包 DNA 的机理 以后, nan 和 Yilmaz^[5] 对在 \mathbb{R}^3 中定向曲面上第二类弹性线也作过研究

本文研究在 Minkowski 空间 \mathbb{R}_1^3 中, 定向曲面上的第二类松弛弹性线

收稿日期: 2005_11_18; 修订日期: 2006_07_07

作者简介: A 图塔, 副教授, 博士(联系人. E-mail: atutar@omu.edu.tr; ayhans@omu.edu.tr)

本文原文为英文, 海治译, 张禄坤校.

1 预备知识

首先, 给出关于 Minkowski 空间 IR_1^3 的基本概念

设 IR^3 为具备 Lorentz 内积定义的标准实向量空间

$$\mathbf{X}, \mathbf{Y} = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3,$$

其中, $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ IR^3 则对偶(IR^3, \cdot, \cdot)称为 Minkowski(或 Lorentz)空间, 并记为 IR_1^3

在 IR_1^3 中, 若 $\mathbf{X}, \mathbf{X} < \mathbf{0}$, 称向量 \mathbf{X} 为时间类的; 若 $\mathbf{X}, \mathbf{X} > \mathbf{0}$, 称向量 \mathbf{X} 为空间类的; 若 $\mathbf{X}, \mathbf{X} = \mathbf{0}$, 称向量 \mathbf{X} 为空的 又, 向量 \mathbf{X} 的模定义为 $\sqrt{|\mathbf{X}, \mathbf{X}|}^{[7]}$ 另一方面, 向量 \mathbf{X} 煌 \mathbf{Y} 的外积(或向量积)定义为

$$\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

其中, $\mathbf{e}_i = (e_{i1}, e_{i2}, e_{i3})$, $i = 1, 2, 3$ ^[7]

设 γ 为 IR_1^3 中定向曲面 S 上的一段 C^2 -曲线, 弧长参数为 $s(0 \leq s \leq l)$ 曲线 γ 的 Frenet 构架 $\{\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ 中的协变导数公式为如下的矩阵^[8]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix},$$

其中, $\kappa = \mathbf{T}, \mathbf{T}$, $\tau = \mathbf{n}, \mathbf{n}$, $\tau = \mathbf{b}, \mathbf{b}$ ^[8]

同样地, 曲线 γ 的 Darboux 构架 $\{\mathbf{T}, \mathbf{Q}\}$ 中的协变导数公式为如下矩阵^[9]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{Q}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2k_g & 3k_n \\ -k_g & 0 & 3g \\ -k_n & -2g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}$$

其中, $\tau = \mathbf{Q}, \mathbf{Q}$, $\tau = \mathbf{Q}, \mathbf{Q}$, ^[9] 这里 ϵ_i (或 ϵ_i), $i = 1, 2, 3$ 表示对所有 $\mathbf{X} \in IR_1^3$ 有

$$\epsilon_i = \begin{cases} +1, & \mathbf{X} \text{ 空间类向量,} \\ -1, & \mathbf{X} \text{ 时间类向量} \end{cases}$$

现在可以给出在 IR_1^3 中, 定向曲面 S 上第二类弹性线的定义

定义 1.1 设 γ 为 IR_1^3 中定向曲面 S 上具有弧长参数为 s 的一段 C^2 -曲线, $0 \leq s \leq l$ 则将长为 l 的第二类弹性线定义为

$$L = \int_0^l \tau^2 ds, \quad (2)$$

其中, τ 为曲线 γ 的挠率(参见文献[5]) 另一方面, 曲线 γ 的挠率 τ 定义如下

$$\tau = \text{sgn}(\tau^2 k_n^2 + \tau^2 k_g^2) / \sqrt{\tau^2 k_n^2 + \tau^2 k_g^2}, \quad (3)$$

其中 $\tau = (k_n k_g - k_n k_g) / \sqrt{\tau^2 k_n^2 + \tau^2 k_g^2}$

定向曲面 S 用 $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v)$ 表示, 则定向曲面 S 上的曲线 γ 用 $\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}(u(s), v(s))$ 表示 γ 的单位切向量 \mathbf{T} 为

