文章编号: 1000_0887(006) 11_131 _07

养老基金投资组合的常方差弹性(CEV) 模型和解析决策*

肖 建武[1], 尹 少华[1], 秦 成林

(1. 中南林业科技大学 商学院, 长沙 410004;
. 上海大学 理学院, 上海 00444)

(程昌 钧推 荐)

摘要: 针对以年金形式发放待遇的缴费预定制养老基金, 在退休前和退休后的两个阶段, 分别构建了常方差弹性(CEV) 模型, 并应用 Legendre 变换将原问题转化为对偶问题, 在追求指数效用最大化的条件下, 求得了精确解析解, 从而确定了这两个阶段的最优投资决策•

关 键 词: 缴费预定制养老基金; 随机控制; 常方差弹性(CEV) 模型; Legendre 变换; 解析决策

中图分类号: F 4. 11 文献标识码: A

引 言

养老基金管理是社会公认值得研究的重要经济课题• 一般分为两种类型: 一种是待遇预定计划(defined benefit plan, DBP) , 即预先规定养老金待遇水平, 而缴费水平要根据基金权衡调整; 另一种是缴费预定计划(defined contribution plan, DCP) , 即预先确定缴费水平, 退休后以投资组合收益为基础发放养老金•

所以, 最优投资策略便成了养老基金管理的核心问题之一• 随机控制是投资组合的经典工具, 近年来, 该方法也逐渐延伸到了养老基金管理领域, 如 Boulier[1] Devolder[ ] •

带有随机波动率的常方差弹性(CEV) 模型是几何布朗运动的一个自然扩充• 最早由 Cox[3] 和 Ross[4] 提出, 以后一般都用来研究探讨定价理论问题, 如 Beckers[5] 、Emanuel 和 Macbeth[6] , Davydov 和 Linetsky[7] , Basu 和 Samanta[8] , Darius 和 Sircar 在近期的工作报告中针对经典投资问题建立了 CEV 模型•

一般地, 应用随机控制理论都要推导 Bellman 方程, 是一个非线性偏微方程, 很难求得解析解, 若采用 CEV 模型就更加增加了求解难度• 针对某些情形, 可以引入 Legendre 变换将原问题转化为对偶问题以便求解• Kramkov 和 Schachermayer[9] 比较了两个问题之间的关系, 并阐述证明了从对偶问题求得原投资组合决策的唯一存在性定理• Choulli 和 Hurd[10] , Jonsson 和 Sircar[11] 应用对偶理论分析了经典 Merton 模型•

在我们所了解的范围中, 目前还没有公开性工作应用 CEV 模型、Legendre 变换和对偶理论

* 收稿日期: 005_06_13; 修订日期: 006_08_03
作者简介: 肖建武(1973—) , 男, 湖南人, 副教授, 博士(联系人. E_mail: xiaojw@1 6. com) . •

研究养老基金的投资问题• 所以,针对缴费预定制养老基金管理,在最低待遇保障条件下,就退休前和退休后两个阶段,文章构建了资产连续动态变化的 CEV 模型,采用经典控制方法求得一个复杂的非线性偏微 Bellman 方程,但是求解为之不易• 由此,我们引入 Legendre 变换将问题转化成对偶问题,求得了精确解析解,从而确定了退休前与退休后的投资决策[1]•

1 基 本 理 论

1.1 常方差弹性(CEV)模型

常方差弹性(CEV)模型描绘股票价格的动态变化过程如下

$$\mathrm{d}s_t/s_t = \mu\mathrm{d}t + ks_t^{\gamma}\mathrm{d}w_t, \tag{1}$$

其中 s_t 是股票价格, w 是标准布朗运动, μ 是在时间 $[t, t+\Delta t]$ 内的期望收益率, k 为常数, 弹性因子 γ 最初定义为负值,后来 Emanuel 和 Macbeth 将其延伸到正值• 股票的随机波动率可以记作

$$(\sigma_t) = (ks_t^{\gamma})•$$

特别地,若 $\gamma = 0$, 则 σ_t 是常数,即几何布朗运动•

1.2 Legendre 变换

定义 1.1 设 $f: R^n \to \mathrm{R}$ 为凸函数, 对 $z > 0$, 定义 Legendre 变换

$$L(z) = \max_x\left\{f(x) - zx\right\}, \tag{ }$$

$L(z)$ 称为 $f(x)$ 的对偶函数•

因为 $f(x)$ 是严格凸函数, 则存在唯一的点使上式取得最大值, 该点记 x_0, 可以由一阶导数条件得到

$$\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x - z = 0, \tag{3}$$

所以

$$L(z) = f(x_0) - zx_0• \tag{4}$$

例如: 若 $f(x) = \ln x$, $\ln x - zx$ 要取得最大, 按照上述定义则 $x_0 = 1/z$, 故 $L(z) = -\ln z - 1$•

