

参数激励 Duffing_Van der Pol 振子的 动力学响应及反馈控制*

李欣业¹, 陈予恕², 吴志强², 宋 涛³

(1. 河北工业大学 机械工程学院, 天津 300130;

2. 天津大学 机械工程学院, 天津 300072;

3. 山东建筑工程学院 研究生处, 济南 250014)

(本刊编委陈予恕来稿)

摘要: 研究了 Duffing_Van der Pol 振子的主参数共振响应及其时滞反馈控制问题。依平均法和对时滞反馈控制项 Taylor 展开的截断得到的平均方程表明, 除参数激励的幅值和频率外, 零解的稳定性只与原方程中线性项的系数和线性反馈有关, 但周期解的稳定性还与原方程中非线性项的系数和非线性反馈有关。通过调整反馈增益和时滞, 可以使不稳定的零解变得稳定。非零周期解可能通过鞍结分岔和 Hopf 分岔失去稳定性, 但选择合适的反馈增益和时滞, 可以避免鞍结分岔和 Hopf 分岔的发生。数值仿真的结果验证了理论分析的正确性。

关键词: Duffing_Van der Pol 振子; 主参数共振; 时滞; 反馈控制; 分岔

中图分类号: O323 **文献标识码:** A

引 言

作为两种典型的非线性系统的组合, Duffing_Van der Pol 振子可以作为许多领域的研究模型, 例如物理学、工程学、电子学、生物学和神经学等领域。因此近些年吸引了许多研究者的兴趣^[1-3]。Holmes 和 Rand^[4]研究了形如 $\ddot{x} + (\alpha + \beta x^2)x + \gamma x + \delta x^3 = 0$ 的 Duffing_Van der Pol 振子的局部和全局分岔行为。Tsuda 等人^[5]研究了含时滞的 Duffing_Van der Pol 振子的主共振和 1:2 亚谐共振的混沌运动。Szemplinska-Stupnicka 等人^[6]研究 Duffing_Van der Pol 振子的主共振时发现了拟周期运动和混沌吸引子。Maccari^[7]利用渐进摄动法研究 Duffing_Van der Pol 振子的主共振时, 给出了产生倍周期运动的充分条件。Algaba 等人^[8]研究了自治的 Duffing_Van der Pol 振子的退化分岔问题。徐健等人^[9]研究位移反馈控制的 Duffing_Van der Pol 振子的主共振时, 发现倍周期分岔和环面破损是导致混沌运动出现的两种途径。Kakmeni 等人^[10]研究了在两个周期激励作用下的 Duffing_Van der Pol 振子的奇怪吸引子和混沌控制问题。

* 收稿日期: 2005-07-02; 修订日期: 2006-07-24

基金项目: 教育部留学回国人员科研启动基金资助项目(教外司留[2006]331号)

作者简介: 李欣业(1966—), 男, 河北唐山人, 博士, 副教授(联系人。Tel: + 86_22_26582769; E_mail: xinyeli@eyou.com)。

就作者所知, 参数激励下 Duffing_Van der Pol 振子的动力学行为的研究却不多见. 本文将就下列形式的 Duffing_Van der Pol 振子的主参数共振问题进行讨论, 并考虑含时滞的位移与速度反馈控制:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 - (\alpha - \gamma x^2)x + kx \cos \Omega t = u[x(t - \tau), \dot{x}(t - \tau)], \quad (1)$$

式中 ω_0 是相应的不含反馈控制的线性系统的固有频率, γ , β 和 α 均为正的常数, k 和 Ω 分别是参数激励的振幅和频率, 时滞参数 $\tau > 0$. 反馈控制的形式如下:

$$u[x(t - \tau), \dot{x}(t - \tau)] = g_p x(t - \tau) + g_d \dot{x}(t - \tau) + g_{n1} x^3(t - \tau) + g_{n2} \dot{x}^3(t - \tau), \quad (2)$$

式中的 g_p 和 g_d 是线性反馈增益, g_{n1} 和 g_{n2} 是非线性反馈增益. 若 $u(x(t - \tau), \dot{x}(t - \tau))$ 为零, 系统(1)称为无控制系统.

本文将重点讨论系统(1)的动力学行为特性及其控制问题. 全文安排如下: 第1节基于平均法给出确定稳态响应振幅和相位的平均方程. 第2节讨论零解的稳定性, 并给出零解的稳定区域和不稳定区域. 第3节讨论周期解的稳定性和分岔, 给出周期解发生鞍结分岔和 Hopf 分岔的条件. 第4节是关于本文的讨论与结论.

