文章编号: 1000_0887(2007) 01_0092_07

拓扑空间中的弱 R _KKM 映射 —交定理和极大极小不等式*

邓 磊[1], 杨明歌[1,2]

(1. 西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715;
2. 洛阳师范学院 数学科学学院, 洛阳 471022)

(协平推荐)

摘要: 在不具有任何凸性结构的一般拓扑空间中引入弱 R_KKM 映射, R_凸和 R_β_拟凸这些新的概念• 将 Ky Fan 匹配定理推广到一般拓扑空间中, 即该文的引理 1.2• 利用引理 1.2, 在一般拓扑空间中证明了两个交定理• 利用交定理, 在一般拓扑空间中证明了一些 Ky Fan 型极大极小不等式• 该文的结果推广和改进了文献中的相关结果•

关 键 词: 弱 R_KKM 映射; R_凸; R_β_拟凸; 广义 R_KKM 映射
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

引 言

最近, 著名的 Knaster_Kuratowski_Mazurkiewicz 定理[1] 和 Ky Fan 引理[2] 作为现代非线性分析中通用的工具而被广泛应用•

设 X 是向量空间 E 的一个子集, 集值映射 $S: X \to 2^E$ 如果满足对任意 $A \in \langle X \rangle$ 有 $\mathrm{co}A \subset S(A)$, 则称为 KKM 映射• 众所周知, 如果 S 是从拓扑向量空间 E 的凸子集到 2^E 的 KKM 映射, 则集族 $\left\{ \overline{S(x)}: x \in Y \right\}$ 具有有限交性质(其中 $\overline{S(x)}$ 表示 $S(x)$ 的闭包)• Park 在文献[3] 中首次引入广义 KKM 映射, 之后其他的一些作者也对此概念进行了研究•

文献[4] 对 KKM(X, Y) 做了系统的研究, 其定义如下: 设 X 是向量空间的一个凸子集, Y 是拓扑空间, 如果集值映射 $S, T: X \to 2^Y$ 满足对任意 $A \in \langle X \rangle$ 有 $T(\mathrm{co}A) \subset S(A)$, 则 S 称为关于 T 的广义 KKM 映射• 如果对任意关于 $T: X \to 2^Y$ 的广义 KKM 映射 $S: X \to 2^Y$, 集族 $\left\{ \overline{S(x)}: x \in X \right\}$ 具有有限交性质, 则称集值映射 T 具有 KKM 性质•

文献[5] 通过引入(关于 T 的) 广义 G _KKM 映射和 G _KKM 性质等新概念, 将文献[4] 的结果推广到 G _凸空间• 设 $(X, D; \Gamma)$ 是 G _凸空间, Y 是非空集合, $T: X \to 2^Y$, $S: D \to 2^Y$ 是两个集值映射, 如果对任意 $A \in \langle D \rangle$ 有 $T(\Gamma(A)) \subset S(A)$, 则称 S 是关于 T 的广义 G _KKM 映射• 设 Y 是拓扑空间, 如果对任意关于 $T: X \to 2^Y$ 的广义 G _KKM 映射 $S: D \to 2^Y$, 集族 $\left\{ \overline{S(z)}: z \in D \right\}$ 具有有限交性质, 则称集值映射 T 具有 G _KKM 性质•

* 收稿日期: 2005_10_09; 修订日期: 2006_10_31
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471113); 重庆市科委自然科学基金资助项目(CSTC, 2005BB2097)
作者简介: 邓磊(1957—), 男, 重庆市人, 教授(联系人. Tel: + 86_23_68388606; E_mail: denglei@swu.edu.cn)•

文献[6]引入(关于 T 的)弱 G_KKM 映射的概念,它包含(关于 T 的)广义 G_KKM 映射为特例• 设 $(X, D; \Gamma)$ 是 G_凸空间, Y 是非空集合, $T: X \to 2^Y$, $S: D \to 2^Y$ 是集值映射• 如果对任意 $A \in \langle D\rangle$ 及任意 $x \in \Gamma(A)$, 有 $T(x) \cap S(A) \neq \varnothing$, 则称 S 是关于 T 的弱 G_KKM 映射•

注意到上述研究均建立在具有某种具体或抽象凸性结构的空间上• 而文献[7]在一般拓扑空间中引进广义 R_KKM 映射的概念,并首次在一般拓扑空间中研究 KKM 理论• 受上述研究的启发,我们将文献[6]中的(关于 T 的)弱 G_KKM 映射推广到不具有任何凸性结构的拓扑空间中,即本文的新概念——(关于 T 的)弱 R_KKM 映射• 与此同时,在一般拓扑空间中引入 R_凸和 R_β_拟凸的概念• 在第 1 节,将 Ky Fan 匹配定理推广到一般拓扑空间中,即本文的引理 1.2• 在第 2 节,利用引理 1.2,在一般拓扑空间中证明了两个交定理• 在第 3 节,利用交定理,在一般拓扑空间中证明了一些 Ky Fan 型极大极小不等式• 我们的结果推广和改进了文献中的相关结果•

