

横观各向同性饱和地基上刚性圆板的扭转振动*

吴大志^{1,2}, 蔡袁强¹, 徐长节¹, 占 宏¹

(1. 浙江大学 土木工程系, 杭州 310027;

2. 浙江理工大学 土木工程系, 杭州 310018)

(一皓江推荐)

摘要: 通过解析方法研究了横观各向同性饱和半空间上刚性圆板在简谐扭转荷载作用下的振动问题。运用 Hankel 变换求解了横观各向同性饱和土的动力控制方程, 结合混合边界条件得出了刚性基础的扭转对偶积分方程, 并将对偶积分方程转化为第二类 Fredholm 积分方程求解了基础的扭转振动问题, 同时给出了动力柔度系数, 基础的角位移幅值和基底接触剪应力的表达式。通过数值算例研究了地基的各向异性程度对基础扭转振动的影响。

关键词: 横观各向同性饱和地基; 扭转振动; 刚性圆板; 动力柔度系数; 接触剪应力
中图分类号: TU435 **文献标识码:** A

引 言

土与基础的动力相互作用问题的研究不仅能丰富弹性动力学的内容, 而且对工程实际也有很强的指导意义。在研究的最初阶段, 许多学者把土体视为弹性或粘弹性各向同性介质。自 Biot^[1,2] 提出饱和弹性多孔介质中波的传播理论后, 饱和地基与基础的动力相互作用问题成了人们研究的热点。Jin^[3] 研究了饱和弹性半空间上基础的竖向振动问题。Philippacopoulos^[4] 通过引入势函数的方法分析了上覆弹性层饱和半空间上刚性圆板的竖向振动问题。Chen^[5] 通过积分变换的方法研究了饱和弹性半空间上弹性基础的扭转振动问题。由于土体在漫长的沉积过程中竖向和水平向有效应力并不相同, 所以常表现出一定的各项异性。横观各向同性介质模型合理地模拟了地基的这种差异而日益受到重视。Payton^[6] 采用积分变换和 Cagniard 方法对横观各向同性弹性介质二维和三维半空间 Lamb 问题进行了分析。Tsai^[7] 研究了横观各向同性单相弹性地基上刚性圆板的扭转振动, 给出了位移函数曲线和基底的剪应力分布曲线。对于横观各向同性饱和介质, Biot^[2] 最早建立了各向异性饱和介质的波动基本方程。此后, Kazi

* 收稿日期: 2004_11_16; 修订日期: 2006_06_20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50478081)

作者简介: 吴大志(1977—), 男, 安徽枞阳人, 讲师, 博士(联系人, Tel: + 86_571_86843376; E_mail: wdz@hz.cn);

蔡袁强(1965—), 男, 浙江诸暨人, 教授, 博士生导师(Tel: + 86_571_87952619;

Fax: + 86_571_87952619; E_mail: caiyq@zju.edu.cn)。

Aoual^[8]给出了横观各向同性多孔饱和介质在简谐点源荷载作用时的 Green 函数。Abou-seiman^[9]给出了横观各向同性饱和多孔介质中斜钻孔在三维远应力场作用下响应的闭合形式解。目前, 还未见研究横观各向同性饱和地基上刚性板的扭转振动问题的相关报道。

本文考虑地基土沿垂直剖面各向异性的特点, 研究了横观各向同性饱和地基上刚性圆板在简谐扭矩作用下的振动问题。并将问题退化为横观各向同性单相半空间上基础的振动问题, 与前人成果进行了对比。同时, 通过算例分析了地基的各向异性程度对动力响应的影响。