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{X}}{ds} = \mathbf{X}_u u + \mathbf{X}_v v$$

其中, $u = du/ds, v = dv/ds$

因为 $\mathbf{T}, \mathbf{T} = 1$, 定义在曲面 S 上的曲线 γ 的函数 $(u(s), v(s))$ 的任意对偶间有一约束

$$g(u, v, u, v) = 1, \quad (4)$$

其中

$$g = Eu^2 + 2Fuv + Gv^2, \quad (5)$$

并且 $E = \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u, F = \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, G = \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v$ 为第一基本型的 3 个系数 法曲率平方可用曲线 γ 上的坐标 $(u(s), v(s))$ 项表示

$$k_n^2 = (Lu^2 + 2Muv + Nv^2)^2, \quad (6)$$

其中 L, M 和 N 为第二基本型的 3 个系数 并可用 $\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v$ 和二阶导数 $\mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_{vv}$ 表示, 因此 L, M 和 N 通常为 u 和 v 的泛函数(参见文献[10])

同样地, 测地线挠率 g 公式为

$$g = \frac{1}{\mathbf{X}_u \mathbf{X}_v} \left\{ (FL - EM)u^2 + (GL + EN)uv + (GM - FN)v^2 \right\}, \quad (7)$$

其中 $\mathbf{X}_u \mathbf{X}_v = \sqrt{|EG - F^2|}$

若 $F = M = 0$, 则上述公式简化为

$$g = \frac{1}{\mathbf{X}_u \mathbf{X}_v} (GL + EN)uv, \quad (8)$$

其中 $\mathbf{X}_u \mathbf{X}_v = \sqrt{|EG|}$

另一方面, 法曲率平方的公式为

$$k_g^2 = E_1^2 + 2F_1_2 + G_2^2, \quad (9)$$

其中

$$1 = u + \frac{1}{11}u^2 + 2 \frac{1}{12}uv + \frac{1}{22}v^2, \quad (10)$$

$$2 = v + \frac{2}{11}u^2 + 2 \frac{2}{12}uv + \frac{2}{22}v^2 \quad (11)$$

$\frac{k}{g}$ 为第二类的 Christoffel 符号, 可表示为函数 E, F 和 G 以及它们对于 u 和 v 的一阶偏导数的展开式, 文献[11]将 Christoffel 符号表达为

$$\begin{cases} 1_{11} = \frac{1}{2} \frac{E_u}{E}, & 1_{12} = \frac{1}{2} \frac{E_v}{E}, & 2_{11} = -\frac{1}{2} \frac{E_v}{G}, \\ 1_{22} = -\frac{1}{2} \frac{G_u}{E}, & 2_{12} = \frac{1}{2} \frac{G_u}{G}, & 2_{22} = -\frac{1}{2} \frac{G_v}{G} \end{cases} \quad (12)$$

2 非完备变分问题

设 γ 为 S 上的一条曲率线, 则其测地线挠率 g 为 0, 从而根据方程(2)和(3)可得

$$g = \int_0^l \left(\frac{k_n k_g - k_n k_g}{2k_n^2 + 3k_g^2} \right)^2 ds \quad (13)$$

当前的问题在于, 寻找函数 $u(s)$ 和 $v(s)$, 使该函数在满足约束端条件(4)时, 给出上述积分式的固定值 由于该问题变成寻求 g^2 的最小值, 而不是求总挠率平方的最小值, 因此称该问题为非完备的

非完备问题的 Euler-Lagrange 方程为

$$H_u - (H_u) + (H_u) = 0, \quad (14)$$

$$H_v - (H_v) + (H_v) = 0, \quad (15)$$

其中

$$H = \left[\frac{k_n k_g - k_n k_g}{2k_n^2 + 3k_g^2} \right]^2 + (g - 1), \quad (16)$$

