文章编号: 1000_0887(2006) 12_1405_12
c 应用数学和力学编委会, ISSN 1000_0887

乘积 FC_空间内涉及一较好容许集值映象的优化映象族的极大元及其应用*

丁协平

(四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066)

(我刊编委 丁协平来稿)

摘要: 引入了涉及一较好容许集值映象的映一拓扑空间到一有限连续拓扑空间(简称, FC_空间) 的优化映象族· 在乘积 FC_空间的非紧设置下对这类优化映象族证明了某些极大元存在性定理· 在乘积 FC_空间内给出了对不动点和极小极大不等式组的应用· 这些定理改进、统一和推广了最近文献中的很多重要结果·

关 键 词: 极大元; $G_{\mathscr{B}}$_优化映象族; 不动点; 极小极大不等式组; 乘积FC_空间

中图分类号: O177.91 文献标识码: A

1 引言和预备知识

设 X 和 Y 是非空集· 分别用 2^Y 和 $\langle X\rangle$ 表示 Y 的所有子集的族和 X 的所有非空有限子集的族· 设 Δ_n 是具有顶点 $e_0, e_1, \cdots, e_n$ 的 n_维标准单型· 如果 J 是 $\{0, 1, \cdots, n\}$ 的非空子集, 我们用 Δ_J 表示顶点 $\{e_j: j\in J\}$ 的凸包·

下面的有限连续拓扑空间(简称, FC_空间) 概念由 Ding[1] 引入·

定义 1.1 称 (Y, φ_N) 是一 FC_空间, 如果 Y 是一拓扑空间且对每一 $N=\{y_0, \cdots, y_n\}\in\langle Y\rangle$ 其中 N 的某些元可以相同, 存在一连续映象 $\varphi_N: \Delta_n\to Y$· 称 $(Y, \{\varphi_N\})$ 的子集 D 是 Y 的 FC_子空间, 如果对每一 $N=\{y_0, \cdots, y_n\}\in\langle Y\rangle$ 和每一 $\{y_{i_0}, \cdots, y_{i_k}\}\subset N\cap D$, $\varphi_N(\Delta_k)\subset D$, 其中 $\Delta_k=\mathrm{co}(\{e_{i_j}: j=0, \cdots, k\})$·

我们强调 FC_空间是一没有任何凸性结构的拓扑空间· FC_空间的主要例子是拓扑矢量空间的凸子集, Lassonde[2] 的凸空间, Horvath[3] 的 C_空间(或 H_空间) , Park 和 Kim[4] 的 G_凸空间, Ben_El_Mechaiekh 等人[5] 的 L_凸空间和很多具有抽象凸性结构的拓扑空间·

在本文中, 我们引入了涉及集值映象 $F\in\mathscr{B}(Y, X)$ 的一类新的 $G_{\mathscr{B}}$_优化映象族· 在 FC_空间的非紧设置下, 对 $G_{\mathscr{B}}$_优化映象族证明了某些新的极大元存在性定理· 在 FC_空间内给出了对不动点和极小极大不等式组的某些应用· 这些定理改进、统一和推广了上述文献

* 收稿日期: 2005_04_16; 修订日期: 2006_08_10
资金项目: 四川省教育厅重点科研基金资助项目(2003A081; SZD0406)
作者简介: 丁协平(1938 —) , 男, 自贡人, 教授(Tel: + 86_28_84780952; E_mail: xieping_ding@ hotmail.com) .

中很多重要的已知结果.

设X是一拓扑空间和(Y, φ_N)是一FC_空间. 较好允许映象类$\mathscr{B}(Y, X)$由Ding[1]引入如下: $F \in \mathscr{B}(Y, X) \Leftrightarrow F: Y \to 2^X$是一具有紧值的上半连续的集值映象, 使得对任何$N = \{y_0, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$和任何连续映象$\psi: F(\varphi_N(\Delta_n)) \to \Delta_n$, 复合映象$\psi \circ F|_{\varphi_N(\Delta_n)} \circ \varphi_N: \Delta_n \to 2^{\Delta_n}$有不动点.

显然我们的较好允许映象类$\mathscr{B}(Y, X)$包含了在文献[6~8]中引入的相应的较好允许映象类作为特殊情形.

引理 1.1[1] 设I是任何指标集. 对每一$i \in I$, 令(Y_i, φ_{N_i})是一FC_空间. 令$Y = \prod_{i \in I} Y_i$和对每一$N = \{y_0, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$, 令$\varphi_N = \prod_{i \in I} \varphi_{N_i}$其中$N_i = \pi_i(N)$和$\pi_i$是$Y$到$Y_i$上的投影. 则$(Y, \{\varphi_N\})$也是一FC_空间.

设X是一拓扑空间和D是X的一非空子集. 我们用$\mathrm{int} D$和D分别表D在X内的内部和闭包. 称D在X内是紧开(紧闭)的, 如果对X的每一非空紧子集K, $D \cap K$在K内是开(闭)的. 显然X的每一开(闭)子集在X内是紧开(紧闭)的.

设X是一拓扑空间和I是有限或无限指标集. 对每一$i \in I$, 设(Y_i, φ_{N_i})是一FC_空间. 设(Y, φ_N)是如在引理1.1内定义的FC_空间和$F \in \mathscr{B}(Y, X)$. 对每一$i \in I$, 令$A_i: X \to 2^{Y_i}$是一集值映象.

1) 称$A_i: X \to 2^{Y_i}$是一$G_{\mathscr{B}}$_映象, 如果

(a) 对每一$N = \{y_0, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$和$M = \{y_{i_0}, \cdots, y_{i_k}\} \subset N$,

$$F(\varphi_N(\Delta_k)) \cap (\bigcap_{y \in M} A_i^{-1}(\pi_i(y))) = \varnothing, \text{其中 } \Delta_k = \mathrm{co}\{e_{i_j}: j = 0, \cdots, k\};$$

(b) $A_i^{-1}: Y_i \to 2^X$是紧开值的.

2) 称$A_{x,i}: X \to 2^{Y_i}$是A_i在点$x \in X$的$G_{\mathscr{B}}$_优化子, 如果$A_{x,i}$是一$G_{\mathscr{B}}$_映象且存在x在X内的一开邻域$N(x)$, 使得对一切$z \in N(x)$, $A_i(z) \subset A_{x,i}(z)$.

3) 称A_i是$G_{\mathscr{B}}$_优化的, 如果对每一$x \in X$, 存在A_i在点x的$G_{\mathscr{B}}$_优化子$A_{x,i}$.

4) 称$\{A_i\}_{i \in I}$是一$G_{\mathscr{B}}$_映象族(或$G_{\mathscr{B}}$_优化映象族), 如果对每一$i \in I$, $A_i: X \to 2^{Y_i}$是一$G_{\mathscr{B}}$_映象(或$G_{\mathscr{B}}$_优化映象).

显然每一$G_{\mathscr{B}}$_映象族必是$G_{\mathscr{B}}$_优化映象族. $G_{\mathscr{B}}$_映象族和$G_{\mathscr{B}}$_优化映象族概念推广了文献[7,8]中的相应概念从G_凸空间到FC_空间. 如果$F = S$是一单值映象和对每一$x \in X$, $A_i(x)$是Y_i的一FC_子空间, 则条件$y_i \notin A_i(S(y))$对每一$y \in Y$成立, 蕴含1)内条件(a)成立. 的确, 如果(a)不真, 则存在$N = \{y_0, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$, $M = \{y_{i_0}, \cdots, y_{i_k}\} \subseteq N$, 和$y \in \varphi_N(\Delta_k)$使得$F(y) = S(y) \in \bigcap_{y \in M} A_i^{-1}(\pi_i(y))$, 且因此$y_i = \pi_i(y) \in A_i(S(y))$对每一$y \in M$成立, 即是, $\pi_i(M) \subset A_i(S(y))$. 从$y \in \varphi_N(\Delta_k)$推得$y_i = \pi_i(y) \in \varphi_{N_i}(\Delta_k)$, 其中$N_i = \pi_i(N)$. 从$A_i(S(y))$是$Y_i$的FC_子空间推得$y_i = \pi_i(y) \in \varphi_{N_i}(\Delta_k) \subset A_i(S(y))$, 这与条件$y_i \notin A_i(S(y))$对每一$y \in Y$成立相矛盾. 因此由Deguire等人[9, p.934]引入的每一L_S_映象(或, L_S_优化映象)必是一$G_{\mathscr{B}}$_映象(或, $G_{\mathscr{B}}$_优化映象). 其逆一般不真, 参见文献[10, p.69]的例子. 如果$X = Y$, 则$G_{\mathscr{B}}$_映象和$G_{\mathscr{B}}$_优化映象是Shen[10, p.69]在H_空间内引入的H_对应和H_优化对应的推广.

