

广义 Drinfeld_Sokolov 方程的行波解的分支*

龙 瑶, 芮伟国, 何 斌, 陈 灿

(红河学院 数学系, 云南 蒙自 661100)

(李继彬推荐)

摘要: 用 Ansatz 方法和动力系统理论研究了广义 Drinfeld_Sokolov 方程的行波解. 在给定的两组参数条件下, 得到了广义 Drinfeld_Sokolov 方程更多的孤立波解, 扭子和反扭子波解及周期波解, 并给出这些行波解精确的参数表示

关键词: 孤立波; 扭子波; 周期波; 广义 Drinfeld_Sokolov 方程

中图分类号: O175.12 文献标识码: A

引 言

本文将讨论如下的广义 Drinfeld_Sokolov 方程

$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x - 6(v^\alpha)_x = 0, \quad (1)$$

$$v_t - 2v_{xxx} + 6uv_x = 0, \quad (2)$$

其中 $\alpha > 0$. 此模型的物理应用见文献[1]和文献[2]及这两个文献中的相关文献.

令 $v = A + cu^h$ 且 $z = x - dt$. 在条件(28b)^[2]下, 利用新的 Ansatz 方法, 文献[2]得到(1)和(2)的一组孤立波解. 本文将利用 Ansatz 方法和动力系统理论^[3~7]来研究方程(1)和方程(2)的行波解, 通过我们的分析, 可以获得更多的行波解, 它们的动力学性质将会更加清楚.

作变换: $u(x, t) = \phi(x - Ct) = \phi(\xi)$, $v(x, t) = \psi(x - Ct) = \psi(\xi)$, 其中 C 是波速, 则方程(1)和(2)化为如下的常微分方程

$$-C\phi' + \phi\psi - 6\phi\phi' - 6(\phi^\alpha)' = 0, \quad (3)$$

$$-C\psi' - 2\psi\psi + 6\phi\psi' = 0. \quad (4)$$

为了求解这个系统, 设

$$\phi = \beta + r\psi^m, \quad (5)$$

其中 $m > 0$, $r \neq 0$ 并且 β, r, m 是待定常数. (这里参数 C, β, r, m 分别对应着文献[2]中的 d, A, c, h).

将(5)代入(4), 积分一次且令积分常数为 0, 得

$$-C\psi - 2\psi'' + 6\beta\psi + (6r/(m+1))\psi^{m+1} = 0 \quad (6)$$

此方程有首次积分

* 收稿日期: 2005_10_09; 修订日期: 2006_08_06

基金项目: 云南省教育厅科学研究基金(重点)资助项目(5Z0071A)

作者简介: 龙瑶(1957—), 女, 云南西盟人, 副教授(联系人. Tel: + 86_873_3699239; E_mail: yaolong04@163.com).

$$(\phi')^2 = \frac{6r}{(m+1)(m+2)} \phi^{m+2} + \left(3\beta - \frac{C}{2}\right) \phi^2, \quad (7)$$

对(3)积分一次,且取积分常数为 g ,得到

$$-C\phi + \phi' - 3\phi^2 - 6\phi^{\alpha} = g. \quad (8)$$

由(5),得到如下关系

$$\phi'' = \frac{9m^2 r^2}{(m+1)(m+2)} \phi^{2m} + m^2 r \left(3\beta - \frac{C}{2}\right) \phi^m, \quad \phi^2 = r^2 \phi^{2m} + 2r\beta\phi^m + \beta^2, \quad (9)$$

将(5)、(9)代入(8),比较 ϕ 的同次幂系数,得到如下参数条件

$$\begin{cases} m = \alpha, \\ \frac{3m^2 r^2}{(m+1)(m+2)} = r^2, \\ -Cr + \left(3\beta - \frac{C}{2}\right) m^2 r - 6r\beta - 6 = 0, \end{cases} \quad (10)$$

或

$$\begin{cases} 2m = \alpha, \\ \frac{9m^2 r^2}{(m+1)(m+2)} - 3r^2 - 6 = 0, \\ -Cr + \left(3\beta - \frac{C}{2}\right) m^2 r - 6r\beta = 0, \end{cases} \quad (11)$$

且 $g = -C\beta - 3\beta^2$.