模 型 构 建

考虑缴费预定制养老基金,假设基金投资于两类资产: 风险资产和无风险资产•

无风险资产价格记作 $s^0(t)(t > 0)$, 其变化过程满足

$$\frac{\mathrm{d}s^0}{s^0} = r\mathrm{d}t, \tag{5}$$

回报率 r 假设为常数,如银行利率• 不失一般性,我们这里将其假设为 0[11]•

风险资产价格记作 $s(t)$, $t > 0$, 其动态过程用 CEV 模型描绘如下

$$\frac{\mathrm{d}s_t}{s_t} = \mu\mathrm{d}t + ks_t^{\gamma}\mathrm{d}w_t• \tag{6}$$

我们要探讨的问题就是在整个生命的两个阶段——退休前与退休后寻求投资策略,假设退休后的待遇以年金形式发放并给予最低保障,所以我们将把问题分阶段进行研究[ ]•

2.1 退休前

在本小节,我们假定未来没有其他的缴费进入基金资产,至于存在缴费的情况将在第 4 节加以讨论• 现在讨论的问题就是将退休前所有收缴的养老金投向风险资产和无风险资产,寻求最佳投资比例,使退休时候的最终财富效用最大• 设时间 $t \in [0, N]$•

基金财富记作 $V(t)$, π_t 是投向风险市场的财富数量,那么总财富的动态过程描绘成

$$\mathrm{d}V_t = \pi_t \frac{\mathrm{d}s_t}{s_t} + (V_t - \pi_t)\frac{\mathrm{d}s^0}{s^0}, \tag{7}$$

将 s^0 和 s_t 的状态方程代入,上式转变为一个随机微分方程

$$\mathrm{d}V_t = \pi_t \mu \mathrm{d}t + \pi_t k s_t^{\gamma} \mathrm{d}w_t,\quad V_0 = M\cdot \tag{8}$$

所以最优控制问题就是在财富状态(8)的条件下,投资者寻求控制决策 π_t^* 使得效用期望最大

$$E\left\{U(V_N)\right\}\cdot \tag{9}$$

2.2 退休时

参照 Devolder[ ],职工退休时 $(t = N)$ 通常购买已付年金(a paid_up annuity),购买的数量按照预先确定的比率进行计算• 在固定时期 T 内用来购买年金的基金用字母 C 表示,当然要求 $C \leqslant V_N$• 到 T 期末时候将剩余部分返回给职工•

在 N 和 $N+T$ 期间,养老金待遇 B 按照下式连续发放

$$B = C/a_T, \tag{10}$$

其中 $a_T = (1 - \mathrm{e}^{-\delta T})/\delta$,$\delta$ 是保险精算中的连续技术比率(the continuous technical rate)•

2.3 退休后

退休后 $(t \in [N, N+T])$,基金公司将资产投向风险资产和无风险资产的同时,还必须给职工支付预先承诺的年金• 他们希望通过最佳投资方案,使得支付后的总资产效用到期末 $(N+T)$ 时候达到最大•

所以基金资产的动态变化过程可以用以下随机微分方程描述

$$\mathrm{d}V_t = \pi_t \mu \mathrm{d}t - B\mathrm{d}t + \pi_t k s_t^{\gamma} \mathrm{d}w_t, \tag{11}$$

在上式资产财富动态过程中,基金管理层寻求投资策略 π_t^* 追求效用最大

$$E\left\{U(V_N + T)\right\}\cdot \tag{1 }$$

3 模型求解

3.1 退休前

应用经典随机最优控制工具,可以定义以下值函数(value function)

$$H(t, s, v) = \max_{\pi} E\left\{U(V_T) \mid s_t = s, V_t = v\right\},\qquad 0 < t < N\cdot \tag{13}$$