2 极大元的存在性

引理 2.1 设X是Hausdorff仿紧正则拓扑空间和I是任何指标集. 对每一$i \in I$, 设$(Y_i,$

$\varphi_{N_i})$ 是一FC_空间和 $Y=\prod_{i\in I}Y_i$ 是如在引理1.1内定义的FC_空间• 设 $F\in\mathscr{B}(Y,X)$ 和对每一 $i\in I$, $A_i: X\to 2^{Y_i}$ 使得 $\{A_i\}_{i\in I}$ 是一 $G_{\mathscr{B}}$_优化映象族• 则存在一 $G_{\mathscr{B}}$_映象族 $B_i: X\to 2^{Y_i}$, $i\in I$, 使得对每一 $i\in I$ 和 $x\in X$, $A_i(x)\subset B_i(x)$•

证明 对任意固定的 $i\in I$, 因为 A_i 是 $G_{\mathscr{B}}$_优化的, 对每一 $x\in X$, 存在 x 在 X 内的一开邻域 $N(x)$ 和一 $G_{\mathscr{B}}$_映象 $A_{x,i}: X\to 2^{Y_i}$ 使得

(a) 对每一 $z\in N(x)$, $A_i(z)\subset A_{x,i}(z)$;

(b) 对每一 $N=\{y_0,\cdots,y_n\}\in\langle Y\rangle$ 和每一 $M=\{y_{i_0},\cdots,y_{i_k}\}\subseteq N$,
$F(\varphi_N(\Delta_k))\cap(\bigcap_{y\in M}A_{x,i}^{-1}(\pi_i(y)))=\varnothing$;

(c) 对每一 $y_i\in Y_i$, $A_{x,i}^{-1}(y_i)$ 在 X 内是紧开的•

因为 X 是仿紧和正则的, 由 Dugundji[11] 的定理Ⅷ.1.4, X 的开覆盖 $\{N(x): x\in X\}$ 有一开精确局部有限精细 $\{O(x): x\in X\}$, 且因为 X 是正规的, 对每一 $x\in X$, $\overline{O(x)}\subseteq N(x)$• 对每一 $x\in X$, 定义映象 $B_{x,i}: X\to 2^{Y_i}$ 如下:

$$B_{x,i}(z)=\begin{cases}A_{x,i}(z), & \text{当 } z\in\overline{O(x)},\\ Y_i, & \text{当 } z\in X\setminus\overline{O(x)}\text{•}\end{cases}$$

则对每一 $y_i\in Y_i$, 我们有

$$\begin{aligned}B_{x,i}^{-1}(y_i)&=\{z\in\overline{O(x)}: y_i\in A_{x,i}(z)\}\cup\{z\in X\setminus\overline{O(x)}: y_i\in Y_i\}=\\&(A_{x,i}^{-1}(y_i)\cap\overline{O(x)})\cup(X\setminus\overline{O(x)})=\\&[A_{x,i}^{-1}(y_i)\cup(X\setminus\overline{O(x)})]\cap[\overline{O(x)}\cup(X\setminus\overline{O(x)})]=\\&A_{x,i}^{-1}(y_i)\cup(X\setminus\overline{O(x)})\text{•}\end{aligned}$$

因此由(c), $B_{x,i}^{-1}(y_i)$ 在 X 内是紧开的• 现在定义 $B_i: X\to 2^{Y_i}$ 如下:

$$B_i(z)=\bigcap_{x\in X}B_{x,i}(z),\qquad \forall z\in X\text{•}$$

我们主张 B_i 是一 $G_{\mathscr{B}}$_映象且对每一 $z\in X$, $A_i(z)\subset B_i(z)$• 的确, 对 X 的任何非空紧子集 C 和对每一满足 $B_i^{-1}(y_i)\cap C\neq\varnothing$ 的 $y_i\in Y_i$, 令 $u\in B_i^{-1}(y_i)\cap C$ 是任意固定的• 因为 $\{O(x): x\in X\}$ 是局部有限的, 存在 u 在 X 内的一开邻域 V_u 使得 $\{x\in X: V_u\cap O(x)\neq\varnothing\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是一有限集• 如果 $x\notin\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 则 $\varnothing=V_u\cap O(x)=V_u\cap\overline{O(x)}$ 且因此对一切 $z\in V_u$, $B_{x,i}(z)=Y_i$, 这蕴含对一切 $z\in V_u$, $B_i(z)=\bigcap_{x\in X}B_{x,i}(z)=\bigcap_{j=1}^{n}B_{x_j,i}(z)$• 由此推得对每一 $y_i\in Y_i$,

$$\begin{aligned}B_i^{-1}(y_i)&=\{z\in X: y_i\in B_i(z)\}\supseteq\{z\in V_u: y_i\in B_i(z)\}=\\&\{z\in V_u: y_i\in\bigcap_{j=1}^{n}B_{x_j,i}(z)\}=V_u\cap\left(\bigcap_{j=1}^{n}B_{x_j,i}^{-1}(y_i)\right)\text{•}\end{aligned}$$

令 $M_u=(V_u\cap C)\cap[\bigcap_{j=1}^{n}B_{x_j,i}^{-1}(y_i)\cap C]$, 则 M_u 是 u 在 C 内的一开邻域使得 $M_u\subset B_i^{-1}(y_i)\cap C$ 且因此 $B_i^{-1}(y_i)$ 在 X 内是紧开的• 另一方面, 对每一 $N=\{y_0,\cdots,y_n\}\in\langle Y\rangle$ 和每一 $M=\{y_{i_0},\cdots,y_{i_k}\}\subset N$, 如果 $t\in\bigcap_{y\in M}B_i^{-1}(\pi_i(y))$, 则 $\pi_i(M)\subset B_i(t)$• 因为存在 $x_0\in X$ 使得 $t\in\overline{O(x_0)}$ 和 $\pi_i(M)\subset B_i(t)\subset B_{x_0,i}(t)=A_{x_0,i}(t)$, 我们有 $t\in\bigcap_{y\in M}A_{x_0,i}^{-1}(\pi_i(y))$ 且因此由(b), $t\notin F(\varphi_N(\Delta_k))$• 因此我们有

$$F(\varphi_N(\Delta_k))\cap(\bigcap_{y\in M}B_i^{-1}(\pi_i(y)))=\varnothing\text{•}$$

这就证明了 B_i 是一 $G_{\mathscr{B}}$_映象• 对每一 $z\in X$, 如果 $y\notin B_i(z)$, 则存在 $x_0\in X$ 使得 $y\notin B_{x_0,i}(z)=A_{x_0,i}(z)$ 和 $z\in\overline{O(x_0)}\subseteq N(x_0)$• 从(a) 推得 $y\notin A_i(z)$• 因此对一切 $z\in X$,

我们有 $A_i(z) \subset B_i(z)$, 证毕.

注 2.1 引理 2.1 推广了 Ding[7] 的引理 2.1 从 G_凸空间到 FC_空间和从下列方面推广了 Deguire 等人[9] 的引理 5: 1) 从拓扑矢量空间的凸子集的乘积到没有任何凸性结构的 FC_空间的乘积空间; 2) 从 L_S _优化映象族到 $G_{\mathscr{B}}$ _优化映象族.