1 平均方程

在弱非线性、弱反馈控制、弱参数激励和小阻尼约定下, 方程(1)可写成下列形式:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon[\beta x^3 - (\alpha - \gamma x^2)x + kx \cos \Omega t] = \varepsilon u[x(t - \tau), \dot{x}(t - \tau)], \quad (3)$$

式中 ε 是正的小参数. 对主参数共振情形, 引进调协参数 σ :

$$\Omega^2 = 4\omega_0^2(1 + \varepsilon\sigma). \quad (4)$$

根据平均法, 方程(3)的近似解为下列形式^[1~3, 11]:

$$x = a \cos\left(\frac{1}{2}\Omega t - \theta\right), \quad (5)$$

其中振幅 a 和相位 θ 是随时间慢变的, 且由下列方程控制:

$$\begin{cases} \dot{a} = -\varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi/\Omega} \sin\left(\frac{1}{2}\Omega t - \theta\right) F dt, \\ \dot{\theta} = \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi/\Omega} \cos\left(\frac{1}{2}\Omega t - \theta\right) F dt, \end{cases} \quad (6)$$

式中 F 代表将式(3)中含 ε 的项全部移到等号右边时 ε 的系数, 即

$$F = u[x(t - \tau), \dot{x}(t - \tau)] - [\beta x^3 - (\alpha - \gamma x^2)x + kx \cos \Omega t].$$

积分(6)式后将含时滞的项作 Taylor 展开, 并截取首项^[12], 可得

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon \frac{1}{32} a [-16k \sin(2\theta) + f_{10} + a^2 f_{11}], \\ \dot{\theta} = \varepsilon \frac{1}{32} a [-16k \cos(2\theta) + f_{20} + a^2 f_{21}], \end{cases} \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned} f_{10} &= 16\alpha\Omega - 32g_p \sin\left(\frac{1}{2}\Omega\tau\right) + 16g_d \Omega \cos\left(\frac{1}{2}\Omega\tau\right), \\ f_{20} &= 32\omega_0^2\sigma + 32g_p \cos\left(\frac{1}{2}\Omega\tau\right) + 16g_d \Omega \sin\left(\frac{1}{2}\Omega\tau\right), \\ f_{11} &= -4\gamma\Omega - 24g_{n1} \sin\left(\frac{1}{2}\Omega\tau\right) + 3g_{n2} \Omega^3 \cos\left(\frac{1}{2}\Omega\tau\right), \end{aligned}$$

$$f_{21} = -24\beta + 24g_{n1}\cos\left(\frac{1}{2}\Omega\tau\right) + 3g_{n2}\Omega^3\sin\left(\frac{1}{2}\Omega\tau\right).$$

方程(7)表明其有两类固定点: 零固定点和非零固定点. 它们分别对应着原系统的零解和周期解. 如果所有的反馈增益都为零, 则方程(7)对应着无控制系统的平均方程. 显然, 由于反馈增益和时滞的出现, 平均方程中各项的系数均发生了变化, 所以借助于含时滞的反馈对无控制系统的动力学进行控制是可能的. 同时方程(7)在下列变换下是不变的:

$$(a, \theta) \mapsto (a, \theta + \pi).$$

因此如果 (a, θ) 是方程(3)的解, 那么 $(a, \theta + \pi)$ 也是方程(3)的解.

2 零解的稳定性

为分析零解的稳定性, 需将形如式(5)的近似解改写成如下形式^[13]:

$$x = p \cos\left(\frac{1}{2}\Omega t\right) + q \sin\left(\frac{1}{2}\Omega t\right),$$

与式(7)对应的关于 p 和 q 的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{\varepsilon}{32}[f_{10}p + f_{11}p(p^2 + q^2) - f_{20}q - f_{21}q(p^2 + q^2) - 16qk], \\ \dot{q} = \frac{\varepsilon}{32}[f_{10}q + f_{11}q(p^2 + q^2) + f_{20}p + f_{21}p(p^2 + q^2) - 16pk]. \end{cases} \quad (8)$$

根据方程(8), 零解对应的 Jacobi 矩阵的特征值是下列方程的根:

$$\lambda^2 + 2m_1\lambda + n_1 = 0, \quad (9)$$

式中 $m_1 = -f_{10}$, $n_1 = f_{10}^2 + f_{20}^2 - 256k^2$. 根据 Routh-Hurwitz 准则^[14], 零解是渐进稳定的, 当且仅当下列条件满足时:

$$f_{10} < 0, f_{10}^2 + f_{20}^2 - 256k^2 > 0. \quad (10)$$

根据 f_{10} 和 f_{20} 的定义可知, 除原方程中线性项的系数外, 零解的稳定性只与线性反馈有关. 零解的稳定区域和不稳定区域的边界为

$$f_{10} = 0, f_{10}^2 + f_{20}^2 - 256k^2 = 0. \quad (11)$$

由于约定 α 为正, 所以对于无控制的情况, 式(10)中的第1式不成立. 因此没有反馈控制的 Duffing_Van der Pol 振子的零解是不稳定的. 与式(11)的第1、2两式相对应, 图1、2中分别在 Ω_{α} 和 Ω_k 平面上给出了具有线性反馈控制的 Duffing_Van der Pol 振子零解的稳定区域和不稳定区域的边界. 其中边界的下方为稳定区域, 边界的上方为不稳定区域.

