

用截面变形耦合有限元法分析复合材料梁

姜文光^{1,2}, J L 亨帅³

- (1. 燕山大学 机械工程学院, 秦皇岛 066004;
2. 布里斯托尔大学 航天工程系, BS8 1TR, 英国;
3. 诺丁汉 特伦特大学 机械和制造工程系, 诺丁汉, NG1 4BU, 英国)

(扶名福推荐)

摘要: 复合材料板和梁具有优良的特性, 从而获得了广泛的应用。然而由于材料的各向异性, 使得对这类材料构件作变形和应力分析时, 即使应用如有限元法的数值分析手段仍是非常复杂费时的。为此提出了一个可应用常规有限单元法, 分析等截面复合材料梁承受均匀拉弯扭载荷的一个简单精确分析的实施方案。由于巧妙地利用了变形的对称特性, 使得分析只需建立在梁的一个切片构造的几何模型上, 用常规三维实体有限单元进行结构离散。推导了精确的变形场模式, 并借助结构平移自由度的耦合关系使得数值分析易于实施。并通过数值算例来阐明方法的实施过程。

关键词: 复合材料; 等截面梁; 耦合方程; 有限单元法; 拉伸; 弯曲; 扭转

中图分类号: O343.68 **文献标识码:** A

引 言

层合复合材料具有比金属合金之类的常用材料更优良的力学以及其它性能, 近几十年获得了广泛应用。由于这些材料具有高强度重量比率, 早期主要应用于高性能航空器械, 近年来也开始应用于其它工业中。由于相临各层材料的刚度相差悬殊, 不可避免在自由边缘区域产生高梯度应力区而导致层间开裂, 使结构承载能力降低到常规失效准则无法正确预测的水平, 因此层间应力的准确预测对于层合复合构件的设计至关重要。基于这类问题固有的复杂性, 数值方法是用来分析的常用手段。这些数值手段包括需要区域离散的有限差分法^[1,2], 边界元法^[3]以及有限元法^[4,5]。除此之外还有级数逼近^[6]和变分法^[7-9]等。

本文提出将精确的截面变形耦合关系和有限元法有机结合的数值分析手段, 用于建立均匀变形复合材料梁的精确结构分析模型。这类算法曾被作者成功应用于拉伸和扭转耦合载荷作用下, 螺旋对称结构的变形和应力分析^[10-16]。

让我们考虑一任意截面形状的等截面直梁, 建立一直角坐标系 $Oxyz$, 让 z 轴与所研究梁的轴线相平行(如图 1)。材料特性的分布只是 x 和 y 坐标的函数而沿 z 方向是常量。作用于梁两端的载荷静力等效于一个沿轴向的力 F_z 和 1 个力偶, 该力偶的 3 个分量为 M_x 、 M_y 和 M_z (参

收稿日期: 2005_07-07; 修订日期: 2006-08-08

作者简介: 姜文光(1966), 男, 黑龙江人, 教授, 研究员, 博士(联系人, E-mail: W. jiang@bristol.ac.uk; wenguang_jiang@yahoo.co.uk)。

见图 1) 根据 St Venant 原理, 在远离梁端部, 端部效应可以忽略不计 假设体力也可以忽略不计, 那么梁将产生沿轴向的均匀变形, 即梁在所有截面的变形以及应力分布都是相同的 我们可以利用这一特点, 使问题的求解建立在一个梁的切片的几何模型上进行(参见图 1) 精确的边界条件, 可通过梁切片有限元模型的两横截面上对应节点间自由度的耦合关系(亦即约束方程) 来满足 这些耦合关系将在下文详细讨论