上式中 $\lambda = \lambda(s)$ 是 Lagrange 乘子函数 (4) 式、(14) 式和 (15) 式 3 个方程构成了求解函数 $u(s)$ 、 $v(s)$ 和 $\lambda(s)$ 的一个方程组 该方程组为 9 阶, 其中 u 和 v 为 4 阶, λ 为 1 阶, 因此其通解含 9 个积分常数 将方程 (4) 对 s 微分 3 次得到标准型, 通过 $g = 0$ 重整得到其中的 3 个积分常数为 0, 0 和 1, 通解中的其他 6 个积分常数则由边界条件确定 若取自然边界条件 $s = 0$ 、 $s = l$, 可得方程 (14) 和 (15) 中的积分常数, 这时有 $H_u = H_v = 0$

3 完备变分问题

现在我们再来看完备变分问题, 给出总挠率平方的最小值

$$J = \int_0^l (\text{sgn } 2k_n^2 + 3k_g^2) (g + 2/3) J^2 ds, \quad (17)$$

其中 $J = (k_n k_g - k_n k_g) / |2k_n^2 + 3k_g^2|$

当前的问题在于, 寻找函数 $u(s)$ 、 $v(s)$ 和 $\lambda(s)$, 使该函数在满足约束端条件 (4) 时, 给出上述积分式的固定值

完备问题的 Euler-Lagrange 方程为

$$H_u - (H_u) + (H_u) - (H_u) = 0, \quad (18)$$

$$H_v - (H_v) + (H_v) - (H_v) = 0, \quad (19)$$

其中 $H = [(\text{sgn } 2k_n^2 + 3k_g^2) (g + 2/3) J^2 + (g - 1)] / (2/3)$

该方程组为 13 阶, 其中 u 和 v 为 6 阶, λ 为 1 阶 通解含 13 个积分常数 将方程 (4) 对 s 微分 5 次得到标准型, 通过 $g^{(5)} = 0$ 重整得相应的 5 个积分常数 0, 0, 0, 0 和 1, 通解中的其他 8 个积分常数则由边界条件确定

现在我们取自然边界条件 $s = 0$ 和 $s = l$ 得到方程 (14) 和方程 (15) 中的积分常数, 这时 $H_u = H_v = 0$

4 在某些 Lorentz 曲面上的第二类弹性线

本节中将给出在 IR_1^3 中某些 Lorentz 曲面上第二类弹性线的实例

4.1 在 Lorentz 平面上的第二类弹性线

设 S 为一 Lorentz 平面, 那么第一和第二基本型的系数为

$$E = 1, F = 0, G = -1$$

和

$$L = M = N = 0$$

从而, 得到 $\frac{k}{ij} = 0, 1 \quad i, j, k = 2$ 从此可以说, S 上任何曲线上的所有点处的法曲率 k_n 和测地线挠率 g 成为零 因此, 在 Lorentz 平面上的第二类弹性线为曲率线

4.2 在 Lorentz 球体上的第二类弹性线

设 S 为半径 R 的 Lorentz 球体 那么, Lorentz 球体 S 的参数方程为

$$X(u, v) = \left[R \text{ch } \frac{u}{R} \cos \frac{v}{R}, R \text{ch } \frac{u}{R} \sin \frac{v}{R}, \text{sh } \frac{u}{R} \right]$$

S 的第一和第二基本形的系数为

$$E = -1, F = 0, G = \operatorname{ch}^2 \frac{u}{R}$$

和

$$L = \frac{1}{R}, M = 0, N = \frac{1}{R} \operatorname{ch}^2 \frac{u}{R}$$

由方程(12)得

$${}_{11}^1 = {}_{12}^1 = {}_{22}^2 = {}_{12}^2 = 0, \quad {}_{12}^1 = \frac{1}{R} \operatorname{ch} \frac{u}{R} \operatorname{sh} \frac{u}{R}, \quad {}_{12}^2 = \frac{1}{R} \operatorname{th} \frac{u}{R}$$

由方程(6)得

$$k_n = -\frac{1}{R}$$

另一方面, 根据方程(9)得

$$k_g^2 = -\left(u + \frac{1}{R} \operatorname{ch} \frac{u}{R} \operatorname{sh} \frac{u}{R} v^2\right)^2 + \left(v + \frac{2}{R} \operatorname{th} \frac{u}{R} uv\right)^2 \operatorname{ch}^2 \frac{u}{R},$$