从图1可以看出, 在主参数共振频率即 $\Omega = 2$ 附近, 当 $\tau = 4, 5, 6$ 时没有正的 α 存在, 即零解没有稳定区域. 故在图2中只给出了时滞 τ 分别为 1, 2, 3 的情况. 图3、4为直接对方程(3)进行数值积分的结果. 其表明无控制时 Duffing_Van der Pol 振子的零解是不稳定的, 但利用含时滞的线性反馈控制可使零解稳定.

顺便指出, 零解稳定性的变化又与非零解数目的变化相联系^[15], 这将在下面讨论非零解的稳定性与分岔时进行分析.

3 主参数共振周期解的稳定性及分岔

在式(7)中, 令 $\dot{a} = \dot{\theta} = 0$, 可以得到下列关于非零稳态响应振幅和相位的代数方程:

$$a^4(f_{11}^2 + f_{21}^2) + 2a^2(f_{10}f_{11} + f_{20}f_{21}) + f_{10}^2 + f_{20}^2 - 256k^2 = 0, \quad (12)$$

$$\tan 2\theta = (a^2f_{11} + f_{10}) / (a^2f_{21} + f_{20}). \quad (13)$$

式(12)和(13)分别反映了非零稳态响应的振幅、相位与系统参数、反馈增益和时滞的关系。图5和6分别给出了其它参数固定时,无控制、线性反馈控制、线性与非线性反馈控制3种情况的响应振幅与参激频率、参激振幅的关系曲线。作为示例,取 $\omega_0 = 1$ 。

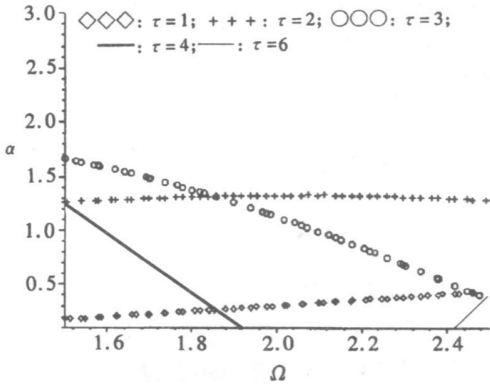


图1 Ω_α 平面上线性反馈控制系统零解稳定区域和不稳定区域的边界 ($g_p = g_d = 1$)

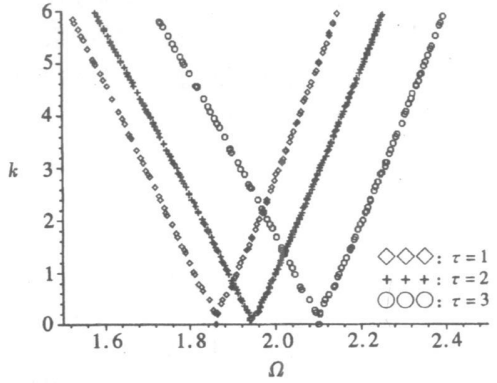


图2 Ω_k 平面上线性反馈控制系统零解稳定区域和不稳定区域的边界 ($\alpha = 1.0, g_p = g_d = 1$)

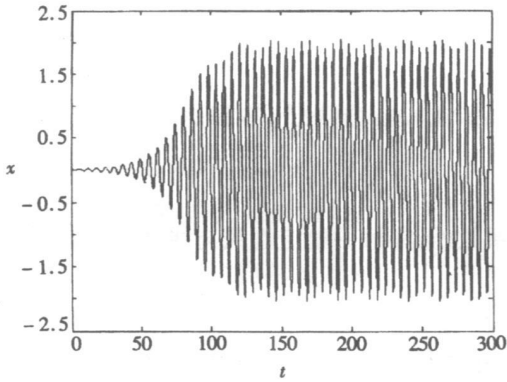


图3 无控制系统的零解是不稳定的 ($\Omega = 2, k = 0.5, \alpha = \beta = \gamma = 1, (x_0, \dot{x}_0) = (0.01, 0)$)

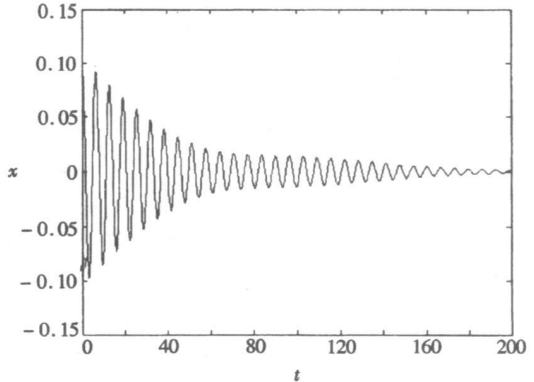


图4 适当的反馈时滞和增益可以使零解稳定 ($\Omega = 2, k = 0.5, \alpha = \beta = \gamma = 1, g_p = g_d = 1, \tau = 2, (x_0, \dot{x}_0) = (0.1, 0)$)