由最优原理推导以下 Hamilton_Jacobi_Bellman(HJB) 方程

$$H_t + \frac{1}{\ }k\ s^{(\gamma+1)}H_{ss} + \mu s H_s + \sup_{\pi}\left\{\frac{1}{\ }\pi\ k\ s^{\gamma}H_{vv} + \pi(\mu H_v + k\ s^{\gamma+1}H_{vs})\right\} = 0\cdot \tag{14}$$

最优策略 π^* 满足

$$\pi^* = -\frac{\mu H_v + k\ s^{\gamma+1}H_{vs}}{k\ s^{\gamma}H_{vv}}\cdot \tag{15}$$

将式(15)代入(14)则 HJB 变为

$$H_t + \frac{1}{\ }k\ s^{(\gamma+1)}H_{ss} + \mu s H_s - \frac{(\mu H_v + k\ s^{\gamma+1}H_{vs})}{k\ s^{\gamma}H_{vv}} = 0\cdot \tag{16}$$

经典检验定理能够保证 HJB 方程的解就是原问题的解,但求解为之不易,所以我们进一步利用预先假定的值函数的凸性,可以定义 Legendre 变换

$$\hat{H}(t, s, z) = \sup_{v>0}\left\{H(t, s, v) - zv\right\}, \tag{17}$$

其中 $z > 0$ 是 v 的对偶变量• 当最优达到时,v 的值记作函数 $g(t, s, z)$,即

$$g(t, s, z) = \inf_{v>0}\left\{v \mid H(t, s, v) \geqslant zv + \hat{H}(t, s, z)\right\}\cdot \tag{18}$$

函数$\tilde{H}$ 与 g 有如下关系

$$g = -\tilde{H}_z, \qquad (19)$$

所以可以选择函数 g 和$\tilde{H}$ 中的任何一个作为函数H 的对偶•

如(3) 所示, 有

$$H_v = z, \qquad (\ 0)$$

所以

$$\tilde{H}(t, s, z) = H(t, s, g) - zg, \quad g(t, s, z) = v• \qquad (\ 1)$$

对式(0) 和式(1) 分别关于自变量 t, s 和z 作偏微分, 值函数H 和对偶函数$\tilde{H}$ 之间的微分关系可以表示为[11]

$$\begin{cases} H_v = z,\ H_t = \tilde{H}_t,\ H_{ss} = \tilde{H}_{ss} - \dfrac{\tilde{H}_{sz}}{\tilde{H}_{zz}}, \\ H_s = \tilde{H}_s,\ H_{vs} = -\dfrac{\tilde{H}_{sz}}{\tilde{H}_{zz}},\ H_{vv} = -\dfrac{1}{\tilde{H}_{zz}}• \end{cases} \qquad (\ \ )$$

对于期末 N 时, 记

$$\tilde{U}(z) = \sup_{v>0}\{U(v) - zv\}, \quad G(z) = \inf_{v>0}\{v \mid U(v) \geqslant zv + \tilde{U}(z)\}•$$

Kramkov[9] 和 Cox[13] 已经说明效用函数 $U(v)$ 和其对偶函数 $\tilde{U}(z)$ 可以通过下式 Legendre 变换关系相互达到最优

$$\tilde{U}(z) = \sup_{v>0}\{U(v) - zv\}, \quad U(v) = \inf_{z>0}\{\tilde{U}(z) + zv\}• \qquad (\ 3)$$

所以原问题就可以转换成对偶问题•

将( ) 式代入后, (16) 式重新写作

$$\tilde{H}_t + \frac{1}{\ }k\ s^{(\gamma+1)}\left(\tilde{H}_{ss} - \frac{\tilde{H}_{sz}}{\tilde{H}_{zz}}\right) + \mu s\tilde{H}_s + \frac{1}{k\ s^{\gamma}}\tilde{H}_{zz}\left(\mu z - k\ s^{\gamma+1}\frac{\tilde{H}_{sz}}{\tilde{H}_{zz}}\right) = 0, \qquad (\ 4)$$

化简后得到下面的偏微分方程

$$\tilde{H}_t + \frac{1}{\ }k\ s^{(\gamma+1)}\tilde{H}_{ss} + \mu s\tilde{H}_s + \frac{\mu}{k\ s^{\gamma}}z\tilde{H}_{zz} - s\mu z\tilde{H}_{sz} = 0• \qquad (\ 5)$$