从(10)和(11),得到参数 m, α, r 的两种情况

$$m = 2, \alpha = 2, r = 2/(2\beta - C), \quad (12)$$

或

$$\begin{cases} m = \alpha/2, \\ r = \pm \sqrt{\frac{(\alpha+4)(\alpha+2)}{(\alpha+1)(\alpha-4)}}, \quad \alpha > 4, \\ \beta = \frac{C(8+\alpha^2)}{6\alpha^2-48} \end{cases} \quad (13)$$

可以看出(13)中的条件与文献[2]中所给的条件(28b)是不一样的.

根据上面两组参数条件,下面将利用分支理论^[3-7]研究方程(6).

1 方程(6)的相图的分支

令 $\phi' = y$,方程(6)等价于下面的二维系统

$$\frac{d\phi}{d\xi} = y, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{3r}{m+1} \phi^{m+1} + \left(3\beta - \frac{C}{2}\right) \phi. \quad (14)$$

系统(14)具有首次积分

$$H(\phi, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{3r}{(m+1)(m+2)} \phi^{m+2} - \frac{1}{2} \left(3\beta - \frac{C}{2}\right) \phi^2 = H, \quad (15)$$

其中 H 是积分常数.

容易得到如下结论

(a) 当 m 是奇数时,系统(14)有2个平衡点 $O(0, 0), A(\phi_0, 0)$. 其中

$$\phi_0 = \left(\frac{(m+1)}{3r} \left(\frac{C}{2} - 3\beta\right)\right)^{1/m}.$$

(b) 若 m 是偶数且 $\frac{(m+1)}{3r} \left(\frac{C}{2} - 3\beta\right) > 0$,则系统(14)有3个平衡点 $O(0, 0)$ 和 $B_{1,2}(\pm\phi_0, 0)$.

(c) 若 m 是偶数且 $\frac{(m+1)}{3r} \left(\frac{C}{2} - 3\beta\right) < 0$,则系统(14)仅有1个平衡点 $O(0, 0)$.

令 $M(\phi_i, y_j)$ 为线性系统(14) 在平衡点 (ϕ_i, y_j) 的系数矩阵. 则有 $\text{Trace}(M(\pm\phi_0, 0)) = 0$ 且 $J(O) = C/2 - 3\beta, J(A) = J(B_1) = J(B_2) = m(3\beta - C/2)$. (16)

根据动力系统理论, 对于一个平面可积系统的平衡点而言, 如果 $J < 0$, 则这个平衡点是一个鞍点; 如果 $J > 0$ 且 $\text{Trace}(M(\phi_i, 0)) = 0$, 则该平衡点是一个中心; 如果 $J > 0$ 且 $(\text{Trace}(M(\phi_i, 0)))^2 - 4J(\phi_i, 0) > 0$, 则该平衡点是一个结点; 如果 $J = 0$ 且该平衡点的指数为 0, 则它是一个尖点.

由(15)式, 作如下定义

$$H_0 = H(0, 0) = 0, H_A = \frac{m}{2(m+2)} \phi_0^2 \left[\frac{C}{2} - 3\beta \right], H_{B_1} = H_{B_2} = H_A. \quad (17)$$

对于一个固定的 H , 由(15) 定义的水平曲线 $H(\phi, y) = H$ 决定了(14) 的一族不变曲线集, 包含不同束曲线. 当 H 变化时, 由(14) 定义的轨道族, 有着不同的动力学性质. 由此, 在不同的参数条件下, 可得到系统(14) 的不同相图的分支. 如图 1 和图 2 所示.