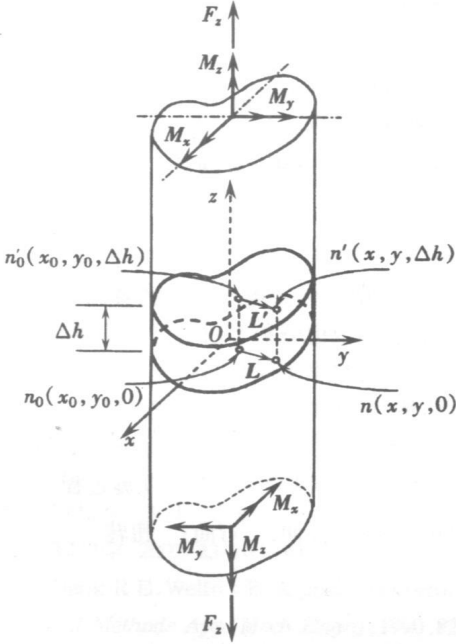


图 1 建立用于分析等截面直梁均匀变形所用的切片模型示意图

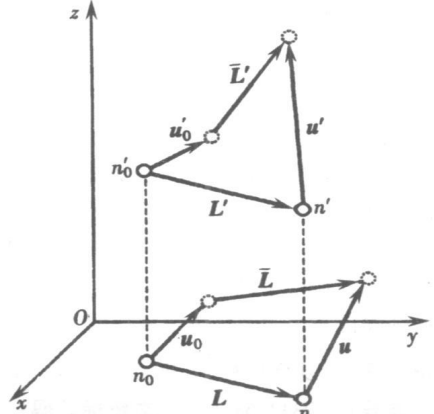


图 2 切片模型的两截面上任意一对材料对应点(有限元模型的节点对)之间的相对变形关系

1 变形场模式

考虑两截面上任意一对材料对应点对 $n(x, y, 0)$ 和 $n(x, y, h)$, 与预先选定的一对参考对应点对 $n_0(x_0, y_0, 0)$ 和 $n_0(x_0, y_0, h)$ 之间的相对变形的联系, 参见图 2

初始未变形构形中, 定义两个相对位置矢量 L 和 L' 如下式

$$L = n_0n = (x - x_0, y - y_0, 0)^T = L' = n_0n \tag{1}$$

在变形以后的构形中, 这对相对位置矢量将变为

$$L = L + u - u_0 \tag{2}$$

和

$$L' = L + u' - u'_0, \tag{3}$$

式中,

$$\begin{cases} u = (u_x, u_y, u_z)^T, & u' = (u'_x, u'_y, u'_z)^T, \\ u_0 = (u_{0x}, u_{0y}, u_{0z})^T, & u'_0 = (u'_{0x}, u'_{0y}, u'_{0z})^T \end{cases} \tag{4a~d}$$

分别是节点 n, n', n_0 和 n'_0 的位移矢量

基于所研究梁的变形的对称特性, 其应力分布与 z 坐标无关 若只考虑小变性情, 那么

位移场可用如下简单通用关系式精确描述

$$L = RL, \quad (5)$$

式中,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -z & y \\ z & 1 & -x \\ -y & x & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

是线性旋转矩阵, 式中, α_x 和 α_y 分别为两截面间关于 x 和 y 轴的相对弯曲角度; α_z 为两截面间关于 z 轴的相对扭转角度 这些变形角可按下式换算

$$\alpha_x = \kappa_x h, \quad \alpha_y = \kappa_y h, \quad \alpha_z = \kappa_z h, \quad (7a, b, c)$$

式中, κ_x 、 κ_y 和 κ_z 分别是关于 x 和 y 轴的弯曲曲率以及关于 z 轴扭转曲率(即以弧度计的单位轴线长度扭转角), h 为所取切片模型的厚度, 参见图 1

2 算法在有限元法模型中的实施

利用以上推导的变形场模式公式, 求解梁均匀变形场的有限元数值解, 我们只需对该梁的一个切片进行分析 所需建立的有限元网格应该在其两截面上满足: 在一个截面上的任意节点 $n(x, y, 0)$ 在另一截面上都有一一对应的节点 $n(x, y, h)$, 用来建立对应的节点对 显然这样的有限元网格是很容易建立的 任意选定一对对应的节点对 $n_0(x_0, y_0, 0)$ 和 $n_0(x_0, y_0, h)$ 作为参考节点对, 那么上节讨论的变形关系就可以建立起来 采用常规三维实体单元离散梁切片几何模型 所用单元的每个节点具有在 x 、 y 和 z 3 个坐标方向的 3 个平移自由度 由于变形沿梁轴线方向是均匀的, 所以在切片模型的厚度方向只需划分成 1 个单元