利用(19) 式, 将另外一个对偶函数函数 g 替代(5) 式的函数$\tilde{H}_t$, 再关于变量 z 求偏导, 得到

$$g_t + \frac{1}{\ }k\ s^{(\gamma+1)}g_{ss} + \frac{\mu}{k\ s^{\gamma}}zg_z + \frac{\mu}{k\ s^{\gamma}}z\ g_{zz} - \mu szg_{sz} = 0• \qquad (\ 6)$$

我们所关心的并不在于值函数而是最优投资策略• 根据值函数的各种偏导和函数 g 的相互关系, 由式(15)、式(0) 和式( ) 进行反推计算, 控制 π^* 可以重写作

$$\pi^* = -\frac{\mu H_v + k\ s^{\gamma+1}H_{vs}}{k\ s^{\gamma}H_{vv}} = \frac{\mu z - k\ s^{\gamma+1}(\tilde{H}_{sz}/\tilde{H}_{zz})}{k\ s^{\gamma}(1/\tilde{H}_{zz})} =$$

$$\frac{\mu z\tilde{H}_{zz} - k\ s^{\gamma+1}\tilde{H}_{sz}}{k\ s^{\gamma}} = \frac{-\mu zg_z + k\ s^{\gamma+1}g_s}{k\ s^{\gamma}}• \qquad (\ 7)$$

这样, 对于给定的最优问题, 通过 g 线性偏微分方程求解g 的一阶偏导就可以得到一个最优策略 π^*•

在本章我们选择指数效用函数[ ]

$$U(v) = -\frac{1}{\beta}e^{-\beta v},$$

其中, $\beta > 0$• 由 Legendre 变换的定义和( ) 得

$$G(z) = -\frac{1}{\beta}\ln z,\ \hat{H}(z) = -\frac{z}{\beta}(\ln z - 1)\cdot$$

设方程(6)容许解为

$$g(t, s, z) = -\mathrm{e}^{f(s)+h(t)}\ln z, \tag{ 8}$$

且$f(s_0) + h(0) = -\ln\beta$• 代入(6)得

$$\mathrm{e}^{f(s)+h(t)}\ln z\left[h'(t) + \frac{1}{\ }k\ s^{(\gamma+1)}f''(s)\right] + \mathrm{e}^{f(s)+h(t)}\left[\frac{\mu}{k\ s^{\gamma}} - \mu s f'(s)\right] = 0, \tag{ 9}$$

为消除与变量 s 的相关性,将该方程分解为两个方程

$$h'(t) + \frac{1}{\ }k\ s^{(\gamma+1)}f''(s) = 0, \tag{30}$$

$$f'(s) = \frac{\mu}{k\ s^{\gamma+1}}\cdot \tag{31}$$

考虑初始条件后解上述方程,可得

$$f(s) + h(t) = -\frac{\mu}{4k\ \gamma s^{\gamma}} + \frac{\mu}{4(\gamma+1)}t + \frac{\mu}{4k\ \gamma s_0^{\gamma}} - \ln\beta \tag{3 }$$

即有

$$g(t, s, z) = -\mathrm{e}^{-\mu/(4k\ \gamma s^{\gamma}) + (\mu/(4(\gamma+1)))t + \mu/(4k\ \gamma s_0^{\gamma}) - \ln\beta}\ln z\cdot \tag{33}$$

将(33)代入(7)并联合(1)就得到关于指数效用函数的最优投资决策

$$\begin{aligned}\pi^* &= \frac{-\mu\mathrm{e}^{f(s)+h(t)} - k\ s^{\gamma+1}\mathrm{e}^{f(s)+h(t)}f'(s)\ln z}{k\ s^{\gamma}} = \\ &\frac{-\mu\mathrm{e}^{f(s)+h(t)} + k\ s^{\gamma+1}g(t, s, z)(\mu/(k\ s^{\gamma+1}))}{k\ s^{\gamma}} = \\ &\frac{\mu}{k\ s^{\gamma}}\left(\frac{v}{\ } - \mathrm{e}^{-\mu/(4k\ \gamma s^{\gamma}) + (\mu/(4(\gamma+1)))t + \mu/(4k\ \gamma s_0^{\gamma}) - \ln\beta}\right),\end{aligned} \tag{34}$$

也就是说,把上述数量的资产部分投向风险市场,而把剩余部分用于购买国债或者银行储蓄等无风险金融产品•

3.2 退休后

类似3.1,定义值函数

$$H(t, s, v) = \max_{\pi}E\left\{U(V_{N+T}) \mid s_t = s,\ V_t = v\right\},\qquad N \leqslant t \leqslant N + T\cdot \tag{35}$$