定理 2.1 设 X 是紧 Hausdorff 拓扑空间, $(Y, \{\varphi_N\})$ 是 FC_空间, $F \in \mathscr{B}(Y, X)$ 和 $A: X \to 2^Y$ 是 $G_{\mathscr{B}}$ _映象, 则存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $A(\hat{x}) = \varnothing$.

证明 假设结论失效, 我们有 $X = \bigcup_{y \in Y} A^{-1}(y)$. 因为 X 是紧的和 $A^{-1}: Y \to 2^X$ 是紧开值的, 我们有 $\{A^{-1}(y)\}_{y \in Y}$ 是 X 的一开覆盖且存在 $N = \{y_0, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$ 使得 $X = \bigcup_{i=0}^n A^{-1}(y_i)$. 令 $\{\psi_i\}_{i=0}^n$ 是从属于此开覆盖 $\{A^{-1}(y_i)\}_{i=0}^n$ 的连续单位分解. 则对每一 $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$ 和 $x \in X$,

$$\psi_i(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in A^{-1}(y_i). \tag{1}$$

因为 (Y, φ_N) 是 FC_空间, 存在一连续映象 $\varphi_N: \Delta_n \to Y$. 定义一映象 $\psi: F(\varphi_N(\Delta_n)) \to \Delta_n$ 如下:

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^n \psi_i(x) e_i, \qquad \forall x \in F(\varphi_N(\Delta_n)).$$

则 ψ 是连续的. 因为 $F \in \mathscr{B}(Y, X)$, 函数 $\psi \circ F|_{\varphi_N(\Delta_n)} \circ \varphi_N: \Delta_n \to \Delta_n$ 有不动点 $z \in \Delta_n$, 即 $z \in \psi \circ F|_{\varphi_N(\Delta_n)} \circ \varphi_N(z)$. 因此存在 $x \in F|_{\varphi_N(\Delta_n)} \circ \varphi_N(z)$ 使得

$$z = \psi(x) = \sum_{j \in J(x)} \psi_j(x) e_j \in \Delta_{J(x)},$$

其中 $J(x) = \{j \in \{0, \cdots, n\} : \psi_j(x) \neq 0\}$. 从 $G_{\mathscr{B}}$ _映象定义中的条件(a) 推得

$$x \in F|_{\varphi_N(\Delta_n)} \circ \varphi_N(z) \subset F(\varphi_N(\Delta_{J(x)})) \subset \bigcup_{j \in J(x)} (X \setminus A^{-1}(y_j)).$$

所以存在 $j_0 \in J(x)$ 使得 $x \notin A^{-1}(y_{j_0})$. 另一方面, 由 $J(x)$ 的定义, 我们有 $\psi_{j_0}(x) \neq 0$. 从(1) 式推得 $x \in A^{-1}(y_{j_0})$, 这是一矛盾. 因此必存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $A(\hat{x}) = \varnothing$.

定理 2.2 设 X 是紧 Hausdorff 拓扑空间和 (Y, φ_N) 是 FC_空间. 设 $F \in \mathscr{B}(Y, X)$ 和 $A: X \to 2^Y$ 是 $G_{\mathscr{B}}$ _优化映象. 则 A 有一极大元 $\hat{x} \in X$, 即 $A(\hat{x}) = \varnothing$.

证明 假设结论失效, 则对每一 $x \in X$, $A(x) \neq \varnothing$. 因为 A 是 $G_{\mathscr{B}}$ _优化的, 对每一 $x \in X$, 存在 x 在 X 内的开邻域 $N(x)$ 和一 $G_{\mathscr{B}}$ _映象 $A_x: X \to 2^Y$ 使得

(a) 对每一 $z \in N(x)$, $A(z) \subset A_x(z)$;

(b) 对每一 $N = \{y_0, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$ 和每一 $M = \{y_{i_0}, \cdots, y_{i_k}\} \subseteq N$,
$F(\varphi_N(\Delta_k)) \cap (\bigcap_{y \in M} A_x^{-1}(y)) = \varnothing$;

(c) $A_x^{-1}: Y \to 2^X$ 是紧开值的.

因为 X 是正则的, 对每一 $x \in X$, 令 $O(x)$ 是 x 在 X 内的开邻域使得 $\overline{O(x)} \subset N(x)$. 因为 X 是紧的和 $X = \bigcup_{x \in X} O(x)$, 存在 $x_1, \cdots, x_m \in X$ 使得 $X = \bigcup_{k=1}^m O(x_k)$. 对每一 $k \in \{1, \cdots, m\}$, 定义一映象 $B_k: X \to 2^Y$ 如下:

$$B_k(z) = \begin{cases} A_{x_k}(z), & \text{当 } z \in \overline{O(x_k)}, \\ Y, & \text{当 } z \in X \setminus \overline{O(x_k)}. \end{cases}$$

则对每一 $y \in Y$, 我们有

$$B_k^{-1}(y) = \{z \in \overline{O(x_k)} : y \in A_{x_k}(z)\} \cup \{z \in X \setminus \overline{O(x_k)} : y \in Y\} =$$

$$(A_{x_k}^{-1}(y) \cap \overline{O(x_k)}) \cup (X \setminus \overline{O(x_k)}) =$$
$$[A_{x_k}^{-1}(y) \cup (X \setminus \overline{O(x_k)})] \cap [\overline{O(x_k)} \cup (X \setminus \overline{O(x_k)})] =$$
$$A_{x_k}^{-1}(y) \cup (X \setminus \overline{O(x_k)}).$$

因为由(c), $A_{x_k}^{-1}: Y \to 2^X$ 是紧开值的, 显然 $B_k^{-1}: Y \to 2^X$ 也是紧开值的. 现在定义一映象 $B: X \to 2^Y$ 如下:

$$B(z) = \bigcap_{k=1}^{m} B_k(z), \qquad \forall z \in X.$$

我们主张 B 是一 $G_{\mathscr{B}}$_映象且对每一 $z \in X$, $A(z) \subset B(z)$. 显然, $B^{-1}: Y \to 2^X$ 是紧开值的. 另一方面, 对每一 $N = \{y_0, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$ 和每一 $M = \{y_{i_0}, \cdots, y_{i_k}\} \subset N$, 如果 $t \in \bigcap_{y \in M} B^{-1}(y)$, 则 $M \subset B(t)$. 因为存在 $k \in \{1, \cdots, m\}$ 使得 $t \in \overline{O(x_k)}$ 和 $M \subset B(t) \subset B_{x_k}(t) = A_{x_k}(t)$, 我们有 $t \in \bigcap_{y \in M} A_{x_k}^{-1}(y)$ 且因此由(b), $t \notin F(\varphi_N(\Delta_k))$. 所以我们有 $F(\varphi_N(\Delta_k)) \cap (\bigcap_{y \in M} B^{-1}(y)) = \emptyset$. 这就证明了 B 是一 $G_{\mathscr{B}}$_映象. 对每一 $z \in X$, 如果 $y \notin B(z)$, 则存在 $k \in \{1, \cdots, m\}$ 使得 $y \notin B_k(z) = A_{x_k}(z)$ 和 $z \in \overline{O(x_k)} \subset N(x_k)$. 从(a) 推得 $y \notin A(z)$. 因此我们有对一切 $z \in X$, $A(z) \subset B(z)$. 由定理 2.1, 存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $B(\hat{x}) = \emptyset$ 且因此 $A(\hat{x}) = \emptyset$. 证毕.

注 2.2 定理 2.2 在下列方面推广了 Deguire 等人[9] 的定理 1: 1) 从拓扑矢量空间的凸子集到没有任何凸性结构的 FC_空间; 2) 从 L_S_优化映象到 $G_{\mathscr{B}}$_优化映象.

定理 2.3 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间和 (Y, φ_N) 是 FC_空间. 设 $F \in \mathscr{B}(Y, X)$ 是一紧映象和 $A: X \to 2^Y$ 是 $G_{\mathscr{B}}$_优化映象. 则 A 有一极大元 $\hat{x} \in X$, 即 $A(\hat{x}) = \emptyset$.