把算式(6)代入式(5), 变形关系可以显式表示成

$$\begin{bmatrix} u_x - u_{0x} + (x - x_0) \\ u_y - u_{0y} + (y - y_0) \\ u_z - u_{0z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -z & y \\ z & 1 & -x \\ -y & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x - u_{0x} + (x - x_0) \\ u_y - u_{0y} + (y - y_0) \\ u_z - u_{0z} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

此方程可以完全描述包括任意刚体运动在内的变形场模式 为了避免方程组求解时出现奇异, 刚体位移必须消除 在三唯空间中需要约束 6 个自由度以使变形体固定在空间中 在引入约束时, 一个基本要求是所引入的约束不能和变形场相冲突(公式(8)) 下面给出一个可行的方法:

首先, 把参考节点 n_0 的 3 个平移自由度全部约束住, 即

$$u_0 = (u_{0x}, u_{0y}, u_{0z})^T = (0, 0, 0)^T, \quad (9)$$

这时, 模型仍然可以绕节点 n_0 自由转动

我们可以进一步把参考节点 n_0 的 x 和 y 两个平移自由度约束住, 即

$$u_{0x} = 0, \quad u_{0y} = 0 \quad (10a, b)$$

考虑公式(9)和(10a, b)后, 公式(8)可进一步简化为

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -z & y \\ z & 1 & -x \\ -y & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x + (x - x_0) \\ u_y + (y - y_0) \\ u_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ -u_{0z} \end{bmatrix} \quad (11)$$

考虑了这些约束, 模型仍可绕固定直线 n_0n_0 转动 这个刚体转动可通过约束另一个任选节

点 $n_1(x_1, y_1, 0)$ 绕节点 n_0 相对转动来实现, 即

$$u_{1y} = u_{1x} \tan \alpha = u_{1x} (y_1 - y_0) / (x_1 - x_0) \tag{12}$$

在节点 $n_1(x_1, y_1, 0)$ 的对应节点 $n_1(x_1, y_1, h)$ 上的约束方程可以通过把方程(12)代入方程(11)得到

$$\begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{1z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -z & y \\ & z & 1-x \\ - & y & x & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{1x} + (x_1 - x_0) \\ u_{1x} \tan \alpha + (y_1 - y_0) \\ u_{1z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ -u_{0z} \end{pmatrix} \tag{13}$$

施加了这些约束后的有限元模型将被唯一地固定在三维空间中, 系统方程将有唯一解

本算法是通过给定在模型两截面间弯曲角度 α_x 和 α_y 以及扭转角度 α_z 来实现加载过程的 当这些角度给定后, 我们所推导的耦合关系方程将变成节点平移自由度间的线性关系, 从而可以方便地并入到系统方程中联立求解

在方程(11)、(12)和(13)中, 左边的自由度可以通过右边的自由度表示, 因此可以在求解的过程中消去 在求解以后这些消去的自由度还可通过这些耦合方程恢复出来 与变形相平衡的弯距及扭距, 可以通过切片模型的一个截面上所有节点反力对坐标轴取矩来得到 总轴向力可以通过施加节点力到节点 n_0 的轴向自由度 u_{0z} 上来实现 这个节点力实际上将通过耦合方程, 按变形的自然规律分布到截面的所有节点上