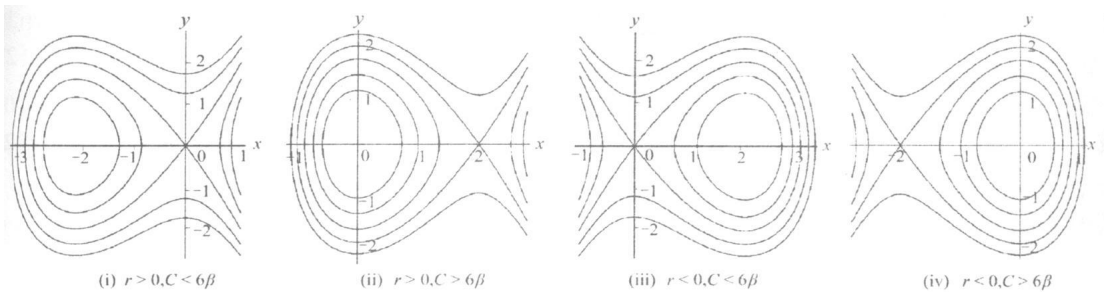


图 1 当 m 是奇数时, 系统(14) 的相图的分支

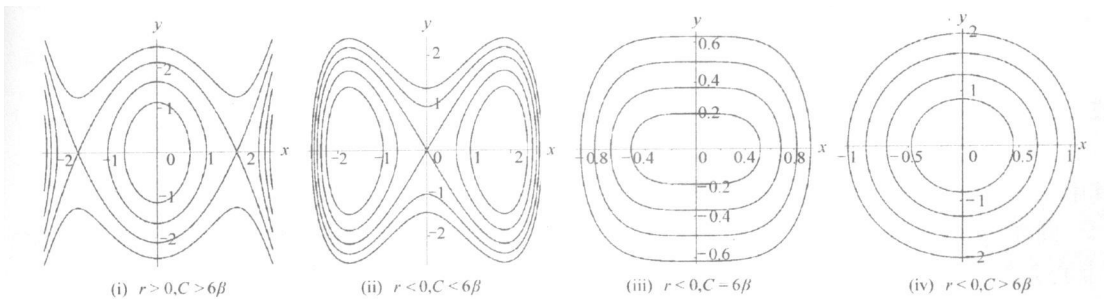


图 2 当 m 是偶数时, 系统(14) 的相图的分支

当 m 为奇数, $r < 0(r > 0), C = 6\beta$ 时; 或当 m 为偶数, $r > 0, C \leq 6\beta$ 时, 系统(14) 不存在闭轨, 因此, 省略它们在这些条件下的相图.

2 方程(1)和方程(2) 行波解精确的参数表示

在条件(12)和(13)下, 利用(15)对(14)的第一个方程积分, 得到方程(1)和(2)的许多孤立波解, 周期波解, 扭子波解和反扭子波解的一些精确的参数表示.

(i) 在 m 是奇数, $r > 0, C < 6\beta$ 或 m 是奇数, $r < 0, C < 6\beta$ 的条件下. 则当 $H = H_0 = 0$ 时, 系统(14) 过鞍点 $O(0, 0)$ 各有一个同宿轨道, 见图 1(i) 或图 1(iii). 把 $H = 0$ 代入(15), 得到这两条同宿轨道的代数方程如下

$$y = \pm \sqrt{\frac{6r}{(m+1)(m+2)}} \phi \sqrt{b - \phi^m}, \quad (18)$$

或

$$y = \pm \sqrt{\frac{-6r}{(m+1)(m+2)}} \phi \sqrt{b - \phi^m}, \quad (19)$$

其中 $b = \pm(1/6r)(m+1)(m+2)(3\beta - C/2)$ 。把(18)和(19)代入(14)的第一个方程,得到

$$\pm \frac{d\phi}{\phi \sqrt{b - \phi^m}} = \sqrt{\frac{\pm 6r}{(m+1)(m+2)}} d\xi. \quad (20)$$

对(20)积分,有

$$\int_{b^{1/m}}^{\phi} \frac{ds}{s \sqrt{b - s^m}} = \sqrt{\frac{\pm 6r}{(m+1)(m+2)}} \int_0^{\xi} ds, \quad \xi > 0, \quad (21)$$

和

$$-\int_{b^{1/m}}^{\phi} \frac{ds}{s \sqrt{b - s^m}} = \sqrt{\frac{\pm 6r}{(m+1)(m+2)}} \int_0^{\xi} ds, \quad \xi \leq 0, \quad (22)$$