其中

$${}_1 = u + \frac{1}{R} \operatorname{ch} \frac{u}{R} \operatorname{sh} \frac{u}{R} v^2,$$

$${}_1 = v + \frac{2}{R} \operatorname{th} \frac{u}{R} uv$$

最后, 由方程(8)得 ${}_g = 0$ 则可以说, 在 Lorentz 球体上所有曲线均为第二类弹性线例如, 对 $R = 2$ 和 $v = 0$, 可得在 Lorentz 球体 S 上的第二类弹性线(见图 1), 且有

$$(u) = \left[2 \operatorname{ch} \frac{u}{2}, 0, 2 \operatorname{sh} \frac{u}{2} \right]$$

4.3 在 Lorentz 圆柱体上的第二类弹性线

设 S 为一 Lorentz 圆柱体. 那么, Lorentz 圆柱体 S 的参数方程为

$$X(u, v) = \left[v, R \operatorname{ch} \frac{u}{2}, R \operatorname{sh} \frac{u}{2} \right]$$

S 的第一和第二基本形的系数为

$$E = -1, F = 0, G = 1$$

和

$$L = \frac{1}{R}, M = N = 0$$

另一方面, 由方程(12)得

$${}_{ij}^k = 0, \quad 1 \leq i, j, k \leq 2$$

从而, S 的法曲率 k_n 为

$$k_n = \frac{1}{R} u^2, \quad = 1$$

由方程(9)、方程(10)和方程(11)得到

$$k_g^2 = v^2 - u^2$$

进一步, S 的测地线挠率 ${}_g$ 为

$${}_g = \frac{1}{R} uv$$

假设 $S_g = 0$ 那么, 由方程(13)可知 ${}_g$ 恒等于 0 由此可以说, 在 Lorentz 圆柱体上所有测地线为第二类弹性线

例如, 对 $R = 2$ 和 $v = 0$, 可得在 Lorentz 圆柱体 S 上的第二类弹性线(见图 2), 且有

$$A(u) = \left[0, 2\text{ch} \frac{u}{2}, 2\text{sh} \frac{u}{2} \right] \#$$

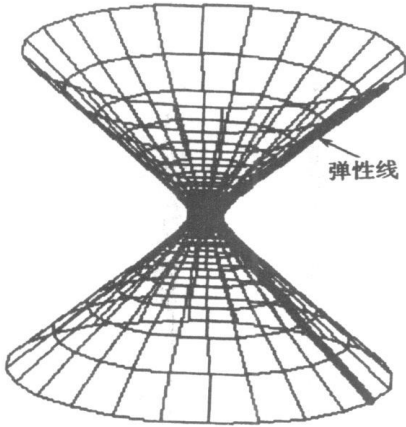


图 1

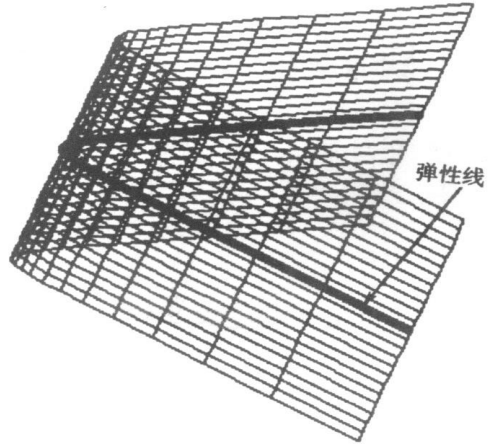


图 2

4.4 第一类悬链(索)曲面上的第二类弹性线

设 S 为第一类悬链(索)曲面# 那么, 第一类悬链(索)曲面 S 的参数方程为

$$X(u, v) = (a^{-1} \text{sh}(av + b) \cos u, a^{-1} \text{sh}(av + b) \sin u, v),$$