3 数值算例

应用所提出的方法, 我们分析一个 $(45^\circ / -45^\circ)$ 矩形截面层合复合材料梁, 如图 3 所示

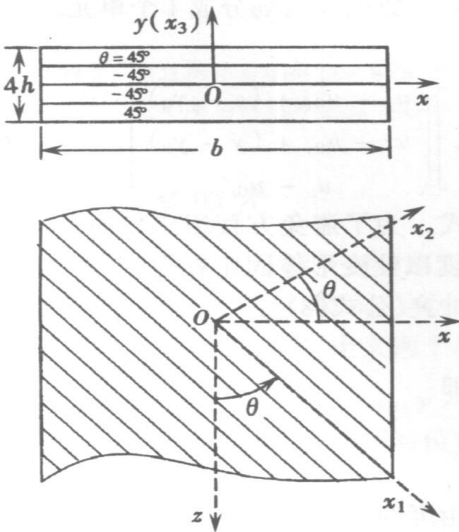


图 3 示例层合复合材料梁的截面构成

假设各层之间完好粘接(界面无相对位移) 每层是由均匀正交各向异性材料组成 每层材料有一个正交轴和梁的厚度方向重合^[17] 每层的厚度为 h , 宽度为 $b = 16h$ 应用常规三维 20 节点六面体实体单元建立切片有限元模型, 有限元网格如图 4 所示 沿主轴方向材料的弹性常数为: $E_1 = 137.9$ GPa, $E_2 = E_3 = 14.5$ GPa, $G_{12} = G_{31} = G_{23} = 5.99$ GPa, 以及 $\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31} = 0.21$

由于所分析的梁是弹性体, 其本构关系可表示成轴向应变 ϵ_z 、弯曲曲率 (κ_x, κ_y) 及扭转曲率 κ_z 与轴向力 F_z 、弯矩 (M_x, M_y) 及扭矩 M_z 之间的关系

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \tag{14}$$

根据互易定理, 式中 k 是对称的 模型加载可通过给定一组 $(F_z, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_z)$ 来实现 任意 4 组线性无关解, 例如: 纯拉伸 $(F_z \neq 0, \kappa_x = \kappa_y = \kappa_z = 0)$ 、纯弯曲 $(\kappa_x \neq 0, F_z = \kappa_y = \kappa_z = 0)$ 和 $(\kappa_y \neq 0, F_z = \kappa_x = \kappa_z = 0)$ 以及纯扭转 $(\kappa_z \neq 0, F_z = \kappa_x = \kappa_y = 0)$ 这 4 种变形荷载组合

就可以得到所有刚度系数 k_{ij} , $i, j = 1, \dots, 4$ 在实际应用中, 这 4 种基础变形模式本身就是我们常关心的荷载工况

对一给定尺寸为 $b = 16h = 16 \text{ mm}$ 的梁, 模型计算的刚度矩阵为

$$k = \begin{bmatrix} 1.287 \text{ kN} & 0.000 \text{ N m} & 0.000 \text{ N m} & 0.000 \text{ N m} \\ 0.000 \text{ N m} & 1.701 \text{ N m}^2 & 0.000 \text{ N m}^2 & -0.723 \text{ N m}^2 \\ 0.000 \text{ N m} & 0.000 \text{ N m}^2 & 26.49 \text{ N m}^2 & 0.000 \text{ N m}^2 \\ 0.000 \text{ N m} & -0.723 \text{ N m}^2 & 0.000 \text{ N m}^2 & 5.596 \text{ N m}^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