证明 因为 F 是紧映象, 令 X_0 是 X 的紧子集使得 $F(Y) \subset X_0$. 考虑映象 A 在 X_0 上的限制, 即 $A|_{X_0}: X_0 \to 2^Y$ 也是 $G_{\mathscr{B}}$_优化的. 由定理 2.2, 存在 $\hat{x} \in X_0$ 使得 $A(\hat{x}) = \emptyset$.

注 2.3 定理 2.3 从几方面推广了 Deguire 等人[9] 的定理 2.

定理 2.4 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间, K 是 X 的非空紧子集和 (Y, φ_N) 是 FC_空间. 设 $F \in \mathscr{B}(Y, X)$ 和 $A: X \to 2^Y$ 是 $G_{\mathscr{B}}$_映象, 使得对每一 $N = \{y_0, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$, 存在 Y 的包含 N 的紧 FC_子空间 L_N, 使得对每一 $x \in F(L_N) \setminus K$, $L_N \cap A(x) \neq \emptyset$.
则存在 $\hat{x} \in K$ 使得 $A(\hat{x}) = \emptyset$.

证明 假设对一切 $x \in X$, $A(x) \neq \emptyset$, 则 $K \subseteq \bigcup_{y \in Y} A^{-1}(y)$. 因为 K 是紧的和每一 $A^{-1}(y)$ 是紧开的, 存在 $N = \{y_0, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$ 使得 $K \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} A^{-1}(y_i)$. 由假设, 存在 Y 的包含 N 的紧 FC_子空间 L_N, 使得对每一 $x \in F(L_N) \setminus K$, $L_N \cap A(x) \neq \emptyset$. 由此推得 $F(L_N) \setminus K \subseteq \bigcup_{y \in L_N} A^{-1}(y)$. 注意到 $N \subset L_N$, 我们有 $F(L_N) \subseteq \bigcup_{y \in L_N \cup N} A^{-1}(y) = \bigcup_{y \in L_N} A^{-1}(y)$. 因为 $F \in \mathscr{B}(Y, X)$, 容易看出 F 在 L_N 上的限制, $F|_{L_N} \in \mathscr{B}(L_N, F(L_N))$. 令 $X_0 = F(L_N)$. 因为 L_N 是 Y 的紧 FC_子空间, 从 Aubin 和 Ekeland[12] 的命题 3.1.11 推得 X_0 是 X 的紧子集. 考虑 A 在 X_0 上的限制 $A|_{X_0}$. 容易检验 $A|_{X_0}$ 也是 $G_{\mathscr{B}}$_优化映象, 其中 $F|_{L_N} \in \mathscr{B}(L_N, F(L_N))$. 由定理 2.2, 存在 $\hat{x} \in X_0 = F(L_N)$ 使得 $A(\hat{x}) = \emptyset$. 从假设对每一 $x \in F(L_N) \setminus K$, $L_N \cap A(x) \neq \emptyset$ 推得 $\hat{x} \in K$.

注 2.4 定理 2.4 推广了 Ding[7] 的定理 2.2 从 G_凸空间到没有任何凸性结构的 FC_空间. 定理 2.4 顺次

在下列方面推广了 Shen[10] 的定理 2.1: 1) 从 CH_空间到拓扑空间(定义域空间)和 FC_空间(值域空间); 2) 从 H_对应到 $G_{\mathscr{B}}$_映象; 3) 强制性条件比 Shen[10] 的相应结果中的条件更弱。定理 2.4 也从很多方面推广了 Yannelis 和 Prabhakar[13] 的定理 5.1, Ding 和 Tan[14] 的定理 1, Ding 等人[15] 的定理 1, Tulcea[16] 的定理 2, Toussaint[17] 的定理 2.2 以及 Borglin 和 Keiding[18] 的系 1。

定理 2.5 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间, K 是 X 的非空紧子集和 (Y, φ_N) 是 FC_空间。设 $F \in \mathscr{B}(Y, X)$ 和 $A: X \to 2^Y$ 是 $G_{\mathscr{B}}$_优化映象使得

(i) 存在 X 的一仿紧正则子集 E 使得 $\{x \in X: A(x) \neq \emptyset\} \subseteq E$;

(ii) 对每一 $N = \{y_0, \cdots, y_n\} \in \langle Y\rangle$, 存在 Y 的包含 N 的紧 FC_子空间 L_N, 使得对每一 $x \in F(L_N) \setminus K$, $L_N \cap A(x) \neq \emptyset$。

则存在 $\hat{x} \in K$ 使得 $A(\hat{x}) = \emptyset$。

证明 假设对每一 $x \in X$, $A(x) \neq \emptyset$, 则由(i)我们有 $X = E$ 是 Hausdorff 仿紧正则拓扑空间。由具有 I 是单点集的引理 2.1, 存在一 $G_{\mathscr{B}}$_映象 $B: X \to 2^Y$ 使得对每一 $x \in X$, $A(x) \subset B(x)$。从(ii)推得对每一 $x \in F(L_N) \setminus K$, $L_N \cap B(x) \neq \emptyset$。由定理 2.4, 存在 $x \in K$ 使得 $B(x) = \emptyset$ 且因此 $A(x) = \emptyset$。这与假设对每一 $x \in X$, $A(x) \neq \emptyset$ 相矛盾。所以存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $A(\hat{x}) = \emptyset$。条件(ii)蕴含 $\hat{x} \in K$。

注 2.5 定理 2.5 推广了 Ding[7] 的定理 2.4 从 G_空间到 FC_空间。定理 2.5 从下列方面统一和推广了 Shen[10] 的定理 2.1, 系 2.2 和定理 2.3: 1) 从 CH_空间到拓扑空间(定义域空间)和 FC_空间(值域空间); 2) 从 H_优化映象到 $G_{\mathscr{B}}$_优化映象; 3) 强制性条件(ii)比 Shen[10] 的相应结果中的条件更弱。定理 2.5 也推广了 Yannelis 和 Prabhakar[13] 的系 1, Ding 和 Tan[14] 的定理 1, Ding[19] 的定理 5.3 以及 Ding 和 Yuan[20] 的定理 2.3。

定理 2.6 设 X 是紧 Hausdorff 拓扑空间和 I 是任何指标集。对每一 $i \in I$, 设 (Y_i, φ_{N_i}) 是 FC_空间和设 $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ 使得 (Y, φ_N) 是如在引理 1.1 内定义的 FC_空间。设 $F \in \mathscr{B}(Y, X)$ 使得对每一 $i \in I$,

(i) $A_i: X \to 2^{Y_i}$ 是 $G_{\mathscr{B}}$_优化映象;

(ii) $\bigcup_{i \in I}\{x \in X: A_i(x) \neq \emptyset\} = \bigcup_{i \in I} \operatorname{int}\{x \in X: A_i(x) \neq \emptyset\}$。

则存在 $\hat{x} \in X$ 使得对每一 $i \in I$, $A_i(\hat{x}) = \emptyset$。

证明 对每一 $x \in X$, 令 $I(x) = \{i \in I: A_i(x) \neq \emptyset\}$。定义 $A: X \to 2^Y$ 如下:

$$A(x) = \begin{cases} \bigcap_{i \in I(x)} \pi_i^{-1}(A_i(x)), & \text{当 } I(x) \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{当 } I(x) = \emptyset。 \end{cases}$$

为了完成证明, 只需证明对某 $x \in X$, $I(x) = \emptyset$ 就足够了。假设对每一 $x \in X$, $I(x) \neq \emptyset$。任意固定 $x \in X$。因为 $I(x) \neq \emptyset$, 由(ii), $x \in \bigcup_{i \in I}\{z \in X: A_i(z) \neq \emptyset\} = \bigcup_{i \in I} \operatorname{int}\{z \in X: A_i(z) \neq \emptyset\}$。因此存在 $i_0 \in I$ 使得 $x \in \operatorname{int}\{z \in X: A_{i_0}(z) \neq \emptyset\}$。因为 A_{i_0} 是 $G_{\mathscr{B}}$_优化的, 存在 x 在 X 内的开邻域 $N(x)$ 和 A_{i_0} 在点 x 的 $G_{\mathscr{B}}$_优化子 A_{x, i_0} 使得