其中 $(b^{1/m}, 0)$ 是这条轨道与 ϕ 轴的右交点。从而有

$$\begin{cases} v(x, t) = \phi(\xi) = b^{1/m} \operatorname{sech}^{2/m}(\Omega_1(x - Ct)), \\ u(x, t) = \phi(\xi) = \beta + rb \operatorname{sech}^2(\Omega_1(x - Ct)), \end{cases} \quad (23)$$

或

$$\begin{cases} v(x, t) = \phi(\xi) = -b^{1/m} \operatorname{sech}^{2/m}(\Omega_2(x - Ct)), \\ u(x, t) = \phi(\xi) = \beta + rb \operatorname{sech}^2(\Omega_2(x - Ct)), \end{cases} \quad (24)$$

其中 $\Omega_{1,2} = \frac{1}{2}m \sqrt{\frac{\pm 6rb}{(m+1)(m+2)}}$ 。

把(13)代入(23)和(24),得到两组光滑的孤立波解,它们的精确参数表示如下

$$\begin{cases} v_1(x, t) = \phi(\xi) = \eta^{2/\alpha} \operatorname{sech}^{4/\alpha}(\Omega_1(x - Ct)), \\ u_1(x, t) = \phi(\xi) = \frac{C(\alpha^2 + 8)}{6(\alpha^2 - 8)} - \frac{C(\alpha + 2)(\alpha + 4)}{3(\alpha^2 - 8)} \operatorname{sech}^2(\Omega_1(x - Ct)), \end{cases} \quad (25)$$

或

$$\begin{cases} v_2(x, t) = \phi(\xi) = -\eta^{2/\alpha} \operatorname{sech}^{4/\alpha}(\Omega_2(x - Ct)), \\ u_2(x, t) = \phi(\xi) = \frac{C(\alpha^2 + 8)}{6(\alpha^2 - 8)} - \frac{C(\alpha + 2)(\alpha + 4)}{3(\alpha^2 - 8)} \operatorname{sech}^2(\Omega_2(x - Ct)), \end{cases} \quad (26)$$

其中 $\eta = (C/3(\alpha^2 - 8)) \sqrt{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha^2 - 16)}$, $\Omega_1 = (\alpha/2) \sqrt{2C/(\alpha^2 - 8)}$ 。

同样,在条件 $\alpha = 4K$, ($K = 2, 3, \dots, n$) (即 m 为偶数), $r < 0$, $C < 6\beta$, $H = 0$, 见图 2 (ii), 方程(1)和方程(2)有两组孤立波解

$$\begin{cases} v_1(x, t) = \phi(\xi) = \pm \eta^{2/\alpha} \operatorname{sech}^{4/\alpha}(\Omega_1(x - Ct)), \\ u_1(x, t) = \phi(\xi) = \frac{C(\alpha^2 + 8)}{6(\alpha^2 - 8)} - \frac{C(\alpha + 2)(\alpha + 4)}{3(\alpha^2 - 8)} \operatorname{sech}^2(\Omega_1(x - Ct)). \end{cases} \quad (27)$$

根据(12)的参数条件和图 2,可以得到如下关于孤立波解,周期解,扭子波和反扭子波解的结论。

(ii) 在 $m = \alpha = 2$, $r = (2/(2\beta - C)) < 0$, $C < 6\beta$ 的条件下。则当 $H = H_0 = 0$ 时,系统(14)有两条同宿轨过鞍点 $O(0, 0)$, 见图 2(ii)。把 $H = 0$ 代入(15),得到这两条同宿轨道的代数方程如下

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{C - 2\beta}} \phi \sqrt{\eta_1 + \phi^2}. \quad (28)$$

同理,把(28)代入到(14)的第一个方程积分,并把得到的结果代入(5),得到两组光滑的孤立波解,它们的精确参数表示如下

$$\begin{cases} v_3(x, t) = \phi(\xi) = \pm \sqrt{\eta_1} \operatorname{sech}(\Omega_3(x - Ct)), \\ u_3(x, t) = \phi(\xi) = \beta + \frac{2\eta_1}{2\beta - c} \operatorname{sech}^2(\Omega_3(x - Ct)), \end{cases} \quad (29)$$

其中 $\eta_1 = -(1/2)(2\beta - C)(6\beta - C)$, $\Omega_3 = \sqrt{(6\beta - C)/2}$.