图5、6表明,没有反馈控制时,非零解存在多解现象,因此讨论它们的稳定性是必要的。根据方程(7),非零解对应的Jacobi矩阵的特征值是下列方程的根:

$$\lambda^2 + 2m_2\lambda + n_2 = 0, \tag{14}$$

式中 $m_2 = -(f_{10} + 2a^2f_{11}), n_2 = 4a^2(f_{10}f_{11} + f_{20}f_{21}) + 4a^4(f_{11}^2 + f_{21}^2)$ 。根据Routh-Hurwitz准则,非零解是渐近稳定的,当且仅当 $m_2 > 0$ 和 $n_2 > 0$ 同时成立即下列条件满足时:

$$f_{10} + 2a^2f_{11} < 0, f_{10}f_{11} + f_{20}f_{21} + a^2(f_{11}^2 + f_{21}^2) > 0 \tag{15}$$

与零解的情况不同,非零解的稳定性不仅与原方程中线性项的系数和线性反馈的增益有关,还与非线性项的系数和非线性反馈的增益有关。根据式(15),图6中周期解的稳定性如下:对无控制的系统, $k > 3.237$ 时,只有一个稳定的解; $3.237 \geq k > 2.512$ 时,有一个稳定的解和一个不稳定的解; $2.512 \geq k > 2.275$ 时,两个解都不稳定。对线性反馈控制系统, $k > 1.94$ 时,只

有一个稳定的解; $1.94 \geq k > 0.7$ 时, 有一个稳定的解和一个不稳定的解; $0.7 \geq k > 0.6$ 时, 两个解都不稳定. 对复合反馈控制系统, $k > 1.9$ 时, 只有一个稳定的解; $1.9 \geq k \geq 1.76$ 时, 有一个稳定的解和一个不稳定的解.

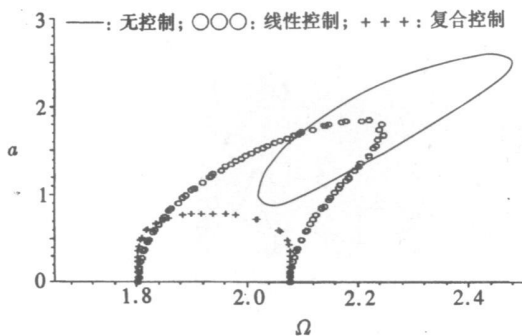


图 5 主参数共振激励频率_响应幅值曲线
($k = 2.5, \alpha = \gamma = 1.5, \beta = 1.0,$
 $g_p = g_d = 1, g_{n1} = g_{n2} = 2, \tau = 2$)

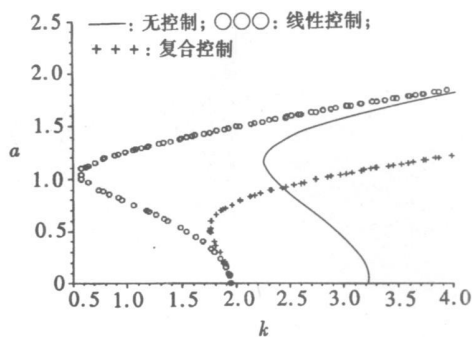


图 6 主参数共振激励幅值_响应幅值曲线
($\Omega = 2.05, \alpha = \gamma = 1.5, \beta = 1,$
 $g_p = g_d = 1, g_{n1} = g_{n2} = 1, \tau = 2$)

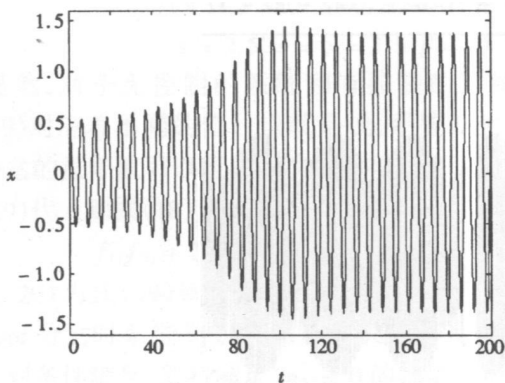


图 7 线性反馈控制系统的周期响应
($(x_0, \dot{x}_0) = (0.5, 0), \Omega = 2.05, k = 1.5,$
 $\alpha = \gamma = 1.5, \beta = 1, g_p = g_d = 1, \tau = 2$)

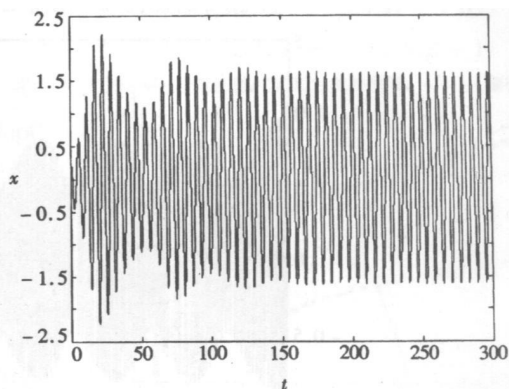


图 8 无控制系统的周期响应
($(x_0, \dot{x}_0) = (0.35, 0), \Omega = 2.05,$
 $k = 3.1, \alpha = \gamma = 1.5, \beta = 1$)