1 横观各向同性饱和多孔介质基本动力方程

柱坐标系中横观各项同性饱和土体的动力平衡方程^{[2], [10]}为

$$\begin{aligned} & \left[C_{11} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{2} (C_{11} - C_{12}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_r + \\ & \left[(C_{11} - C_{66}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - (C_{11} + C_{66}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] u_\theta + \\ & (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} - \frac{\partial p_f}{\partial r} = \\ & \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} & \left[(C_{11} - C_{66}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + (C_{11} + C_{66}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] u_r + \\ & \left[\frac{1}{2} (C_{11} - C_{12}) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) + C_{11} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_\theta + \\ & (C_{13} + C_{44}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial p_f}{\partial \theta} = \\ & \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} & (C_{13} + C_{44}) \left[\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \right] u_r + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 u_\theta}{r \partial z \partial \theta} + \\ & \left[C_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + C_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_z - \frac{\partial p_f}{\partial z} = \\ & \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1c)$$

式中: C_{11} 、 C_{12} 、 C_{13} 、 C_{33} 、 C_{44} 、 C_{66} 为饱和介质的弹性常数, 其中 $C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2$; u_r 、 u_θ 、 u_z 分别为土骨架的径向、切向和竖向位移; w_r 、 w_θ 、 w_z 分别为流体相对于土骨架的径向、切向和竖向位移; p_f 为孔隙水压力; n 为孔隙率; ρ_s 、 ρ_f 分别为土颗粒和孔隙水的密度; ρ 为饱和土的密度, 且 $\rho = (1 - n)\rho_s + n\rho_f$, 下同。

流体的平衡方程为

$$-\frac{\partial p_f}{\partial r} = \rho_f \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{\rho_f}{n} \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} + \frac{\eta}{k_r} \frac{\partial w_r}{\partial t}, \quad (2a)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p_f}{\partial \theta} = \rho_f \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} + \frac{\rho_f}{n} \frac{\partial^2 w_\theta}{\partial t^2} + \frac{\eta}{k_r} \frac{\partial w_\theta}{\partial t}, \quad (2b)$$

$$-\frac{\partial p_f}{\partial z} = \rho_f \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \frac{\rho_f}{n} \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} + \frac{\eta}{k_z} \frac{\partial w_z}{\partial t}, \quad (2c)$$

式中: k_r, k_z 为分别为饱和土径向和竖向的渗透系数, 量纲为 L^2 ; η 为粘度系数。
土骨架的应力应变关系为

$$\tau_{z\theta} = C_{44} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \tag{3}$$

2 基本方程求解

简谐荷载作用下各函数可表示为 $f = f e^{i\omega t}$ 的形式 (ω 表示圆频率), 为简便起见, 下文中省略了因子 $e^{i\omega t}$ 。由于所研究的是轴对称扭转问题, 则几个位移分量中仅存在切向的位移 $u_\theta e^{i\omega t}$ 和 $w_\theta e^{i\omega t}$, 并且任何分量与 θ 无关。假设基础半径为 a , 于是基本动力方程变成

$$\frac{1}{2} (C_{11} - C_{12}) \left[\dots^2 - \frac{1}{r^2} \right] u_\theta + C_{44} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = -\rho \omega^2 u_\theta - \rho_f \omega^2 w_\theta, \tag{4}$$

$$\frac{\eta}{k_r} i \omega w_\theta = \rho_f \omega^2 u_\theta + \frac{\rho_f}{n} \omega^2 w_\theta, \tag{5}$$

式中: $\dots^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ 。记弹性常数 C_{66} 与 C_{44} 之比为 δ , 显然 δ 是一个反映地基各向异性程度的指标。

记 $f(\varepsilon, z) = \int_0^\infty f(r, z) J_1(r\varepsilon) dr$ 为 1 阶 Hankel 变换, 其逆变换为 $f(r, z) = \int_0^\infty \mathcal{F}(\varepsilon, z) J_1(r\varepsilon) d\varepsilon$, 其中 $J_1(r\varepsilon)$ 为 1 阶第 1 类 Bessel 函数。引入无量纲变量

$$r = \frac{r}{a}, \quad z = \frac{z}{a}, \quad u_\theta = \frac{u_\theta}{a}, \quad w_\theta = \frac{w_\theta}{a}, \quad \rho = \frac{\rho}{\rho_f},$$

$$\tau = \frac{\tau}{\sqrt{\delta C_{44}}}, \quad a_0 = a \omega \sqrt{\frac{\rho}{C_{44}}}, \quad k = \sqrt{\frac{\rho}{C_{44}}} \frac{a \eta}{\rho_f k_r},$$