(a) 对每一 $z \in N(x)$, $A_{i_0}(z) \subset A_{x, i_0}(z)$;

(b) 对每一 $N = \{y_0, \cdots, y_n\} \in \langle Y\rangle$ 和 $M = \{y_{i_0}, \cdots, y_{i_k}\} \subset N$,

$$F(\varphi_N(\Delta_k)) \cap \left(\bigcap_{y \in M} A_{x, i_0}^{-1}(\pi_{i_0}(y))\right) = \emptyset;$$

(c) 对每一 $y_{i_0} \in Y_{i_0}$, 集 $A_{x, i_0}^{-1}(y_{i_0})$ 在 X 内是紧开的。

不失一般性, 我们能假设 $N(x) \subset \operatorname{int}\{z \in X: A_{i_0}(z) \neq \emptyset\}$。因此对每一 $z \in N(x)$, $A_{i_0}(z) \neq \emptyset$。定义 $B_{x, i_0}: X \to 2^Y$ 如下:

$$B_{x,i_0}(z)=\pi_{i_0}^{-1}(A_{x,i_0}(z)),\qquad \forall z\in X.$$

我们主张 B_{x,i_0} 是 A 在x 点的 $G_{\mathscr{B}}$_优化子. 的确,我们有

(a)′ 对每一$z\in N(x)$, $A(z)=\bigcap_{i\in I(z)}\pi_i^{-1}(A_i(z))\subset\pi_{i_0}^{-1}(A_{i_0}(z))\subset\pi_{i_0}^{-1}(A_{x,i_0}(z))=B_{x,i_0}(z)$;

(b)′ 对每一$N=\{y_0,\cdots,y_n\}\in\langle Y\rangle$和每一$M=\{y_{i_0},\cdots,y_{i_k}\}\subset N$, 如果

$$u\in\bigcap_{y\in M}B_{x,i_0}^{-1}(\pi_{i_0}(y)),$$

则$M\subset B_{x,i_0}(u)$. 因此 $\pi_{i_0}(M)\subset A_{x,i_0}(u)$, 即 $u\in\bigcap_{y\in M}A_{x,i_0}^{-1}(\pi_{i_0}(y))$ 且因此由(b), $u\notin F(\varphi_N(\Delta_k))$. 由此推得

$$F(\varphi_N(\Delta_k))\cap(\bigcap_{y\in M}B_{x,i_0}^{-1}(\pi_{i_0}(y)))=\varnothing;$$

(c)′ 对每一$y\in Y$, 由(c), 我们有 $B_{x,i_0}^{-1}(y)=A_{x,i_0}^{-1}(\pi_{i_0}(y))$ 在 X 内是紧开的.

因此 B_{x,i_0}是 A 在点x 的 $G_{\mathscr{B}}$_优化子和$A:X\to 2^Y$ 是 $G_{\mathscr{B}}$_优化的. 因此A 满足定理 2.2的所有条件. 由定理 2.2, 存在$\hat{x}\in X$ 使得$A(x)=\varnothing$, 即对一切 $i\in I$, $A_i(\hat{x})=\varnothing$. 由此推得 $I(\hat{x})=\varnothing$. 这与我们的假设相矛盾. 所以结论成立.

系 2.1 设X 是紧 Hausdorff 拓扑空间和 I 是任何指标集. 对每一 $i\in I$, 设(Y_i,φ_{N_i}) 是 FC_空间和设$Y=\prod_{i\in I}Y_i$ 使得(Y,φ_N) 是如在引理1.1内定义的FC_空间. 设$F\in\mathscr{B}(Y,X)$使得对每一 $i\in I$,

(ⅰ) 对每一$N=\{y_0,\cdots,y_n\}\in\langle Y\rangle$, $F(\varphi_N(\Delta_n))\cap(\bigcap_{y\in N}A_i^{-1}(\pi_i(y)))=\varnothing$;

(ⅱ) 对每一$y_i\in Y_i$, $A_i^{-1}(y_i)$ 在 X 内是开的.

则存在$\hat{x}\in X$ 使得对每一$i\in I$, $A_i(\hat{x})=\varnothing$.

证明 因为拓扑空间内每一开集必是紧开的,由条件(ⅰ)和(ⅱ), $\{A_i\}_{i\in I}$ 是一 $G_{\mathscr{B}}$_映象族且因此它也是一$G_{\mathscr{B}}$_优化映象族. 由(ⅱ), 对每一$i\in I$, 集$\{x\in X: A_i(x)\neq\varnothing\}$ 在X内是开的且因此定理 2.6的条件(ⅱ) 被满足. 由定理 2.6, 存在$\hat{x}\in X$ 使得对每一$i\in I$, $A_i(\hat{x})=\varnothing$.

由使用定理2.3和定理2.6证明中相同的论证,容易证明下面结果:

定理 2.7 设X 是 Hausdorff 拓扑空间和 I 是任何指标集. 对每一 $i\in I$, 设(Y_i,φ_{N_i}) 是 FC_空间和设$Y=\prod_{i\in I}Y_i$ 使得(Y,φ_N) 是如在引理1.1内定义的FC_空间. 设$F\in\mathscr{B}(Y,X)$ 是一紧映象使得对每一 $i\in I$,

(ⅰ) $A_i:X\to 2^{Y_i}$ 是 $G_{\mathscr{B}}$_优化映象;

(ⅱ) $\bigcup_{i\in I}\{x\in X: A_i(x)\neq\varnothing\}=\bigcup_{i\in I}\operatorname{int}\{x\in X: A_i(x)\neq\varnothing\}$.

则存在$\hat{x}\in X$ 使得对每一$i\in I$, $A_i(\hat{x})=\varnothing$.

注 2.6 定理2.7从下列方面推广了 Deguire 等人[9]的定理3: 1) 从拓扑矢量空间的凸子集到没有任何凸性结构的 FC_空间; 2) 从L_S_优化映象族到 $G_{\mathscr{B}}$_优化映象族.

定理 2.8 设X 是Hausdorff 拓扑空间, K 是X 的非空紧子集和I 是任何指标集. 对每一 $i\in I$, 令(Y_i,φ_{N_i}) 是 FC_空间和 $Y=\prod_{i\in I}Y_i$ 是如在引理1.1内定义的FC_空间. 设$F\in\mathscr{B}(Y,X)$ 和对每一 $i\in I$, $A_i:X\to 2^{Y_i}$ 使得,

(ⅰ) 对每一$N=\{y_0,\cdots,y_n\}\in\langle Y\rangle$和每一 $M=\{y_{i_0},\cdots,y_{i_k}\}\subset N$,

$$F(\varphi_N(\Delta_k))\cap(\bigcap_{y\in M}A_i^{-1}(\pi_i(y)))=\varnothing;$$

(ii) 对每一 $y_i \in Y_i$, $A_i^{-1}(y_i)$ 在 X 内是开的;

(iii) 对每一 $N_i \in \langle Y_i \rangle$, 存在 Y_i 的包含 N_i 的非空紧 FC_子空间 L_{N_i} 和对每一 $x \in X \setminus K$, 存在 $i \in I$ 满足 $L_{N_i} \cap A_i(x) \neq \varnothing$.

则存在 $\hat{x} \in K$ 使得对每一 $i \in I$, $A_i(\hat{x}) = \varnothing$.