图 7~ 图 12 是直接对方程(3)进行数值积分的结果, 它们与解析结果相当吻合. 例如如图 6 中, 当 $k = 1.5$ 时线性反馈控制系统稳态响应振幅的两个值为 0.5267 和 1.3896; 当 $k = 3.1$ 时无反馈控制系统稳态响应振幅的两个值为 0.3423 和 1.6175. 图 7 中的数值仿真结果表明, $k = 1.5$ 时线性反馈控制系统初始激励为 0.5267 的稳态响应振幅为 1.3896; 图 8 中的数值仿真结果表明, $k = 3.1$ 时无反馈控制系统初始激励为 0.3423 的稳态响应振幅为 1.6175. 所以 $k = 1.5$ 时线性反馈控制系统稳态响应振幅的两个值中 0.5267 是不稳定的而 1.3896 是稳定的; 当 $k = 3.1$ 时无反馈控制系统稳态响应振幅的两个值中 0.3423 是不稳定的而 1.6175 是稳定的. 容易验证, 这两个稳定的解恰好满足周期解稳定条件(15). 当 $k = 0.6$ 时线性反馈控制系统稳态响应振幅的两个值为 0.9843 和 1.1134; 当 $k = 2.5$ 时无反馈控制系统稳态响应振幅的两个值为 0.8668 和 1.4078. 图 9、图 10 中的数值仿真结果分别表明, $k = 0.6$ 时线性反馈控制系统初始激励为 0.9843 和 1.1134 的稳态响应均为拟周期响应; 图 11、图 12 中的数值仿真结果分别表明 $k = 2.5$ 时无反馈控制系统初始激励为 0.8668 和 1.4078 的稳态响应亦均为拟

周期响应。所以 $k = 0.6$ 时线性反馈控制系统稳态响应振幅的两个解和 $k = 2.5$ 时无反馈控制系统稳态响应振幅的两个解都是不稳定的。

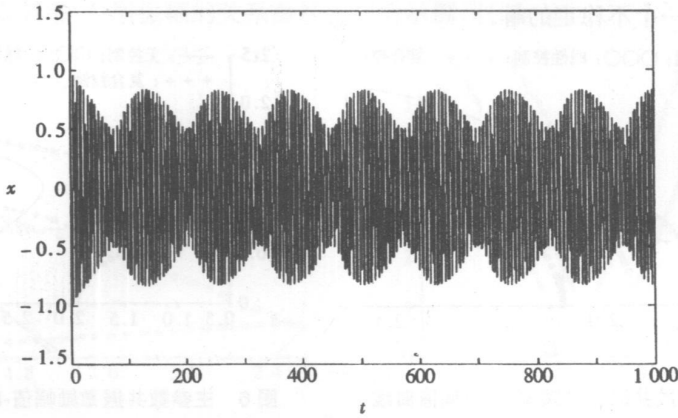


图 9 线性反馈控制系统的拟周期响应 $((x_0, \dot{x}_0) = (0.98, 0)$,
 $\Omega = 2.05, k = 0.6, \alpha = \gamma = 1.5, \beta = 1, g_p = g_d = 1)$

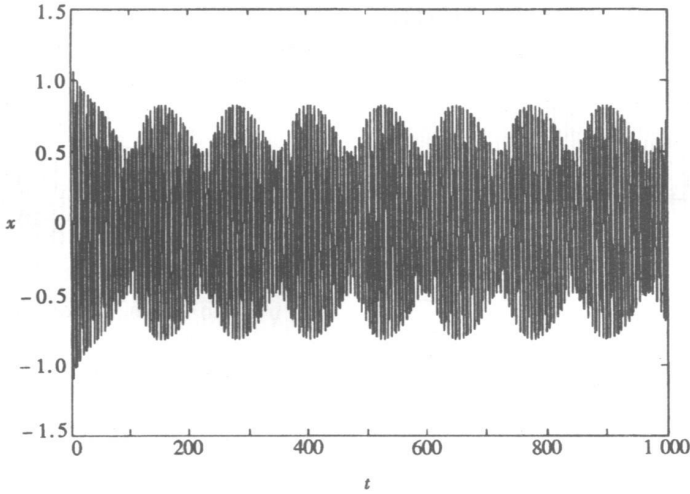


图 10 线性反馈控制系统的拟周期响应 $((x_0, \dot{x}_0) = (1.11, 0)$,
 $\Omega = 2.05, k = 0.6, \alpha = \gamma = 1.5, \beta = 1, g_p = g_d = 1)$

周期解失去稳定性的途径之一是鞍结分岔。相应的条件是在式(14)中 $m_2 > 0$ 和 $n_2 = 0$ 即

$$f_{10} + 2a^2 f_{11} < 0, f_{10} f_{11} + f_{20} f_{21} + a^2 (f_{11}^2 + f_{21}^2) = 0 \tag{16}$$