分别对式(3)~式(5)无量纲并进行 1 阶 Hankel 变换, 整理后得

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial z^2} - \mathcal{S}^2 \tilde{u}_\theta = 0, \tag{6}$$

$$\tilde{\tau}_{z\theta} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial z}, \tag{7}$$

式中
$$S^2 = \varepsilon^2 - \frac{a_0^2}{\delta} - \frac{a_0^3 \rho}{(ik - a_0/n) \delta}.$$

考虑到半空间问题存在波的辐射现象, 解方程(6)得

$$\tilde{u}_\theta(\varepsilon, z) = A e^{-\sqrt{\delta} S z}, \tag{8}$$

式中 A 为关于 ε 的函数, 并且 $\text{Re}(S) > 0$ 。代入(7)得

$$\tilde{\tau}_{z\theta}(\varepsilon, z) = -SA e^{-\sqrt{\delta} S z}. \tag{9}$$

3 对偶积分方程的建立及其求解

假定饱和土层与基底完全粘着接触, 即接触面上无相对位移, 基础与饱和地基完全粘结在一起, 则刚性圆形基础的混合边界条件无量纲化后为

$$\begin{cases} u_\theta(r, z) = r\varphi, & z = 0, 0 \leq r \leq 1, \\ \tau_{z\theta}(r, z) = 0, & z = 0, r > 1, \end{cases} \tag{10}$$

式中 φ 为基础扭转振动的角位移振幅。

由式(8)、式(9)可得接触面上 Hankel 变换域内的位移和应力,对所得解进行 1 阶 Hankel 逆变换并代入式(10)得对偶积分方程

$$\begin{cases} \int_0^\infty \mathcal{E} J_1(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = r \varphi, & 0 \leq r \leq 1, \\ \int_0^\infty \mathcal{E} S J_1(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = 0, & r > 1, \end{cases} \quad (11)$$

运用文献[11]中提到的方法可以化对偶积分方程(11)为第二类 Fredholm 积分方程

设 $AS\mathcal{E} = \frac{4\mathcal{E}\varphi}{\pi} \int_0^1 \sin(t\mathcal{E})\theta(t)dt$, 则有

$$\theta(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 M(x, \mathcal{E})\theta(\mathcal{E})d\mathcal{E} = x, \quad (12)$$

其中 $M(x, \mathcal{E}) = 2 \int_0^\infty \left[-1 + \frac{t}{S} \right] \sin(tx)\sin(t\mathcal{E})dt$

基础的接触剪应力为

$$\tau_\theta(r) = \frac{-4C_{44}\sqrt{\delta}\varphi}{\pi} \int_0^1 \theta(t) \int_0^\infty \mathcal{E} \sin(t\mathcal{E})J_1(r\mathcal{E})d\mathcal{E}dt \quad (13)$$

设作用在圆形刚性基础上的扭矩大小为 T , 无量纲化后为 $T = T/(C_{44}\sqrt{\delta}a^3)$, 由基础的动力平衡条件, 并对(9)进行 1 阶 Hankel 逆变换后可得