证明 假设结论不真, 则对每一 $x \in K$, 存在 $i \in I$ 使得 $A_i(x) \neq \varnothing$. 因此我们有

$$K \subset \bigcup_{i \in I} \bigcup_{y_i \in Y_i} A_i^{-1}(y_i).$$

因为 K 是紧的, 存在一有限集 $J \subset I$ 使得对每一 $j \in J$, 存在 $N_j = \{y_j^1, y_j^2, \ldots, y_j^{m_j}\} \subset Y_j$ 满足 $K \subset \bigcup_{j \in J} \bigcup_{k=1}^{m_j} A_j^{-1}(y_j^k)$. 由此推得对每一 $x \in K$, 存在 $j \in J \subset I$ 使得 $N_j \cap A_j(x) \neq \varnothing$ 且因此, 由 (iii), 存在 Y_j 的包含 N_j 的紧 FC_子空间 L_{N_j} 使得 $L_{N_j} \cap A_j(x) \neq \varnothing$. 任取 $y^0 = (y_i^0)_{i \in I} \in Y$. 对每一 $i \in I \setminus J$, 令 $N_i = \{y_i^0\}$. 由 (iii), 对每一 $i \in I$, 存在 Y_i 的包含 N_i 的紧 FC_子空间 L_{N_i} 和对每一 $x \in X \setminus K$, 存在 $i \in I$ 满足 $L_{N_i} \cap A_i(x) \neq \varnothing$. 因此对每一 $x \in X$, 存在 $i \in I$ 使得 $L_{N_i} \cap A_i(x) \neq \varnothing$. 令 $L_N = \prod_{i \in I} L_{N_i}$, 则由引理 1.1, L_N 是 (Y, φ_N) 的紧 FC_子空间. 令 $X_0 = F(L_N)$, 则 X_0 在 X 内是紧的. 定义 $A_i': X_0 \to 2^{L_{N_i}}$ 如下: $A_i'(x) = L_{N_i} \cap A_i(x)$. 对每一 $y_i \in L_{N_i}$, 我们有

$$(A_i')^{-1}(y_i) = \{x \in X_0 : y_i \in L_{N_i} \cap A_i(x)\} = X_0 \cap A_i^{-1}(y_i).$$

因为对每一 $i \in I$ 和 $y_i \in Y_i$, $A_i^{-1}(y_i)$ 在 X 内是开的, 所以 $(A_i')^{-1}(y_i)$ 在 X_0 内是开的. 考虑限制 $F|_{L_N} \in \mathscr{B}(L_N, X_0)$, 由 (i), 对每一 $N = \{y_0, \ldots, y_n\} \in \langle L_N \rangle \subset \langle Y \rangle$ 和 $M = \{y_{i_0}, \ldots, y_{i_k}\} \subset N$, 我们有

$$F(\varphi_N(\Delta_k)) \cap (\bigcap_{y \in M} (A_i')^{-1}(\pi_i(y))) = F(\varphi_N(\Delta_k)) \cap (\bigcap_{y \in M} (X_0 \cap A_i^{-1}(\pi_i(y)))) \subset$$

$$F(\varphi_N(\Delta_k)) \cap (\bigcap_{y \in M} A_i^{-1}(\pi_i(y))) = \varnothing.$$

因此族 $\{A_i'\}_{i \in I}$ 满足系 2.1 的一切条件. 由系 2.1, 存在 $x \in X_0 \subset X$ 使得对每一 $i \in I$, $A_i'(x) = L_{N_i} \cap A_i(x) = \varnothing$. 这就与事实: 对每一 $x \in X$, 存在 $i \in I$ 使得 $L_{N_i} \cap A_i(x) \neq \varnothing$ 相矛盾. 所以存在 $\hat{x} \in K$ 使得对每一 $i \in I$, $A_i(\hat{x}) = \varnothing$. 证毕.

注 2.7 定理 2.8 推广了 Ding[7] 的定理 2.6 从 G_凸空间到 FC_空间. 定理 2.8 与 Ding[1] 的定理 2.3 相比较, 文献[1] 内定理 2.3 的条件 (iii) 被去掉, 但是 A_i^{-1} 是转移紧开值的假设由 A_i^{-1} 是开值的假设所替代. 显然, 对于应用, 定理 2.8 更为有用和方便.

系 2.2 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间, K 是 X 的非空紧子集和 I 是任何指标集. 对每一 $i \in I$, 令 (Y_i, φ_{N_i}) 是 FC_空间和 $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ 是如在引理 1.1 内定义的 FC_空间. 设 $F \in \mathscr{B}(Y, X)$ 和对每一 $i \in I$, $A_i: X \to 2^{Y_i}$ 使得:

(i) 对每一 $x \in X$, $A_i(x)$ 是 Y_i 的 FC_子空间;

(ii) 对每一 $y \in Y$, $\pi_i(y) \notin A_i(F(y))$;

(iii) 对每一 $y_i \in Y_i$, $A_i^{-1}(y_i)$ 在 X 内是开的;

(iv) 对每一 $N_i \in \langle Y_i \rangle$, 存在 Y_i 的包含 N_i 的非空紧 FC_子空间 L_{N_i} 和对每一 $x \in X \setminus K$, 存在 $i \in I$ 满足 $L_{N_i} \cap A_i(x) \neq \varnothing$.

则存在 $\hat{x} \in K$ 使得对每一 $i \in I$, $A_i(\hat{x}) = \varnothing$.

证明 我们主张条件 (i) 和 (ii) 蕴含定理 2.8 的条件 (i) 成立. 假设定理 2.8 的条件

(ⅰ)不成立,则存在 $i\in I$, $N=\{y_0,\dots,y_n\}\in\langle Y\rangle$ 和 $M=\{y_{i_0},\dots,y_{i_k}\}\subset N$ 使得 $F(\varphi_N(\Delta_k))\cap(\bigcap_{y\in M}A_i^{-1}(\pi_i(y)))\neq\emptyset$。因此存在 $y\in\varphi_N(\Delta_k)=\prod_{i\in I}\varphi_{N_i}(\Delta_k)$ 和 $x\in F(y)$ 使得 $x\in\bigcap_{y\in M}A_i^{-1}(\pi_i(y))$。由此推得 $\pi_i(M)\subset A_i(x)$。由(ⅰ), $\varphi_{N_i}(\Delta_k)\subset A_i(x)$。因此我们有 $\pi_i(y)\in\varphi_{N_i}(\Delta_k)\subset A_i(x)\subset A_i(F(y))$。这与条件(ⅱ)相矛盾。定理2.8的所有条件被满足。系2.2的结论从定理2.8推得。

注2.8 系2.2从几方面推广了Deguire等人[9]的定理7。

定理2.9 设 X 是Hausdorff仿紧正则拓扑空间, K 是 X 的非空紧子集和 I 是任何指标集。对每一 $i\in I$, 令 (Y_i,φ_{N_i}) 是FC_空间和 $Y=\prod_{i\in I}Y_i$ 是如在引理1.1内定义的FC_空间。设 $F\in\mathscr{B}(Y,X)$ 和对每一 $i\in I$, $A_i:X\to 2^{Y_i}$ 是 $G_{\mathscr{B}}$_优化的(其中对每一 $i\in I$, $A_{x,i}^{-1}$ 有开值)。假设存在 X 的非空紧子集 K 且对每一 $i\in I$ 和 $N_i\in\langle Y_i\rangle$, 存在 Y_i 的包含 N_i 的紧FC_子空间 L_{N_i} 使得对每一 $x\in X\setminus K$, 存在 $i\in I$ 满足 $L_{N_i}\cap A_i(x)\neq\emptyset$。

则存在 $\hat{x}\in K$ 使得对一切 $i\in I$, $A_i(\hat{x})=\emptyset$。

证明 由引理2.1, 对每一 $i\in I$, 存在一 $G_{\mathscr{B}}$_映象 $B_i:X\to 2^{Y_i}$(其中每一 $B_i^{-1}(y_i)$ 是开的)使得对一切 $x\in X$, $A_i(x)\subset B_i(x)$。容易看出 $\{B_i\}_{i\in I}$ 满足定理2.8的所有条件。由定理2.8, 存在 $\hat{x}\in K$ 使得对每一 $i\in I$, $B_i(\hat{x})=\emptyset$。所以对每一 $i\in I$, $A_i(\hat{x})=\emptyset$。

注2.9 定理2.9在几方面推广了Deguire等人[9]的定理8。

3 某 些 应 用

在本节中,应用我们的极大元定理对一族集值映象证明了某些新的不动点定理,并对函数族建立了某些新的极小极大不等式组。

下面的结果是与系2.2等价的不动点形式。

定理3.1 设 X 是Hausdorff拓扑空间, K 是 X 的非空紧子集和 I 是任何指标集。对每一 $i\in I$, 令 (Y_i,φ_{N_i}) 是FC_空间和 $Y=\prod_{i\in I}Y_i$ 是如在引理1.1内定义的FC_空间。设 $F\in\mathscr{B}(Y,X)$ 和对每一 $i\in I$, $A_i:X\to 2^{Y_i}$ 使得:

(ⅰ) 对每一 $x\in X$, $A_i(x)$ 是 Y_i 的FC_子空间;

(ⅱ) 对每一 $x\in K$, 存在 $i\in I$ 使得 $A_i(x)\neq\emptyset$;

(ⅲ) 对每一 $y_i\in Y_i$, $A_i^{-1}(y_i)$ 在 X 内是开的;

(ⅳ) 对每一 $N_i\in\langle Y_i\rangle$, 存在 Y_i 的包含 N_i 的非空紧FC_子空间 L_{N_i} 和对每一 $x\in X\setminus K$, 存在 $i\in I$ 满足 $L_{N_i}\cap A_i(x)\neq\emptyset$。

则存在 $\hat{y}\in Y$ 和 $i_0\in I$ 使得 $\hat{y}_{i_0}\in A_{i_0}(F(\hat{y}))$。

证明 系2.2 ⇒ 定理3.1。假设定理3.1的结论失效。则系2.2的所有条件被满足。由系2.2, 存在 $\hat{x}\in K$ 使得对一切 $i\in I$, $A_i(x)=\emptyset$, 这与条件(ⅱ)相矛盾。因此定理3.1的结论必是真的。

定理3.1 ⇒ 系2.2。假设系2.2的结论失效。则定理3.1的所有条件被满足。由定理3.1, 存在 $\hat{y}\in Y$ 和 $i_0\in I$ 使得 $\pi_{i_0}(\hat{y})\in A_{i_0}(F(\hat{y}))$, 这与系2.2的条件(ⅱ)相矛盾。因此系2.2的结论必是真的。

注 3.1 定理 3.1 推广了 Ding[8] 的定理 4, Deguire 等人[9] 的定理 6 和 9, 和很多相应的已知结果到没有任何凸性结构的 FC_空间.

定理 3.2 设 I 是任何指标集. 对每一 $i \in I$, 令 (X_i, φ_{N_i}) 和 (Y_i, φ_{N_i}) 是 FC_空间, 和 $X = \prod_{i \in I} X_i$ 和 $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ 是如在引理 1.1 内定义的乘积 FC_空间. 对每一 $i \in I$, 设 $A_i: X \to 2^{Y_i}$ 和 $B_i: Y \to 2^{X_i}$ 使得对每一 $x \in X$ 和 $y \in Y$, $A_i(x)$ 和 $B_i(y)$ 分别是 Y_i 和 X_i 的 FC_子空间. 假设存在 X 的非空紧子集 K 和 Y 的非空紧子集 L 使得:

(i) 对每一 $i \in I$ 和 $(x_i, y_i) \in X_i \times Y_i$, $A_i^{-1}(y_i)$ 和 $B_i^{-1}(x_i)$ 分别在 X 和 Y 内是开的;

(ii) 对每一 $i \in I$, $M_i \in \langle X_i \rangle$ 和 $N_i \in \langle Y_i \rangle$, 存在 X_i 的包含 M_i 的紧 FC_子空间 L_{M_i} 和 Y_i 的包含 N_i 的紧 FC_子空间 L_{N_i}, 且对每一 $(x, y) \in (X \times Y) \setminus (K \times L)$, 存在 $i \in I$ 使得 $A_i(x) \cap L_{N_i} \neq \emptyset$ 和 $B_i(y) \cap L_{M_i} \neq \emptyset$;

(iii) 对每一 $(x, y) \in K \times L$, 存在 $i \in I$ 使得 $A_i(x) \neq \emptyset$ 和 $B_i(y) \neq \emptyset$.

则存在 $i_0 \in I$ 和 $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ 使得 $\hat{y}_{i_0} \in A_{i_0}(\hat{x})$ 和 $x_{i_0} \in B_{i_0}(\hat{y})$.

证明 令 $C = K \times L$, 则 C 是 $X \times Y$ 的非空紧子集. 显然, 由引理 1.1, 对每一 $i \in I$, $Y_i \times X_i$ 和 $Y \times X = \prod_{i \in I}(Y_i \times X_i)$ 都是 FC_空间. 由(ii), 对每一 $i \in I$ 和 $N_i \times M_i \in \langle Y_i \times X_i \rangle$, 存在 $Y \times X$ 的包含 $N_i \times M_i$ 的紧 FC_子空间 $L_{N_i} \times L_{M_i}$, 且对每一 $(y, x) \in (Y \times X) \setminus (L \times K)$, $(A_i(x) \times B_i(y)) \cap (L_{N_i} \times L_{M_i}) \neq \emptyset$. 定义 $F: Y \times X \to 2^{(X \times Y)}$ 为 $F(y, x) = \{(x, y)\}$, 则我们有 $F \in \mathscr{B}(Y \times X, X \times Y)$. 定义 $W_i: X \times Y \to 2^{(Y_i \times X_i)}$ 为

$$W_i(x, y) = A_i(x) \times B_i(y), \qquad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

则容易检验定理 3.1 所有条件被满足. 由定理 3.1, 存在 $i_0 \in I$ 和 $(\hat{y}, \hat{x}) \in Y \times X$ 使得

$$(\hat{y}_{i_0}, \hat{x}_{i_0}) \in W_{i_0}(F(\hat{y}, \hat{x})) = W_{i_0}(\hat{x}, \hat{y}) = A_{i_0}(\hat{x}) \times B_{i_0}(\hat{y}).$$

因此我们得到 $\hat{y}_{i_0} \in A_{i_0}(\hat{x})$ 和 $\hat{x}_{i_0} \in B_{i_0}(\hat{y})$.

注 3.2 定理 3.2 推广了 Ding[8] 的定理 5 和 Deguire 等人[9] 的定理 10 到乘积 FC_空间.

定理 3.3 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间和 I 是任何指标集. 对每一 $i \in I$, 令 (Y_i, φ_{N_i}) 是 FC_空间和设 $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ 是如在引理 1.1 内定义的 FC_空间. 设 $F \in \mathscr{B}(Y, X)$ 是紧映象且对每一 $i \in I$, 函数 $f_i: X \times Y_i \to \mathbf{R}$ 满足对每一 $y_i \in Y_i$, $x \mapsto f_i(x, y_i)$ 在 X 上是下半连续的. 则至少下列陈述之一成立:

1) 对每一 $\lambda \in \mathbf{R}$, 存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $\sup_{i \in I} \sup_{y_i \in Y_i} f_i(\hat{x}, y_i) \leqslant \lambda$;

2) 存在 $i \in I$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $N = \{y_0, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$, 和 $M = \{y_{i_0}, \cdots, y_{i_k}\} \subset N$ 使得 $\bigcap_{y \in M}\{x \in F(\varphi_N(\Delta_k)): f_i(x, \pi_i(y)) > \lambda\} \neq \emptyset$.