容易验证, 式(16)的第2式恰为响应振幅_激励振幅 (a_k) 曲线的拐点, 所以控制鞍结分岔的发生可以通过消除 a_k 曲线的拐点实现。在式(16)的第2式中令 $a = 0$ 得

$$f_{10} f_{11} + f_{20} f_{21} = 0, \tag{17}$$

上式可以作为抑制鞍结分岔的判据。然而, 对于一个 $\sigma \geq 0$ 的无控制系统而言, a_k 曲线上响应振幅为零对应的拐点是不存在的, 所以无控制系统的鞍结分岔是不可避免的, 但是通过适当的反馈控制却可以抑制鞍结分岔的发生^[13, 15]。图 13 中, 反馈控制系统的参数关系满足式(17), 曲线的拐点处 $a = 0$, 所以不会发生鞍结分岔。

类似地, 稳态响应发生 Hopf 分岔的条件是 $m_2 = 0$ 和 $n_2 > 0$, 即

$$f_{10} + 2a^2 f_{11} = 0, f_{11} f_{10} + f_{21} f_{20} + a^2 (f_{11}^2 + f_{21}^2) > 0 \quad (18)$$

式(18)的第1式说明发生 Hopf 时, 稳态响应的幅值由下式决定:

$$a^2 = -f_{10} / (2f_{11}) \quad (19)$$

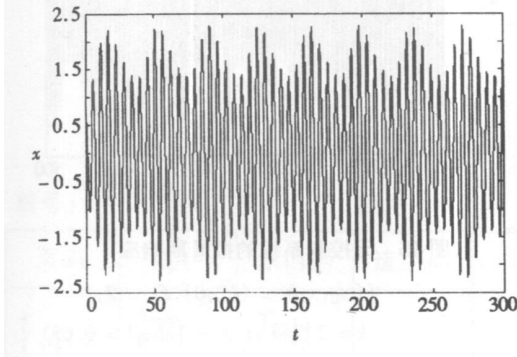


图 11 无控制系统的拟周期响应

$$(x_0, \lambda_0) = (0.85, 0), \Omega = 2.05, \\ k = 2.5, \alpha = \gamma = 1.5, \beta = 1)$$

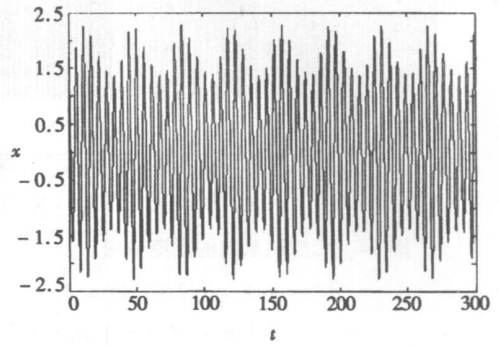


图 12 无控制系统的拟周期响应

$$(x_0, \lambda_0) = (1.4, 0), \Omega = 2.05, \\ k = 2.5, \alpha = \gamma = 1.5, \beta = 1)$$

显然, 对于无控制的系统和有控制的系统, 式(19)对应着不同的值。也就是说, 系统发生 Hopf 分岔的振幅值可以通过反馈控制得到修正。把式(19)代入到式(18)的第2式, 可得

$$f_{11} f_{10} + 2f_{21} f_{20} - f_{10} f_{21}^2 / f_{11} > 0 \quad (20)$$

式(20)为式(19)确定的幅值对应的周期解发生 Hopf 分岔时系统参数应满足的关系。所以只要下列条件满足, 那些满足 $m_2 = 0$ 的幅值对应的周期解就不会发生 Hopf 分岔:

$$f_{11} f_{10} + 2f_{21} f_{20} - f_{10} f_{21}^2 / f_{11} \leq 0 \quad (21)$$

周期解的 Hopf 分岔将导致拟周期解^[16,17], 这可以通过图 14、图 15 的数值仿真结果得到验证。例如, 对于一个无反馈的系统, 若 $\alpha = \gamma$, 则由式(19)和(20)可得 $a = \sqrt{2}$ 和 $\beta > \gamma/3$ 。图 14 和图

15 分别说明 $\beta = \gamma/3$ 时振幅为 $a = \sqrt{2}$ 的周期解是稳定的但 $\beta > \gamma/3$ 时却是不稳定的。如果只考虑线性反馈控制, 仍有可能发生 Hopf 分岔。例如 $g_p = 1, g_q = 0.3$ 时, 对 $\alpha = \gamma = 1.5, \Omega = 2, \tau = 2$, 由式(19)决定的发生 Hopf 分岔的周期解的振幅为 0.788。当 $\beta = 1.5$ 时此值满足式(18)的第2式, 但当 $\beta = 0.3$ 时此值不满足式(18)的第2式。图 16 和图 17 分别说明此振幅对应的不稳定的周期解当 $\beta = 1.5$ 时由于 Hopf 分岔而趋于一个拟周期解; 当 $\beta = 0.3$ 时趋于一个振幅为 $a = 1.866$ 的周期解。

显然若式(19)的右边小于或等于零, 则不可能发生周期解的 Hopf 分岔。所以式(19)不仅可以用来判断何处发生 Hopf 分岔, 还可以作为抑制周期解发生 Hopf 分岔的条件。