由最优原理得到Hamilton_Jacobi_Bellman方程

$$\begin{aligned}&H_t + \frac{1}{\ }k\ s^{(\gamma+1)}H_{ss} + \mu s H_s - B\cdot H_v + \\ &\sup_{\pi}\left\{\frac{1}{\ }\pi\ k\ s^{\gamma}H_{vv} + \pi(\mu H_v + k\ s^{\gamma+1}H_{vs})\right\} = 0\cdot\end{aligned} \tag{36}$$

最优策略 π^* 满足

$$\pi^* = -\frac{\mu H_v + k\ s^{\gamma+1}H_{vs}}{k\ s^{\gamma}H_{vv}}\cdot \tag{37}$$

代入(36)得到另外一个偏微分方程

$$H_t + \frac{1}{\ }k\ s^{(\gamma+1)}H_{ss} + \mu s H_s - B\cdot H_v - \frac{(\mu H_v + k\ s^{\gamma+1}H_{vs})}{k\ s^{\gamma}H_{vv}} = 0\cdot \tag{38}$$

将( )代入(38)重新记作

$$\hat{H}_t + \frac{1}{\ }k\ s^{(\gamma+1)}\hat{H}_{ss} + \mu s\hat{H}_s - Bz + \frac{\mu}{k\ s^{\gamma}}z\hat{H}_{zz} - \mu sz\hat{H}_{sz} = 0\cdot \tag{39}$$

利用(19)将另一个对偶函数 g 替代$\hat{H}_t$ 并关于z 求偏导,则有

$$g_t + \frac{1}{2}k^2 s^{2(\gamma+1)} g_{ss} + \frac{\mu^2}{k^2 s^{2\gamma}} z g_z + \frac{\mu^2}{2k^2 s^{2\gamma}} z^2 g_{zz} - \mu s z g_{sz} + B = 0. \tag{40}$$

类似(7)投资决策可以写成

$$\pi^* = \frac{-\mu z g_z + k^2 s^{2\gamma+2} g_s}{k^2 s^{2\gamma}}. \tag{41}$$

考虑指数效用函数

$$U(v) = -\frac{1}{\beta}e^{-\beta v},$$

其中 $\beta > 0$. 设方程(40)容许解为

$$g(t, s, z) = -e^{f(s)+h(t)}\ln z + \varphi(t), \tag{42}$$

且 $f(s_N) + h(N) = -\ln\beta$, $\varphi(N) = 0$, 类似上小节, 将其代入(40)最终可以得到

$$g(t, s, z) = -e^{-\mu^2/(4k^2\gamma s^{2\gamma}) + (\mu^2/(4(\gamma+1)))t + \mu^2/(4k^2\gamma s_N^{2\gamma}) - \ln\beta}\ln z - B(t-N). \tag{43}$$

将上式代入(41)并联合(1)就得到关于指数效用函数的最优投资决策

$$\pi^* = \frac{-\mu e^{f(s)+h(t)} - k^2 s^{2\gamma+1} e^{f(s)+h(t)} f'(s)\ln z}{k^2 s^{2\gamma}} =$$

$$\frac{-\mu e^{f(s)+h(t)} + k^2 s^{2\gamma+1}[g(t,s,z) + B(t-N)](\mu/(k^2 s^{2\gamma+1}))}{k^2 s^{2\gamma}} =$$

$$\frac{\mu}{k^2 s^{2\gamma}}\left[\frac{v}{\mu} + \frac{B}{\mu}(t-N) - e^{-\mu^2/(4k^2\gamma s^{2\gamma}) + (\mu^2/(4(\gamma+1)))t + \mu^2/(4k^2\gamma s_N^{2\gamma}) - \ln\beta}\right], \tag{44}$$

可以看出, 投资者在做决策时候必须考虑发放给职工的养老金待遇 B, 其影响效果就是要相应地加大投资力度以确保待遇的支付.