$$T = 16\varphi \int_0^1 t\theta(t)dt \quad (14)$$

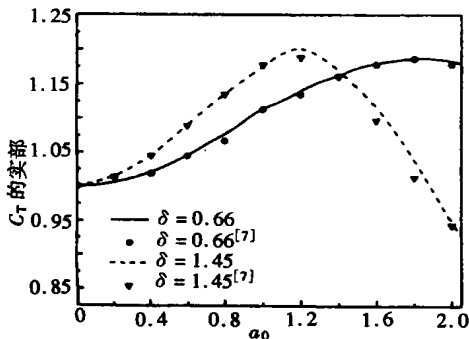
与静扭矩作用于圆形基础时的解进行对比可得动力柔度系数为

$$C_T = 1 \left[3 \int_0^1 t\theta(t)dt \right] \quad (15)$$

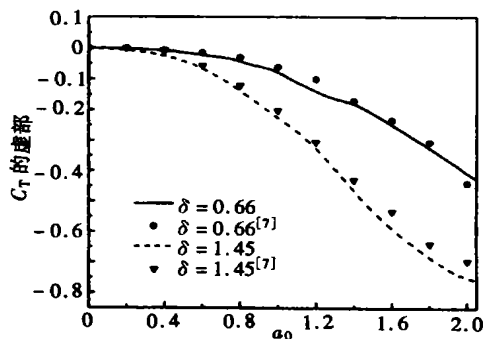
记 $f_1 = (3/16)\text{Re}(C_T)$, $f_2 = (3/16)\text{Im}(C_T)$, 基础的质量惯性矩为 I_T (无量纲化后为 $I_T = I_T/(\rho a^5)$), 则基础的扭转振动角位移幅值为

$$A_T = \frac{T}{C_{44}\sqrt{\delta}a^3} \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{(1 - a^2 f_1 I_T / \sqrt{\delta})^2 + (a^2 f_2 I_T / \sqrt{\delta})^2}} \quad (16)$$

在上述推导过程中如果令 $\delta = 1.0$, 则该问题退化为各向同性饱和半空间上刚性圆板的扭转振动问题; 如果令 $\rho = 0$, 即不考虑水对振动的影响, 则问题变成研究横观各向同性单相弹性半空间上刚性圆板的扭转振动问题



(a) 实部



(b) 虚部

图 1 弹性半空间上基础的动力柔度系数曲线

4 算例分析

算例中取饱和地基参数为: $C_{44} = 2.61 \times 10^7 \text{ Pa}$; $n = 0.35$, $k_r = 1.0 \times 10^{-12} \text{ m}^2$; $\eta = 1.0 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$; $\rho_s = 2650 \text{ kg/m}^3$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\delta = 0.2 \sim 6.0$