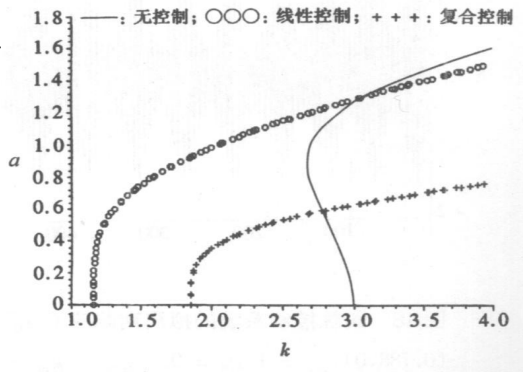


图 13 周期响应鞍节分岔的控制

$$(\Omega = 2, \alpha = \gamma = 1.5, \beta = 1; \text{线性控制: } g_p = 1, \\ g_q = 0.172, \tau = 2; \text{复合控制: } g_p = g_d = 1, g_{m1} = \\ 1, g_{m2} = 2.995, \tau = 3)$$

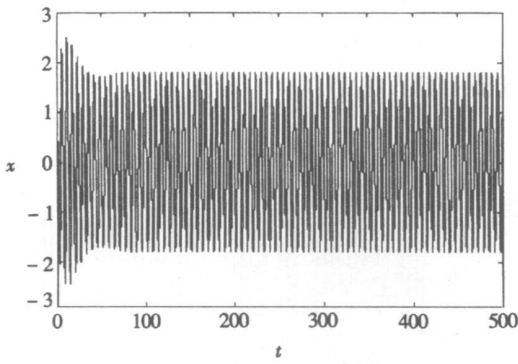


图 14 无控制系统的周期响应

$$\begin{aligned} ((x_0, \dot{x}_0) &= (\sqrt{2}, 0), \Omega = 2, \\ k &= 2.5, \alpha = \gamma = 1.5, \beta = 0.5) \end{aligned}$$

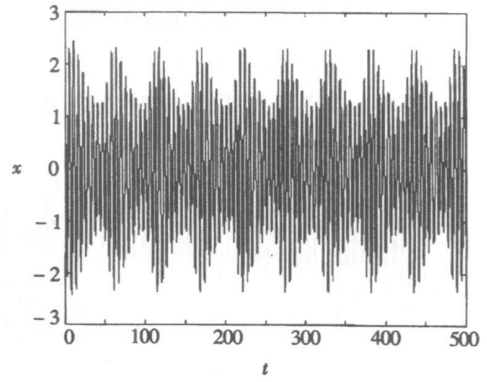


图 15 无控制系统的拟周期响应

$$\begin{aligned} ((x_0, \dot{x}_0) &= (\sqrt{2}, 0), \Omega = 2, \\ k &= 2.5, \alpha = \gamma = 1.5, \beta = 0.65) \end{aligned}$$

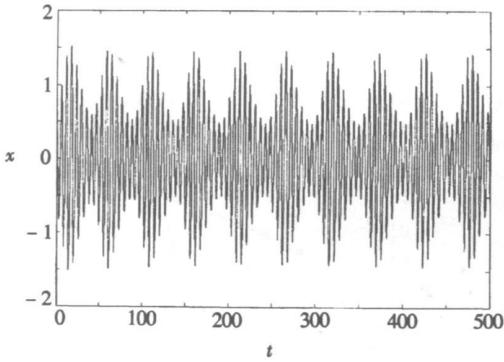


图 16 线性控制系统的拟周期响应 $((x_0, \dot{x}_0) = (0.788, 0), g_p = 1, g_d = 0.3, g_{n1} = g_{n2} = 0, \alpha = \gamma = \beta = 1.5, \Omega = 2, k = 2.5, \tau = 2)$

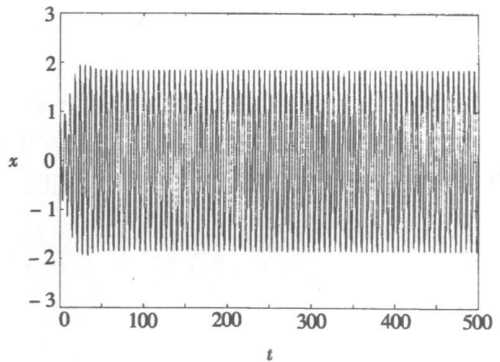


图 17 线性控制系统的周期响应 $((x_0, \dot{x}_0) = (0.788, 0), g_p = 1, g_d = 0.3, g_{n1} = g_{n2} = 0, \alpha = \gamma = 1.5, \beta = 0.3, \Omega = 2, k = 2.5, \tau = 2)$

4 讨论与结论

本文研究了含时滞的非线性位移反馈和非线性速度反馈的 Duffing-Van der Pol 振子的主参数共振响应特性。基于弱非线性、弱反馈控制、弱参数激励和小阻尼假设，依据平均法和对时滞反馈控制项 Taylor 展开的截断首先给出了确定稳态响应振幅和相位的平均方程。虽然在形式上，平均方程与无控制系统的平均方程相似，但由于反馈增益和时滞的出现，系统的动力学行为要丰富得多。