其中 $a, b \in \mathbb{R}, (a \neq 0)$ #

S 的第一和第二基本型的系数为

$$E = a^{-2} \text{sh}^2(av + b), F = 0, G = \text{sh}^2(av + b)$$

和

$$L = -a^{-1}, M = 0, N = a\#$$

另一方面, 由方程(12)得

$$\#_{11}^1 = \#_{22}^1 = \#_{12}^2 = 0, \#_{11}^2 = -a^{-1} \text{cth}(av + b), \#_{22}^2 = \#_{12}^2 = a \text{cth}(av + b)\#$$

从而 S 的法曲率 k_n 为

$$k_n = \frac{a(-a^{-2}u^2 + v^2)}{\text{sh}^2(av + b)[a^{-2}u^2 + v^2]}\#$$

由方程(9)、方程(10)和方程(11)得

$$k_g^2 = a^{-2} \text{sh}^2(av + b) [\mathfrak{E} + 2a \text{cth}(av + b)uw]^2 + \text{sh}^2(av + b) [\mathfrak{E} + a \text{cth}(av + b)v^2]^2,$$

其中

$$C_1 = \mathfrak{E} + 2a \text{cth}(av + b)uw,$$

$$C_2 = \mathfrak{E} + a \text{cth}(av + b)v^2\#$$

进一步的 S 的测地线挠率 S_g 为

$$S_g = -2uw\#$$

假设 $S_g = 0$ # 那么, 有 $\hat{u} = 0$ 或 $\hat{v} = 0$ # 这时, 曲线满足 Euler-Lagrange 方程# 由此可以说, 在第一类悬链(索)曲面上的所有测地线为第二类弹性线#

例如, 对 $a = 1, b = 0$ 和 $u = 0$, 可得在 S 上的第二类弹性线(见图 3), 且满足

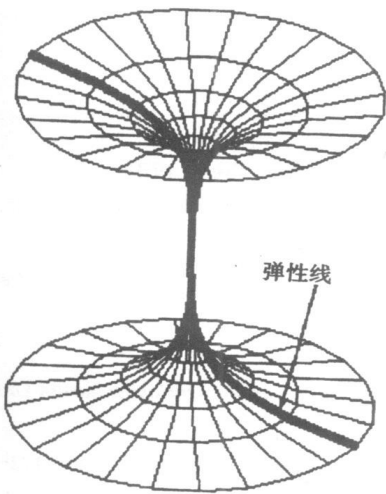


图 3

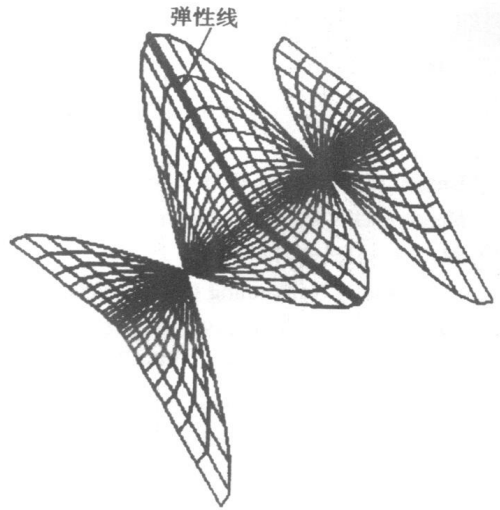


图 4

$$A(v) = (0, \operatorname{sh}v, v)\#$$

4.5 第二类悬链(索) 面上的第二类弹性线

设 S 为第二类悬链(索) 曲面 $\#$ 那么, 第二类悬链(索) 曲面 S 的参数方程为

$$X(u, v) = (a^{-1} \cos(av + b) \operatorname{sh}u, v, a^{-1} \cos(av + b) \operatorname{ch}u),$$