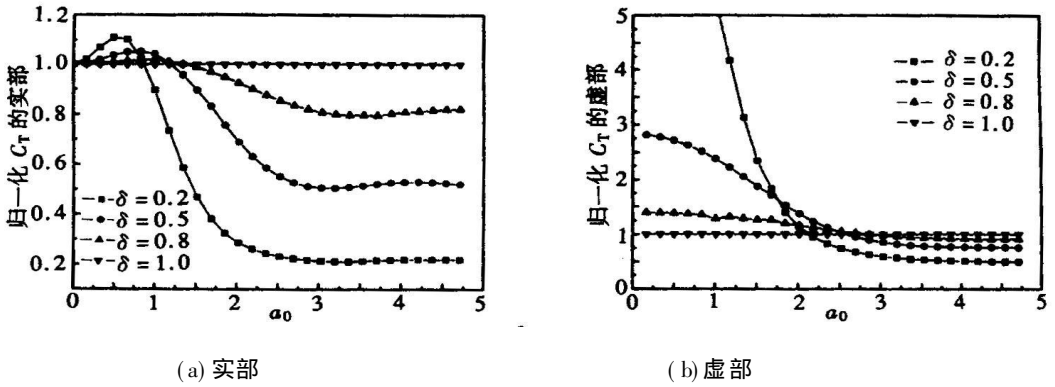


图2 $\delta < 1.0$ 时归一化的基础动力刚度系数曲线

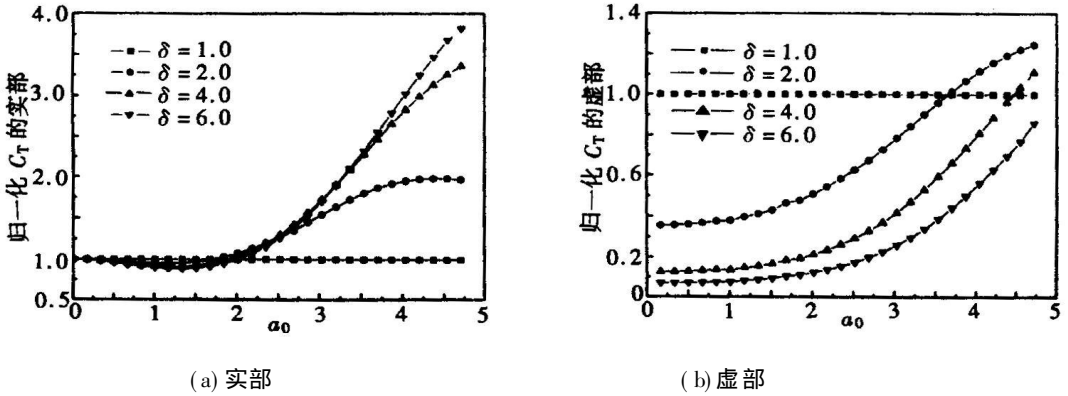


图3 $\delta > 1.0$ 时归一化的基础动力刚度系数曲线

为了验证推导的正确性, 计算了横观各向同性单相弹性半空间上基础的动力刚度系数曲线。弹性介质参数选自文献[7], 并把所得结果与文献[7]进行对比, 见图1。由于文献[7]给出的曲线无量纲频率为0到2.0, 所以对比也仅限于此范围。由图1可以看出, 二者吻合得很好。

选取了 δ 分别为 0.2, 0.5, 0.8, 1.0, 2.0, 4.0, 6.0 进行计算, 以分析地基的各向异性程度对扭转振动的影响, 并以 $\delta = 1.0$ 时的结果为标准进行归一化处理, 所得结果见图2和图3; 选取了 $\delta = 2.0$, I_T 分别为 3, 5, 8, 10 和 15 进行计算, 以分析基础的质量惯性矩对扭转振幅的影响, 结果见图4;

并在 $I_T = 5.0$ 时, 选用不同 δ 进行计算, 以分析地基的各向异性程度对扭转振幅的影响, 结果见图5。在讨论基底接触剪应力分布时, 分别选用 a_0 为 0.8 和 3.5, 不同的 δ 进行计算, 以研究

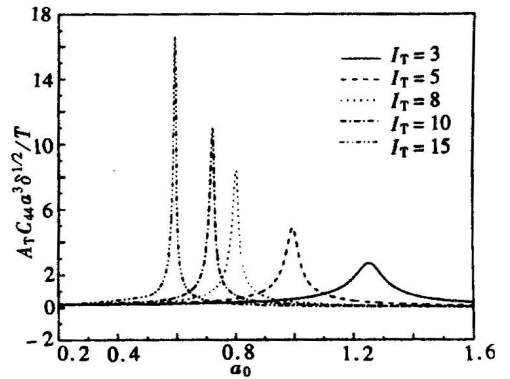
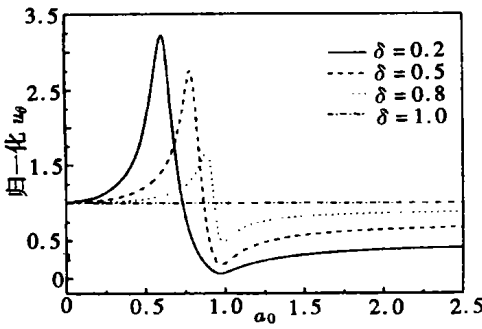