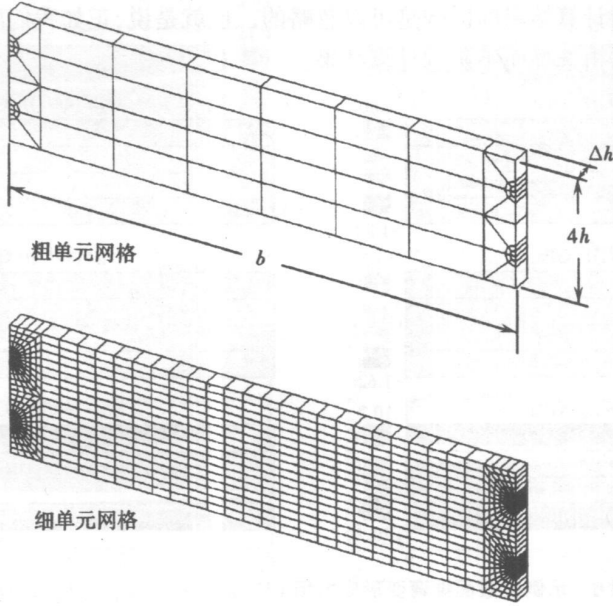


图 4 示例层合复合材料梁的有限元模型网格

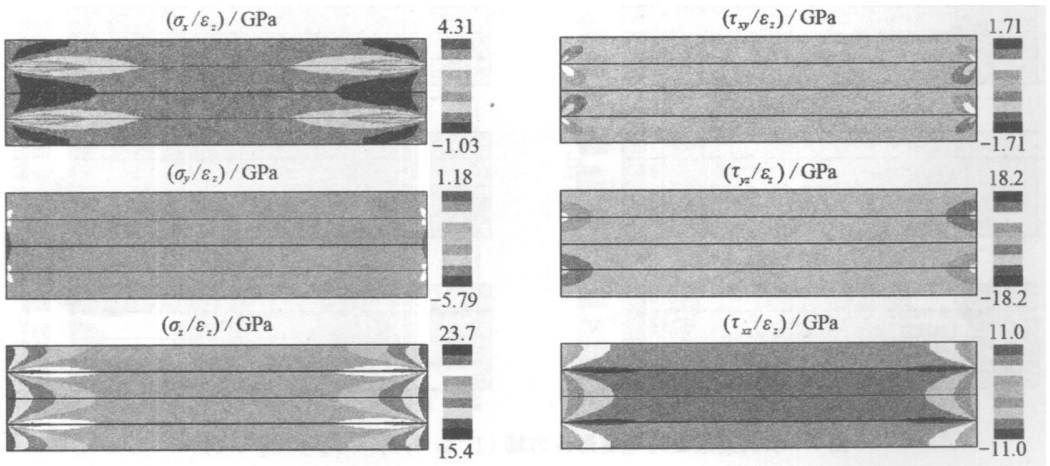


图 5 示例梁截面纯拉伸变形应力场 ($F_z = 0, x = y = z = 0$)

值得一提的是, 在用很粗单元网格和细网格两种模型所得的刚度系数相差不超过 1% 我们还可以看到数值结果很精确地满足 $k_{ij} = k_{ji}$ 的对称关系 非对角线的非零数值 $k_{24} = k_{42} = -0.723 \text{ N m}^2$, 显示出在关于 x 轴弯曲和绕 z 轴扭转之间存在耦合 图 5~ 图 8 给出了用细网格

模型预测的该梁受纯拉弯或扭载荷作用下的应力场在梁横截面上的分布 图 9~ 图 12 给出了沿 $y = h$ 层间界面应力的分布 在这些图中也和其他文献的结果(Wang 和 Choi^[6] Ye^[4] 以及 Dav 和 Milazzo^[3])作了比较 可以看出本文的结果和其他文献结果是非常一致的 还值得一提的是, 本文用很粗的网格就能得到相当精确的结果 我们还可以观察到, 在以上讨论的所有载荷工况中, 在模型的自由边附近区域的相邻层间都存在着应力奇异

在选择本文模型所用参数时, 如切片模型的厚度 h (从 0.1% 到 10% 的最大截面尺寸之间变化), 以及任意选择参考节点 n_0 和旋转约束节点 n_1 的位置, 作者都作了详尽的测试, 测试结果表明这些参数对计算结果的影响是可以忽略的 也就是说, 正如我们所希望的, 这些参数可以在很大范围内自由选择而不影响计算结果