其中 $a, b \in \mathbb{R}, (a \neq 0)\#$

S 的第一和第二基本型的系数为

$$E = a^{-2} \cos^2(av + b), F = 0, G = \cos^2(av + b)$$

和

$$L = a^{-1}, M = 0, N = -a\#$$

另一方面, 由方程(12) 得

$$\#_{11}^1 = \#_{12}^1 = \#_{22}^1 = 0, \#_{12}^2 = -a \tan(av + b),$$

$$\#_{11}^2 = a^{-1} \tan(av + b), \#_{22}^2 = -a \tan(av + b)\#$$

从而, S 的法曲率 k_n 为

$$k_n = \frac{a(a^{-2}u^2 - v^2)}{\cos^2(av + b)[a^{-2}u^2 + v^2]}\#$$

从方程(9)、方程(10) 和方程(11) 得到

$$k_g^2 = a^{-2} \cos^2(av + b) [\mathfrak{E} - 2a \tan(av + b) w]^2 + \cos^2(av + b) [\mathfrak{E} - a \tan(av + b) v^2]^2,$$

其中

$$C_1 = \mathfrak{E} - 2a \tan(av + b) w,$$

$$C_2 = \mathfrak{E} - a \tan(av + b) v^2\#$$

进一步的 S 的测地线挠率 S_g 为

$$S_g = 2w\#$$

假设 $S_g = 0\#$ 那么, 有 $\hat{U} = 0$ 或 $\hat{V} = 0\#$ 这时曲线满足 Euler-Lagrange 方程 $\#$ 由此可以说, 在第二类悬链(索) 面上的所有测地线为第二类弹性线 $\#$

例如, 对 $a = 1$, $b = 0$ 和 $v = 0$, 可得在 S 上的第二类弹性线(见图 4), 且满足

$$A(u) = (\text{sh}u, 0, \text{ch}u)\#$$

[参 考 文 献]

- [1] Landau L D, Lifshitz E M. Theory of Elasticity [M]. Oxford: Pergamon Press, 1979, 84.
- [2] Manning G S. Relaxed elastic line on a curved surfaces[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1987, **XLV**(3): 515) 527.
- [3] Nickerson H K, Manning G S. Intrinsic equations for an relaxed elastic line on a oriented surface[J]. Geometriae Dedicata, 1988, **27**:127) 136.
- [4] Weinstock R. Calculus on Variations[M]. New York: Dover, 1974, 16) 48.
- [5] Bnan Z, Ylmaz M. Elastic lines of second kind on an oriented surface[J]. Ondokuz Mayıs Bniv Fen Dergisi, 1997, **8**(1):1) 10.
- [6] Hilbert D, Cohn_Vossen S. Geometry and the Imagination [M]. New York: Chelsea, 1952, 172) 248.
- [7] Weinstein T. An Introduction to Lorentz Surfaces [M]. New York: Walter de Gruyter, 1966, 149) 151.
- [8] Ekici C. Yar_ı klidyen Uzaylarda Genelle tirilmi Yar_Regle Y zeyler [D]. Ph D Dissertation. Osmangazi Bniversitesi, 1998, 95) 96. (in Turkish)
- [9] Tutar A. \mathbb{L}^3 Lorentz Uzay nda K resel egriler ve Joachim sthal Teorem i [D]. Ph D Dissertation, Ondokuz Mayıs Bniversitesi, 1994, 36) 37. (in Turkish)
- [10] O. Neill B. Elementary Differential Geometry [M]. New York: Academic Press, 1966, 196) 214.
- [11] Hsiung C C. A First Course in Differential Geometry [M]. New York: John Wiley & Sons, 1981, 207) 210.

R e l a x e d E l a s t i c L i n e s o f S e c o n d K i n d o n a n O r i e n t e d S u r f a c e i n M i n k o w s k i S p a c e

Ayhan Tutar, Ayhan Sarioglugil

(Department of Mathematics, Faculty of Science and Arts,

Ondokuz Mayıs University, Kurupelit_Samsun, 55139, Turkey)

Abstract: The relaxed elastic line of second kind on an oriented surface in the Minkowski space was defined and for the relaxed elastic line of second kind which was lying on an oriented surface the Euler-Lagrange equations were derived. Furthermore, whether these curve lie on a curvature line or not is investigated and some applications are given.

Key words: elastic line; geodesic; Minkowski space; Euler-Lagrange equation