证明 如果陈述 2) 失效, 则对任何 $\lambda \in \mathbf{R}$, $i \in I$, $N = \{y_0, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$, 和 $M = \{y_{i_0}, \cdots, y_{i_k}\} \subset N$, 我们有

$$F(\varphi_N(\Delta_k)) \cap \Big(\bigcap_{y \in M}\{x \in X: f_i(x, \pi_i(y)) > \lambda\}\Big) = \emptyset.$$

对每一 $i \in I$, 定义映象 $A_i: X \to 2^{Y_i}$ 如下:

$$A_i(x) = \{y_i \in Y_i: f_i(x, y_i) > \lambda\}, \qquad \forall x \in X.$$

因此我们有 $F(\varphi_N(\Delta_k)) \cap (\bigcap_{y \in M} A^{-1}(\pi_i(y))) = \emptyset$. 由函数 $x \mapsto f_i(x, y_i)$ 的下半连续性, 我们有对每一 $y_i \in Y_i$, $A_i^{-1}(y_i) = \{x \in X: f_i(x, y_i) > \lambda\}$ 在 X 内是开的, 定理 2.7 的条件(ii)

被满足• 因此$\{A_i\}_{i\in I}$是一 $G_{\mathscr{B}}$ _映象族, 所以它也是一 $G_{\mathscr{B}}$ _优化映象族• 由定理2.7, 存在 $\hat{x}\in X$ 使得对一切$i\in I$, $A_i(\hat{x})=\varnothing$• 因此我们有

$$\sup_{i\in I}\sup_{y_i\in Y_i} f_i(\hat{x}, y_i)\leqslant\lambda\text{•}$$

定理 3.4 设I是任何指标集, X 是Hausdorff拓扑空间和K是X的紧子集• 对每一$i\in I$, 令(Y_i, φ_{N_i})是FC_空间和设$Y=\prod_{i\in I}Y_i$是如在引理 1.1 内定义的 FC_空间• 设$F\in\mathscr{B}(Y,X)$和对每一$i\in I$, 函数$f_i: X\times Y_i\to\mathbf{R}$满足下列条件:

(ⅰ) 对每一$\lambda\in\mathbf{R}$和$x\in X$, 集$\{y_i\in Y_i: f_i(x,y_i)>\lambda\}$是$Y_i$的FC_子空间;

(ⅱ) 对每一$y_i\in Y_i$, $x\mapsto f_i(x,y_i)$是下半连续的;

(ⅲ) 对每一$N_i\in\langle Y_i\rangle$, 存在Y_i的包含N_i的紧FC_子空间L_{N_i}, 且对每一$\lambda\in\mathbf{R}$和$x\in X\setminus K$, 存在$i\in I$满足$L_{N_i}\cap\{y_i\in Y_i: f_i(x,y_i)>\lambda\}\neq\varnothing$•

则我们有

(A) 对每一$\lambda\in\mathbf{R}$, 至少下列陈述之一成立:

1) 存在$\hat{x}\in K$使得$\sup_{i\in I}\sup_{y_i\in Y_i}f_i(\hat{x},y_i)\leqslant\lambda$;

2) 存在$y\in Y$, $x\in F(y)$和$i\in I$使得$f_i(x,\pi_i(y))>\lambda$•

(B) 下面极小极大不等式成立:

$$\inf_{x\in K}\sup_{i\in I}\sup_{y_i\in Y_i}f_i(x,y_i)\leqslant\sup_{i\in I}\sup_{x\in F(y)}\sup_{y\in Y}f_i(x,\pi_i(y))\text{•}$$

证明 (A) 对任何$i\in I$和$\lambda\in\mathbf{R}$, 定义$A_i: X\to 2^{Y_i}$为$A_i(x)=\{y_i\in Y_i: f_i(x,y_i))>\lambda\}$• 由(ⅰ), 对每一$x\in X$, $A_i(x)$是Y_i的FC_子空间• 由(ⅱ), 对每一$y_i\in Y_i$, $A_i^{-1}(y_i)$在X内是开的• 如果(A)的陈述2)不成立, 则对每一$i\in I$和$y\in Y$, $\pi_i(y)\notin A_i(F(y))$• 由系2.2, 存在$\hat{x}\in K$使得对一切$i\in I$, $A_i(\hat{x})=\varnothing$, 即(A)的陈述1)成立•

(B) 令$\lambda_0=\sup_{i\in I}\sup_{x\in F(y)}\sup_{y\in Y}f_i(x,\pi_i(y))$, 则(A)的陈述2)不成立, 所以(A)的陈述1)必成立, 即存在$\hat{x}\in K$使得$\sup_{i\in I}\sup_{y_i\in Y_i}f_i(\hat{x},y_i)\leqslant\lambda_0$• 所以我们有

$$\inf_{x\in K}\sup_{i\in I}\sup_{y_i\in Y_i}f_i(x,y_i)\leqslant\sup_{i\in I}\sup_{x\in F(y)}\sup_{y\in Y}f_i(x,\pi_i(y))\text{•}$$

注 3.3 定理 3.3 在很弱的假设下推广了 Ding[8]的定理 7 和定理8, 和 Deguire 等人[9]的定理 11 和定理12 到乘积 FC_空间•

[参 考 文 献]

[1] DING Xie_ping. Maximal element theorems in product FC_spaces and generalized games[J]. J Math Anal Appl, 2005, **305**(1): 29—42.

[2] Lassonde M. On the use of KKM multifunctions in fixed point theory and related topics[J]. J Math Anal Appl, 1983, **97**(1): 151—201.

[3] Horvath C D. Contractibility and general convexity[J]. J Math Anal Appl, 1991, **156**(2): 341—357.

[4] Park S, Kim H. Foundations of the KKM theory on generalized convex spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **209**(3): 551—571.

[5] Ben_El_Mechaiekh H, Chebbi S, Florenzano M, et al. Abstract convexity and fixed points[J]. J Math Anal Appl, 1998, **222**(1): 138—151.

[6] DING Xie_ping. Maximal element principles on generalized convex spaces and their application[A]. In: Argawal R P, Ed. Set Valued Mappings With Applications in Nonlinear Analysis [C]. in: SIMMA, Vol **4**, 2002, 149—174.

[7] 丁协平. 乘积 G_凸空间内的 G_B _优化映象的极大元及其应用(Ⅰ)[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(6): 583—594.

[8] 丁协平. 乘积 G_凸空间内的 G_B _优化映象的极大元及其应用(Ⅱ)[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(9): 899—905.

[9] Deguire P, Tan K K, Yuan X Z. The study of maximal elements, fixed points for L_S—majorized mappings and their applications to minimax and variational inequalities in product topological spaces[J]. Nonlinear Anal, 1999, **37**(7): 933—951.

[10] Shen Z F. Maximal element theorems of H_majorized correspondence and existence of equilibrium for abstract economies[J]. J Math Anal Appl, 2001, **256**(1): 67—79.

[11] Dugundji J. Topology [M]. Boston: Allyn and Bacon, 1966.

[12] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis [M]. New York: John Wiley & Sons, 1984.

[13] Yannelis N C, Prabhakar N D. Existence of maximal elements and equilibria in linear topological spaces[J]. J Math Econom, 1983, **12**(3): 233—245.

[14] DING Xie_ping, Tan K K. On equilibria of noncompact generalized games[J]. J Math Anal Appl, 1993, **177**(1): 226—238.

[15] DING Xieping, Kim W K, Tan K K. Equilibria of generalized games with L_majorized correspondences [J]. Internat J Math Math Sci, 1994, **17**(4): 783—790.

[16] Tulcea C I. On the equilibriums of generalized games[R]. The Center for Math Studies in Economics and Management Science, paper No 696, 1986.

[17] Toussaint S. On the existence of equilibria in economies with infinite commodities and without ordered preferences[J]. J Econom Theory, 1984, **33**(1): 98—115.

[18] Borglin A, Keiding H. Existence of equilibrium actions and of equilibrium: A note on the "new" existence theorems[J]. J Math Econom, 1976, **3**(3): 313—316.

[19] DING Xie_ping. Fixed points, minimax inequalities and equilibria of noncompact generalized games [J]. Taiwanese J Math, 1998, **2**(1): 25—55.

[20] DING Xie_ping, Yuan G X _Z. The study of existence of equilibria for generalized games without lower semicontinuity in locally convex topological vector spaces[J]. J Math Anal Appl, 1998, **227**(2): 420—438.

Maximal Elements of a Family of Majorized Mappings Involving a Better Admissible Mapping in Product FC_Spaces and Applications

DING Xie_ping

(College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P.R. China)

Abstract: A new family of majorized mappings from a topological space into a finite continuous topological space (in short, FC_space) involving a better admissible set_valued mapping was introduced. Some existence theorems of maximal elements for the family of majorized mappings were proved under noncompact setting of product FC_spaces. Some applications to fixed point and system of minimax inequalities were given in product FC_spaces. These theorems improve, unify and generalize many important results in recent literature.

Key words: maximal element; family of majorized mappings involing a better admissible set_valued mapping; fixed point; system of minimax inequalities; product FC_space