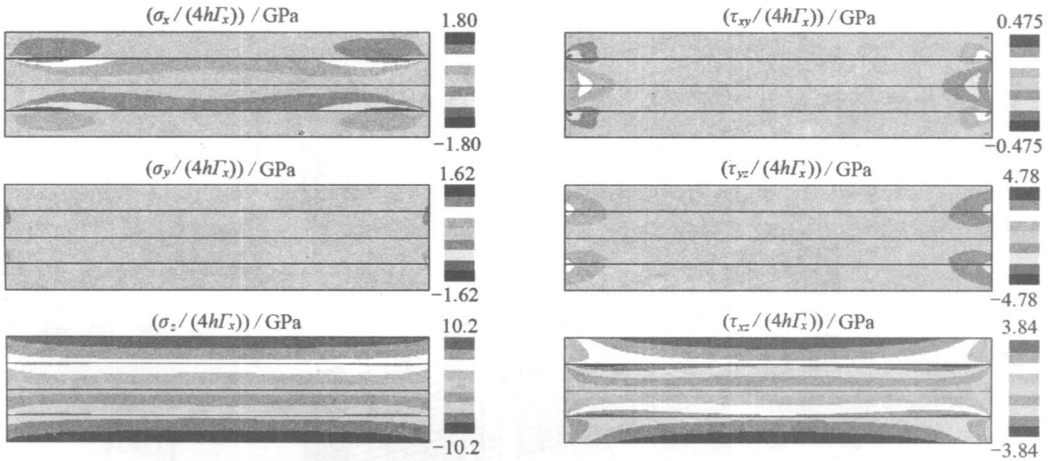


图 6 示例梁截面纯弯变形应力场 ($x = 0, F_z = y = z = 0$)

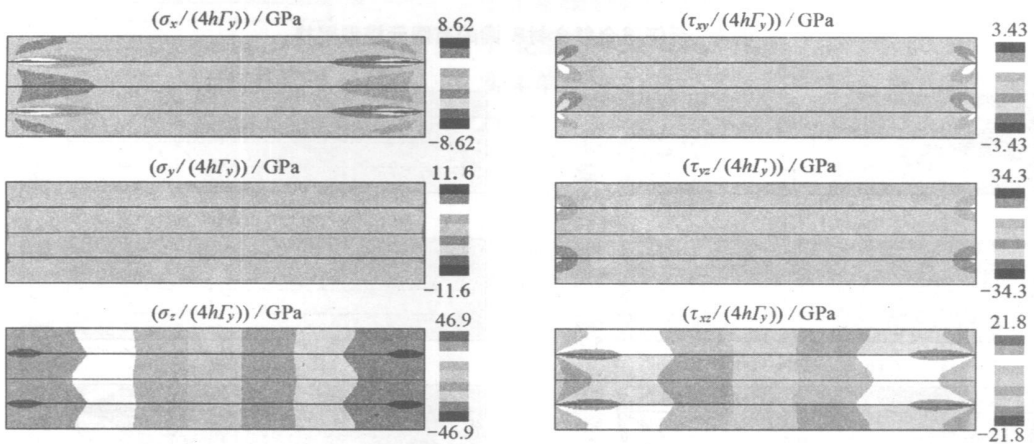


图 7 示例梁截面纯弯变形应力场 ($y = 0, F_z = x = z = 0$)

4 结 论

对承受均匀拉弯扭载荷的复合材料梁的变形及应力分析, 可以在建立在梁的一个具有代表性的一个切片的模型上实现 作者给出了精确边界条件极其实办法 该算法概念简明扼要, 公式精确 适用于任意截面形状及材料分布的等截面复合材料梁的应力变形分析