4 引入不断缴费因素的退休前决策

事实上, 对于缴费预定制养老金计划, 参加养老保险的职工在退休前一般都要不间断的缴纳保费. 所以退休前的资产必须考虑不断缴费对总资产产生增加的影响, 如果将缴费记作 P, 由此资产方程(8)就改进为

$$dV_t = \pi_t \mu dt + P dt + \pi_t k s_t^{\gamma} dw_t. \tag{45}$$

这样, 该方程就与退休后的(11)式有着完全一样的形式, 只是将 $-P$ 替代了 B. 将时间限制 $N+T$ 改成 N[ ]. 应用上节的结果, 把 $-P$ 替代 B 就得到最优控制

$$\pi^* = \frac{\mu}{k^2 s^{2\gamma}}\left[\frac{v}{\mu} - \frac{P}{\mu}(t-N) - e^{-\mu^2/(4k^2\gamma s^{2\gamma}) + (\mu^2/(4(\gamma+1)))t + \mu^2/(4k^2\gamma s_N^{2\gamma}) - \ln\beta}\right]. \tag{46}$$

5 小　结

本文为缴费预定制养老基金管理的两个阶段——退休前与退休后分别建立了 CEV 模型, 应用随机最优控制原理求得 HJB 方程, 这是一个关于三元函数的非线性二阶偏微分方程, 但很难得到其解析解, 也就影响着投资的正确决策. 所以在追求资产指数效用最大化的目标下, 我们采用 Legendre 变换将原问题转换成对偶问题, 并求得精确解析解, 从而确定了最优投资决策.

致谢　本文得到中南林业科技大学青年科学研究基金(重点)资助(06010A), 特感谢.

[参 考 文 献]

[1] Boulier J F, Huang S J, Taillard G. Optimal management under stochastic interest rates: the case of a

protected defined contribution pension fund[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 001, **28** ( ): 173—189.

[ ] Devolder P, Princep P M, Fabian D I. Stochastic optimal control of annuity contracts[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 003, **33**( ): 7— 38.

[3] Cox J C. The Constant elasticity of variance option pricing model[J]. The Jounrnal of Portfolio Management, 1996, **22**(1): 16—17.

[4] Cox J C, Ross S A. The valuation of options for alternative stochastic processes[J]. Journal of Financial Economics, 1976, **4**(1/): 145—166.

[5] Beckers S. The Constant elasticity of variance model and its implications for option pricing[J]. The Journal of Finance, 1980, **5**(3): 661—673.

[6] Emanuel D, Macbeth J. Further results on the constant elasticity of variance call option pricing model [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 198 , **17**(4): 53—54.

[7] Davydov D, Linetsky V. The valuation and hedging of barrier and lookback option under the CEV process[J]. Management Science, 001, **47**(7): 949—965.

[8] Basu P, Samanta P. Volatility and stock prices: implications from a production model of asset pricing [J]. Economics Letters, 001, **70**( ): 9— 35.

[9] Kramkov D, Schachermayer W. The asymptotic elasticity of utility function and optimal investment in incomplete markets[J]. Ann Appl Probab, 1999, **9**(3): 904—950.

[10] Choulli T, Hurd T R. The role of Hellinger processes in mathematical finance[J]. Entropy, 001, **3** (3): 150—161.

[11] Jonsson M, Sircar R. Optimal investment problems and volatility homogenization approximations [A]. In: Modern Methods in Scientific Computing and Applications[C]. NATO Science Series Ⅱ. Germany: Springer, 00 , **75**: 55— 81.

[1] 肖建武, 秦成林. 养老基金管理的常方差弹性模型及Legendre变换——对偶解法[J]. 系统工程理论与实践, 005, **25**(9): 49—53.

[13] Cox J C, Huang C F. A variational problem arising in financial economics[J]. Math Econ, 1991, **20** (5): 465—487.

Constant Elasticity of Variance (CEV) Model and Analytical Strategies for Annuity Contracts

XIAO Jian_wu[1], YIN Shao_hua[1], QIN Cheng_lin

(1. Business School, Central South University of Forestry and Technology, Changsha 410004, P.R.China;

. School of Science, Shanghai University, Shanghai 00444, P.R.China)

Abstract: The constant elasticity of variance(CEV) model was constructed to study a defined contribution pension plan where benefits were paid by annuity. It also presents the process that the Legendre transform and dual theory can be applied to find an optimal investment policy during a participant's whole life in the pension plan. Finally, two explicit solutions to exponential utility function in the two different periods(before and after retirement) were revealed. Hence, the optimal investment strategies in the two periods are obtained.

Key words: define contribution pension plan; stochastic optimal control; CEV model; Legendre transform; analytical strategy