(ii) 在 $m = \alpha = 2, r = 2/(2\beta - C) > 0, C > 6\beta$ 的条件下. 则当 $H = H_{B_1} = H_{B_2} = (1/32)(2\beta - C)(C - 6\beta)^2$ 时, 系统(14) 有两条异宿轨道连接鞍点 $B_{1,2}$, 见图 2(i). 把 $H = (1/32)(2\beta - C)(C - 6\beta)^2$ 代入(15), 得到这两条异宿轨道的代数方程如下

$$y = \pm \sqrt{1/(2\beta - C)} \left[\phi^2 - (1/4)(2\beta - C)(C - 6\beta) \right]. \quad (30)$$

把(30)代入(14)的第一个方程积分后, 再把得到的结果代入(5), 得到扭子与反扭子波解和一个孤波解, 它们的精确的参数表示如下

$$\begin{cases} v(x, t) = \phi(\xi) = 1/(2) \sqrt{(2\beta - C)(C - 6\beta)} \tanh(\omega(x - Ct)), \\ u(x, t) = \phi(\xi) = \beta + (1/2)(C - 6\beta) \tanh^2(\omega(x - Ct)), \end{cases} \quad (31)$$

其中 $\omega = \sqrt{C - 6\beta}/2$.

(iv) 在 $m = \alpha = 2, r = 2/(2\beta - C) > 0, C > 6\beta$ 的条件下. 则当 $H \in (0, H_1)$ (或 $H \in (0, H_2)$) 时, 系统(14) 有一族围绕中心 $O(0, 0)$ 的周期轨道, 见图 2(i). 由(15)可得到这些周期轨的代数方程如下

$$y = \pm (1/(\sqrt{2\beta - C})) \sqrt{(\eta_2^2 - \phi^2)(\zeta_2^2 - \phi^2)}, \quad (32)$$

其中

$$\begin{aligned} \eta_2^2 &= (1/4)(C - 6\beta)(2\beta - C) + (1/4) \sqrt{(2\beta - C)[(C - 6\beta)^2(2\beta - C) - 32H]}, \\ \zeta_2^2 &= (1/4)(C - 6\beta)(2\beta - C) - (1/4) \sqrt{(2\beta - C)[(C - 6\beta)^2(2\beta - C) - 32H]}. \end{aligned}$$

把(32)代入(14)的第一个方程后积分, 并把得到的结果代入(5), 得到一族无穷多个光滑的周期波解, 它们的精确的参数表示如下

$$\begin{cases} v(x, t) = \phi(\xi) = \zeta_2 \operatorname{sn}(\omega(x - Ct), k), \\ u(x, t) = \phi(\xi) = \beta + (2/(2\beta - C)) \zeta_2^2 \operatorname{sn}^2(\omega(x - Ct), k). \end{cases} \quad (33)$$

其中 $\omega = \eta_2 \sqrt{1/(C - 2\beta)}$, $k = \zeta_2/\eta_2$.

(v) 在 $m = \alpha = 2, r = 2/(2\beta - C) < 0, C < 6\beta$ 的条件下. 则当 $h \in (H_1, 0)$ 时, 系统(14) 有两族围绕中心点 B_1 和 B_2 的周期轨道, 见图 2(ii). 由(15)可得这些周期轨道的代数方程

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{C - 2\beta}} \sqrt{(\eta_3^2 - \phi^2)(\phi^2 - \zeta_3^2)}, \quad (34)$$

其中

$$\begin{aligned} \eta_3^2 &= (1/4) \sqrt{(C - 2\beta)[(C - 2\beta)(6\beta - C)^2 + 32H]} + (1/4)(C - 2\beta)(6\beta - C), \\ \zeta_3^2 &= -(1/4) \sqrt{(C - 2\beta)[(C - 2\beta)(6\beta - C)^2 + 32H]} + (1/4)(C - 2\beta)(6\beta - C). \end{aligned}$$

把(34)代入(14)的第一个方程后积分, 并把得到的结果代入(5), 得到两族光滑的无穷多个周期波解, 它们的精确的参数表示如下

$$\begin{cases} v(x, t) = \phi(\xi) = \pm \eta_3 \operatorname{dn}(\omega(x - Ct), k), \\ u(x, t) = \phi(\xi) = \beta + \frac{2}{2\beta - C} \eta_3^2 \operatorname{dn}^2(\omega(x - Ct), k). \end{cases} \quad (35)$$

其中 $\omega = \eta_3 \sqrt{1/(C - 2\beta)}$, $k = \sqrt{(\eta_3^2 - \zeta_3^2)/\eta_3^2}$.