理论分析表明，尽管无控制系统的零解总是不稳定的，但调节反馈控制的增益和时滞可使控制系统的零解稳定。非零的稳态响应可能通过鞍结分岔和 Hopf 分岔失去稳定性，而前者刚好发生在参数激励振幅-主参数共振响应振幅曲线的拐点。数值计算的结果验证了周期解由于发生 Hopf 分岔而导致的拟周期响应。周期解的鞍结分岔和 Hopf 分岔的抑制都可以通过反馈控制实现，选择合适的反馈增益和时滞，可以避免周期解的分岔。

研究表明反馈控制的增益与时滞对系统的动力学行为有重要影响,且理论分析与数值仿真的结果相当吻合。

[参 考 文 献]

- [1] Ferdinand Verhulst. Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- [2] Jackson E Atlee. Perspectives of Nonlinear Dynamics [M]. New York: Cambridge University Press, 1991.
- [3] Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillation and Bifurcation of Vector Fields [M]. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [4] Holmes P, Rand D. Phase portraits and bifurcation of the nonlinear oscillator: $\ddot{x} + (\alpha + \gamma x^2)\dot{x} + \beta x + \delta x^3 = 0$ [J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 1980, **15**(6): 449—458.
- [5] Tsuda Y, Tamura H, Sueoka A, et al. Chaotic behaviour of a nonlinear vibrating system with a retarded argument [J]. JSME International Journal, Series III, 1992, **35**(2): 259—267.
- [6] Szemplinska-Stupnicka, Rudowski J. The coexistence of periodic, almost-periodic and chaotic attractions in the Van der Pol-Duffing oscillator [J]. Journal of Sound and Vibration, 1997, **199**(2): 165—175.
- [7] Maccari Attilio. Approximate solution of a class of nonlinear oscillators in resonance with a periodic excitation [J]. Nonlinear Dynamics, 1998, **15**(4): 329—343.
- [8] Algaba A, Fernandez-Sanchez E, Freire E, et al. Oscillation-sliding in a modified Van der Pol-Duffing electronic oscillator [J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, **249**(5): 899—907.
- [9] XU Jian, Chung K W. Effects of time delayed position feedback on a Van der Pol-Duffing oscillator [J]. Physica D, 2003, **180**(1): 17—39.
- [10] Moukam Kakmeni F M, Bowong S, Tchawoua C, et al. Strange attractors and chaos control in a Duffing-Van der Pol oscillator with two external periodic forces [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, **277**(4/5): 783—799.
- [11] 陈予恕. 非线性振动系统的分叉和混沌理论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.
- [12] Fofana M S, Ryba P B. Prametric stability of nonlinear time delay equations [J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 2004, **39**(1): 79—91.
- [13] Ji J C, Leung A Y T. Bifurcation control of parametrically excited Duffing system [J]. Nonlinear Dynamics, 2002, **27**(4): 411—417.
- [14] Hairer E, Norsett S P, Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
- [15] Hiroshi Yabuno. Bifurcation control of parametrically excited Duffing system by a combined linear-plus-nonlinear feedback control [J]. Nonlinear Dynamics, 1997, **12**(3): 263—274.
- [16] Ji J C, Hansen C H. Nonlinear oscillations of a rotor in active magnetic bearings [J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, **240**(4): 599—612.
- [17] 丁千, 陈予恕, 叶敏, 等. 一类非自治滞后-自激系统的主共振与锁模现象 [J]. 力学学报, 2002, **34**(1): 123—130.

Response of a Parametrically Excited Duffing Van der Pol Oscillator With Delayed Feedback

LI Xin_ye¹, CHEN Yu_shu², WU Zhi_qiang², SONG Tao³

(1. School of Mechanical Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, P. R. China;

2. School of Mechanical Engineering, Tianjin University,
Tianjin 300072, P. R. China;

3. Department of Graduate Student, Shandong Institute of Architecture and Engineering,
Jinan 250014, P. R. China)

Abstract: The dynamical behaviour of a parametrically excited Duffing Van der Pol oscillator under linear_plus_nonlinear state feedback control with a time delay is concerned. By means of the method of averaging together with truncation of Taylor expansions, two slow_flow equations on the amplitude and phase of response were derived for the case of principal parametric resonance. It is shown that the stability condition for the trivial solution is only associated with the linear terms in the original systems besides the amplitude and frequency of parametric excitation. And the trivial solution can be stabilized by appreciation choice of gains and time delay in feedback control. Different from the case of the trivial solution, the stability condition for nontrivial solutions is also associated with nonlinear terms besides linear terms in the original systems. It is demonstrated that nontrivial steady state responses may lose their stability by saddle_node (SN) or Hopf bifurcation (HB) as parameters vary. The simulations, obtained by numerically integrating the original system, are in good agreement with the analytical results.

Key words: Duffing_Van der Pol oscillator; principal parametric resonance; time delay; feedback control; bifurcation