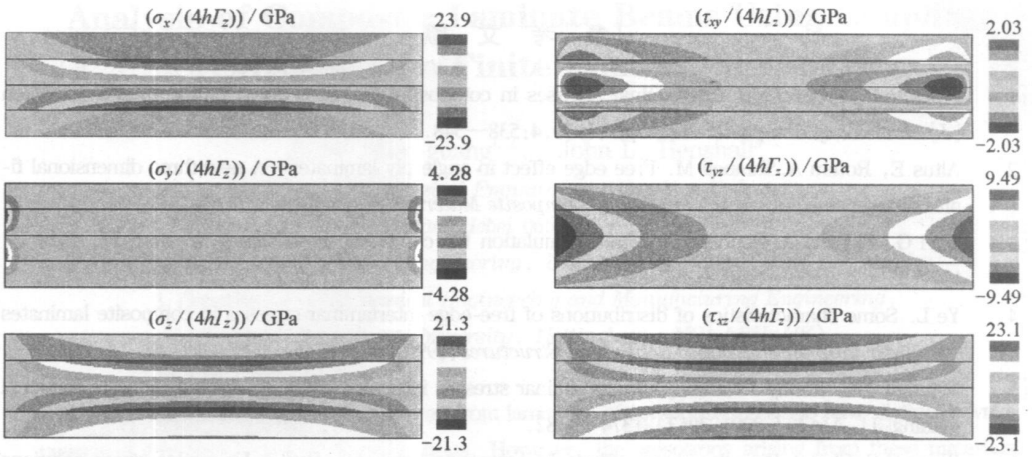


图 8 示例梁截面纯扭变形应力场 ($z = 0, F_z = x = y = 0$)

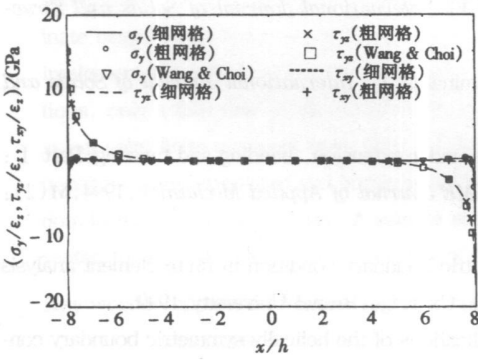


图 9 示例复合材料梁沿 $y = h$ 层间界面应力分布 ($F_z = 0, x = y = z = 0$)

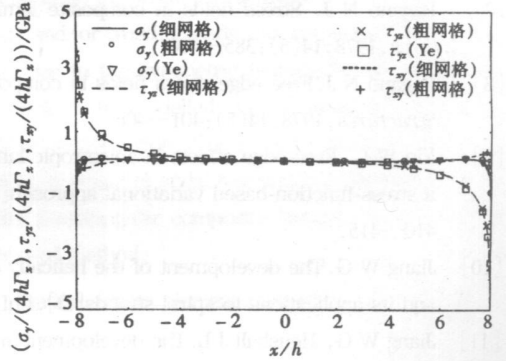


图 10 示例复合材料梁沿 $y = h$ 层间界面应力分布 ($x = 0, F_z = y = z = 0$)

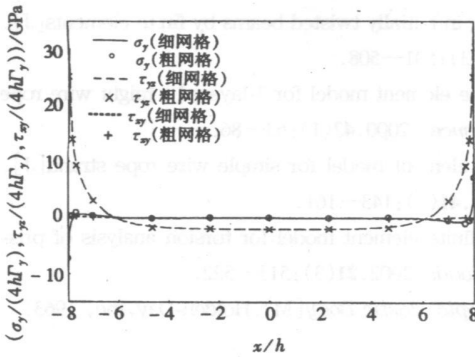


图 11 示例复合材料梁沿 $y = h$ 层间界面应力分布 ($y = 0, F_z = x = z = 0$)

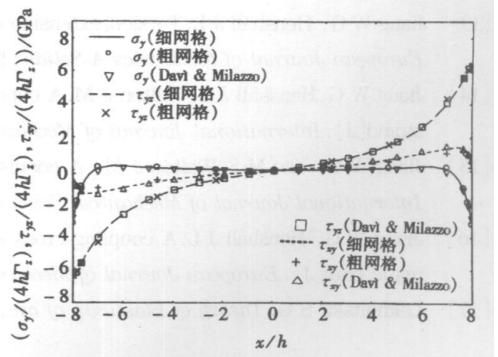


图 12 示例复合材料梁沿 $y = h$ 层间界面应力分布 ($z = 0, F_z = x = y = 0$)

[参 考 文 献]