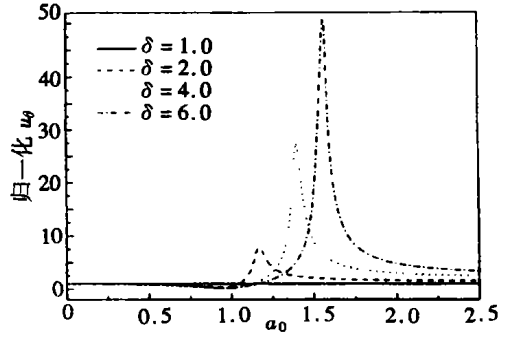
图4 $\delta = 2.0$, I_T 变化时基础的角度位移幅值曲线

地基的各向异性程度对结果的影响, 见图6; 并在 $\delta = 2.0$ 时, 分析了基底不同位置处的剪应力随频率的变化情况, 结果见图7。

由图2和图3可以看出, 当 $\delta < 1.0$, 频率很小时, 归一化动力柔度系数的实部和虚部都大于1.0, 并且 δ 越小, 对应的归一化值越大; 而在高频时正好相反; 当 $\delta > 1.0$, 低频时归一化动力柔度系数的实部和虚部都小于1.0。很显然, 横观各向同性饱和地基的各向异性程度对基础的动力柔度系数有很大影响。

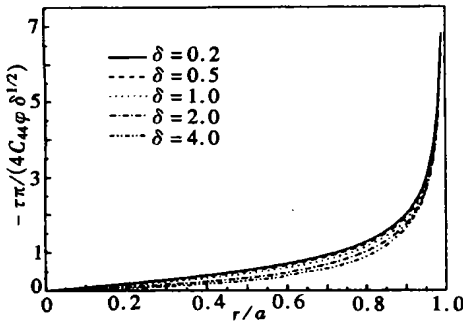


(a) $\delta < 1.0$

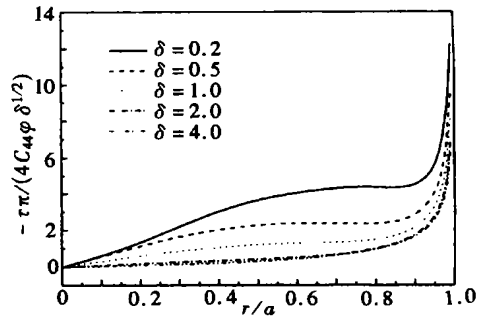


(b) $\delta > 1.0$

图5 $I_T = 5.0$, δ 变化时归一化的基础角位移幅值曲线



(a) $a_0 = 0.8$



(b) $a_0 = 3.5$

图6 频率一定, δ 不同时基底的接触剪应力分布曲线

由图4可以看出, δ 一定时, 基础的角位移振幅随质量惯性矩的不同而变化。由于基础发生共振时, 角位移振幅出现峰值。由上图可以看出, 基础的质量惯性矩越大, 共振振幅也越大, 并且发生共振时的频率越小, 这与文献[7]所得的结论一致。

图5中归一化曲线的上峰值对应的频率为不同 δ 时基础的扭转共振频率, 而下峰值对应的频率为 $\delta = 1.0$ 时基础的共振频率。从图5可以看出, δ 越小, 基础发生共振时的频率也越小; 当 $\delta < 1.0$ 时, 频率较低时基础的振幅要大于 $\delta = 1.0$ 时基础的振幅, 而频率较高时正好相反。可见, 土

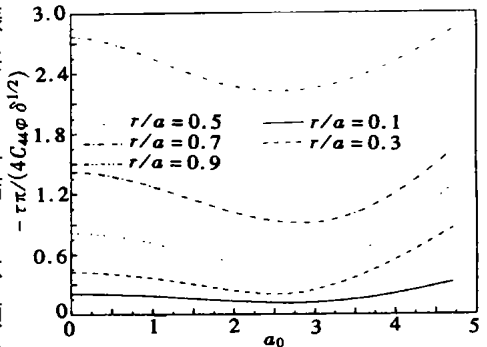


图7 $\delta = 2.0$, a_0 变化时基底的接触剪应力分布曲线

体的各向异性程度不但影响基础的共振频率,而且影响基础的振幅。

由图 6 可以看出,基底的接触剪应力随 r 的增加缓慢增大,在接近基底边缘处急剧增大,这与静刚性的应力分布形式比较接近。此外,振动频率不同,基底的剪应力分布形式也大不一样。比较图 6(a)和图 6(b)还可以看出,频率一定时,地基的各向异性程度指标 δ 对接触剪应力分布也有一定影响, δ 越大,基础底面内任一位置处的接触剪应力越小。