(vi) 在 $m = \alpha = 2, r = 2/(2\beta - C) < 0, C < 6\beta$ 的条件下, 则当 $H \in (0, +\infty)$ 时, 系统(14) 有围绕中心 $O(0, 0)$ 的周期轨道, 见图 2(ii). 由(15), 可得这些周期轨道的代数方程为

$$y = \pm \sqrt{1/(C - 2\beta)} \sqrt{(\eta_4^2 - \phi^2)(\phi^2 + \zeta_4^2)}, \quad (36)$$

其中 $\eta_4 = \eta_3, \zeta_4 = -\zeta_3$.

把(36)代入(14)的第一个方程后积分, 并把所得的结果代入(5), 得到一族无穷多个光滑的周期波解, 它们的精确的明显参数表示如下

$$\begin{cases} v(x, t) = \phi(\xi) = \eta_4 \operatorname{cn}(\omega(x - Ct), k), \\ u(x, t) = \phi(\xi) = \beta + (2/(2\beta - C)) \eta_4^2 \operatorname{cn}^2(\omega(x - Ct), k), \end{cases} \quad (37)$$

其中 $\omega = \sqrt{1/(C - 2\beta)(\eta_4^2 + \zeta_4^2)}, k = \sqrt{\eta_4^2/(\eta_4^2 + \zeta_4^2)}$.

(vii) 在 $m = \alpha = 2, r = 2/(2\beta - C) < 0, C \geq 6\beta$ 的条件下, 则当 $H \in (0, +\infty)$ 时, 系统(14) 有一族围绕中心 $O(0, 0)$ 的周期轨道, 见图 2(iii) 和图 2(iv). 可各得到一族光滑的无穷多个周期波解, 这些周期波解的参数表示与(37)相同.

感谢 红河学院科学研究基金(重点)资助项目(XJZ0502).

[参 考 文 献]

- [1] Gurses M, Karasu A. Integrable KdV systems: recursion operators of degree four[J]. Phys Lett A, 1999, 251(4): 247—249.
- [2] HU Jian_lan. A new method of exact travelling wave solution for coupled nonlinear differential equations[J]. Phys Lett A, 2004, 325(1): 37—42.
- [3] Chow S N, Hale J K. Method of Bifurcation Theory [M]. New York: Springer_Verlag, 1981.
- [4] Guckenheimer J, Holmes P J. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields [M]. New York: Springer_Verlag, 1983.
- [5] LI Ji_bin, LIU Zheng_rong. Smooth and non-smooth travelling waves in a nonlinearly dispersive equation[J]. Appl Math Modelling, 2000, 25(1): 41—56.
- [6] LI Ji_bin, LIU Zheng_rong. Travelling wave solutions for a class of nonlinear dispersive equations[J]. Chinese Ann Math Ser B, 2003, 23(3): 397—418.
- [7] LONG Yao, RUI Wei_guo, HE Bin. Travelling wave solutions for a higher order wave equations of KdV type(I) [J]. Chaos Solitons and Fractals, 2005, 23(2): 469—475.

Bifurcations of Travelling Wave Solutions for the Generalized Drinfeld_Sokolov Equations

LONG Yao, RUI Wei_guo, HE Bin, CHEN Can

(Department of Mathematics, Honghe University, Mengzi, Yunnan 661100, P. R. China)

Abstract: Ansatz method and the theory of dynamical systems are used to the study of the traveling wave solutions for the generalized Drinfeld_Sokolov equations. Under two groups of the parametric conditions, more solitary wave solutions, kink and anti_kink wave solutions and periodic wave solutions were obtained. Exact explicit parametric representations of these travelling wave solutions are given.

Key words: solitary wave; kink wave; periodic wave; generalized Drinfeld_Sokolov equation