- [1] Pipes R B, Pagano N J. Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension [J]. Journal of Composite Materials, 1970, **4**: 538-548.
- [2] Altus E, Rotem A, Shmueli M. Free edge effect in angle ply laminates—A new three dimensional finite difference solution[J]. Journal of Composite Materials, 1980, **14**(1): 21-30.
- [3] Dav G, Milazzo A. Boundary integral formulation for composite laminates in torsion[J]. AIAA J, 1997, **35**(10): 1660-1666.
- [4] Ye L. Some characteristics of distributions of free edge interlaminar stresses in composite laminates [J]. International Journal of Solids and Structures, 1990, **26**(3): 331-351.
- [5] Mitchell J A, Reddy J N. Study of interlaminar stresses in composite laminates subjected to torsional loading[J]. AIAA J, 2001, **39**(7): 1374-1382.
- [6] Wang S S, Choi I. Boundary layer effects in composite laminates, Part 2: Free edge stress solutions and basic characteristics[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1982, **49**(3): 549-560.
- [7] Pagano N J. Stress fields in composite laminates[J]. International Journal of Solids and Structures, 1978, **14**(5): 385-400.
- [8] Pagano N J. Free edge stress fields in composite laminates[J]. International Journal of Solids and Structures, 1978, **14**(5): 401-406.
- [9] Yin W L. Free edge effects in anisotropic laminates under extension, bending and twisting, Part 1: a stress function based variational approach[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1994, **61**(2): 410-415.
- [10] Jiang W G. The development of the helically symmetric boundary condition in finite element analysis and its applications to spiral strands[D]. PhD thesis. Uxbridge: Brunel University, 1999.
- [11] Jiang W G, Henshall J L. The development and applications of the helically symmetric boundary conditions in finite element analysis[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 1999, **15**(6): 435-443.
- [12] Jiang W G, Henshall J L. A novel finite element model for helical springs[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2000, **35**(4): 363-377.
- [13] Jiang W G, Henshall J L. Torsion-extension coupling in initially twisted beams by finite elements[J]. European Journal of Mechanics A_Solids, 2001, **20**(3): 501-508.
- [14] Jiang W G, Henshall J L, Walton J M. A concise finite element model for 3-layered straight wire rope strand[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2000, **42**(1): 63-86.
- [15] Jiang W G, Yao M S, Walton J M. A concise finite element model for simple wire rope strand[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1999, **41**(2): 143-161.
- [16] Jiang W G, Henshall J L. A coupling cross-section finite element model for torsion analysis of prismatic bars[J]. European Journal of Mechanics A_Solids, 2002, **21**(3): 513-522.
- [17] Lekhnitskiĭ S G. Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body [M]. Holden-Day, Inc, 1963.

Analysis of Composite Laminate Beams Using Coupling Cross_Section Finite Element Method

JIANG Wen_guang^{1,2}, John L. Henshall³

(1. School of Mechanical Engineering, Yanshan University,
Qinhuangdao, Hebei 066004, P. R. China;

2. Department of Aerospace Engineering, University of Bristol, BS8 1TR, UK;

3. Department of Mechanical Engineering and Manufacturing Engineering,
Nottingham Trent University, Nottingham, NG1 4BU, UK)

Abstract: Beams and plates manufactured from laminates of composite materials have distinct advantages in a significant number of applications. However, the anisotropy arising from these materials adds a significant degree of complexity, and thus time, to the stress and deformation analyses of such components, even using numerical approaches such as finite elements. The analysis of composite laminate beams subjected to uniform extension, bending, and/or twisting loads was performed by a novel implementation of the usual finite element method. Due to the symmetric features of the deformations, only a thin slice of the beam to be analysed needs to be modelled. Conventional three-dimensional solid finite elements were used for the structural discretization. The accurate deformation relationships were formulated and implemented through the coupling of nodal translational degrees of freedom in the numerical analysis. A sample solution for a rectangular composite laminate beam is presented to show the validity and accuracy of the proposed method.

Key words: composite material; beam; coupling equation; finite element method; extension; bending; torsion