由图 7 可以看出,基底不同位置处的接触剪应力随频率而变化,但所有位置处的剪应力都呈现出随频率的增大先减小再增大的现象,只不过离基础中心越近,这种变化的幅度越小而已。可见文献[7]在分析剪应力分布情况时仅计算 $a_0 = 0$, $a_0 = 0.8$ 和 $a_0 = 1.6$ 三种情况而得出剪应力随频率的增大而减小的结论是欠妥的。

5 结 论

1) 地基的各向异性程度不但对基础的动力柔度系数有影响,而且对基础的角位移幅值及共振频率也有很大影响。

2) δ 一定时,基础的质量惯性矩越大,共振幅值也就越大,并且发生共振时的频率越小。

3) 基底任何位置处的接触剪应力都随频率的增大先减小再增大,并且地基的各向异性程度对接触剪应力分布有一定影响, δ 越大,接触剪应力越小。

[参 考 文 献]

- [1] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid_saturated porous solid[J]. J Acoust Soc Am er, 1956, 28(2): 168—191.
- [2] Biot M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media[J]. J Appl Phys, 1962, 33(4): 1482—1498.
- [3] JIN Bo, LIU Hua. Vertical dynamic response of a disk on a saturated poroelastic half_space[J]. Soil Dynamic and Earthquake Engineering, 1999, 18(6): 437—443.
- [4] Philippacopoulos A J. Axisymmetric vibration of disk resting on saturated layered half_space[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1989, 115(10): 2301—2322.
- [5] CHEN Long_zhu, WANG Guo_cai. Torsional vibrations of elastic foundation on saturated media[J]. Soil Dynamic and Earthquake Engineering, 2002, 22(3): 223—227.
- [6] Payton R G. Elastic Wave Propagation in Transversely Isotropic Media [M]. Hague: Martinus Nijhoff Publishers, 1983, 130—185.
- [7] Tsai Y M. Torsional vibrations of a circular disk on an infinite transversely isotropic medium[J]. Internat J Solids and Structures, 1989, 25(9): 1069—1076.
- [8] Kazi_Aoual M N, Bonnet G, Jouanna P. Green's functions in an infinite transversely isotropic saturated poroelastic medium[J]. J Acoust Soc Am er, 1988, 84(5): 1883—1889.
- [9] Abouseiman Y, Cui L. Poroelastic solutions in transversely isotropic media for wellbore and cylinder [J]. Inter J Solids and Structures, 1998, 35(35): 4905—4929.
- [10] 丁皓江. 横观各向同性弹性力学[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1997, 5—18.
- [11] Nobel B. The solution of Bessel function dual integral equation by a multiplying factor method[J]. Proceeding Comb Philosophical Society, 1963, 59(2): 351—362.

Torsional Vibrations of a Rigid Circular Plate on Transversely Isotropic Saturated Soil

WU Da_zhi^{1,2}, CAI Yuan_qiang¹, XU Chang_jie¹, ZHAN Hong¹

(1. Department of Civil Engineering, Zhejiang University,
Hangzhou 310027, P. R. China;

2. Department of Civil Engineering, Zhejiang Sci Tech University,
Hangzhou 310018, P. R. China)

Abstract: An analytical method is presented for the torsional vibrations of a rigid disk resting on transversely isotropic saturated soil. By employing the technique of Hankel transform, the dynamic governing differential equations for transversely isotropic saturated poroelastic medium were solved. Considering the mixed boundary_value conditions, the dual integral equations of torsional vibrations of a rigid circular plate resting on transversely isotropic saturated soil were established. By appropriate transform, the dual integral equations were converted into a Fredholm integral equation of the second kind. Subsequently, the dynamic compliance coefficient, the torsional angular amplitude of the foundation and the contact shear stress were expressed explicitly. Selected examples are presented to analyse the influence of saturated soil's anisotropy on the foundation's vibrations.

Key words: transversely isotropic saturated soil; torsional vibration; rigid circular plate; dynamical compliance coefficient; contact shear stress