1 预 备 知 识

设 X 是非空集合,用 2^X 表示 X 的所有非空子集构成的集族, $\langle X\rangle$ 表示 X 的所有非空有限子集构成的集族,若 $A \subset X$, 用 A^c 表示 A 在 X 中的余集• 设 $F: X \to 2^Y$ 是集值映射,对任意 $y \in Y$, 用 $F^{-1}(y) = \{x \in X: y \in F(x)\}$ 表示纤维• 对 $A \subset X$, 令 $F(A) = \bigcup\{F(x): x \in A\}$• 给定两个集值映射 $F: X \to 2^Y$ 和 $G: Y \to 2^Z$, 复合映射 $G \circ F: X \to 2^Z$ 定义为:对任意 $x \in X$, $(G \circ F)(x) = G(F(x))$•

设 X 和 Y 是拓扑空间, $T: X \to 2^Y$ 是集值映射,如果

(i) 对 Y 中的任意闭集 F, $\{x \in X: T(x) \cap F \neq \varnothing\}$ 是 X 中的闭集,则称 T 是上半连续(u.s.c.);

(ii) 对 Y 中的任意开集 V, $\{x \in X: T(x) \cap V \neq \varnothing\}$ 是 X 中的开集,则称 T 是下半连续(l.s.c.)•

令 Δ_n 表示 n_维标准单型,即

$$\Delta_n = \left\{u \in R^{n+1}: u = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(u) e_i,\ \lambda_i(u) \geqslant 0,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(u) = 1\right\},$$

其中 $e_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 是 R^{n+1} 中的第 $(i+1)$ 个单位向量•

定义 1.1[7] 设 X 是非空集合, Y 是拓扑空间, $T: X \to 2^Y$ 是集值映射,如果对任意 $N = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \langle X\rangle$, 存在一个连续映射 $\varphi_N: \Delta_n \to Y$, 使得对每一 $\{e_{i_0}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}\}$, 有

$$\varphi_N(\Delta_k) \subset \bigcup_{j=0}^{k} T(x_{i_j}),$$

其中 Δ_k 是 Δ_n 的具有顶点 $\{e_{i_0}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}\}$ 的 k_维标准子单型,则称 T 是广义相对 KKM(R_KKM)映射•

定义 1.2[8] 设 $(X, D; \Gamma)$ 是 G_凸空间, $D \subset X$, $C \subset X$, 如果对任意 $A \in \langle D\rangle$, $A \subset C$ 意味着 $\Gamma(A) \subset C$, 则 X 的子集 C 称为是 Γ_凸(或 G_凸)• 设 Y 是非空集合, $\beta \in \mathbf{R}$, 函数 $\varphi: X \times Y \to \mathbf{R}$ 如果满足:对任意 $\lambda < \beta$ 和任意 $y \in Y$, 集合 $\{x \in X: \varphi(x, y) < \lambda\}$ 是 Γ_凸的,则称函数 φ 在 X 上是 G_β_拟凸的•

我们在一般拓扑空间中引入相应的新概念,即(关于 T 的)弱 R_KKM 映射, R_凸和 R_β_拟凸•

定义 1.3 设 X 是拓扑空间, D 和 Y 是非空集合, $T: X \to 2^Y$, $S: D \to 2^Y$ 是两个集值映射•

如果存在广义 R_KKM 映射 $W: D \to 2^X$, 使得对任意 $A \in \langle D\rangle$ 及任意 $x \in W(A)$, 有 $T(x) \cap S(A) \neq \emptyset$, 则称 S 是关于 T 的弱 R_KKM 映射, W 是伴随广义 R_KKM 映射。

注 1.1　对任意 G_凸空间 $(X, D; \Gamma)$, 必定存在一个从 D 到 X 的幂集的广义 R_KKM 映射(事实上, Γ 就是一个从 D 到 X 的幂集的广义 R_KKM 映射)。 因此, 关于 T 的弱 G_KKM 映射必是关于 T 的弱 R_KKM 映射。所以,(关于 T 的)弱 R_KKM 映射包含文献[4]中的(关于 T 的)广义 KKM 映射, 文献[5]中的(关于 T 的)广义 G_KKM 映射和文献[6]中的(关于 T 的)弱 G_KKM 映射为特例。

定义 1.4　设 X 是拓扑空间, D 是非空集合, $D \subset X$, $C \subset X$, 如果存在广义 R_KKM 映射 $W: D \to 2^X$ 使得对任意 $A \in \langle D\rangle$, $A \subset C$ 意味着 $W(A) \subset C$, 则 X 的子集 C 称为是 R_凸的。设 Y 是非空集合, $\beta \in \mathbf{R}$, 如果函数 $\varphi: X \times Y \to \mathbf{R}$ 满足: 对任意 $\lambda < \beta$ 和任意 $y \in Y$, 集合 $\{x \in X: \varphi(x, y) < \lambda\}$ 是 R_凸的, 则称函数 φ 在 X 上是 R_β_拟凸的, 同理, W 称为伴随广义 R_KKM 映射。

注 1.2　因为对任意 G_凸空间 $(X, D; \Gamma)$, 必定存在一个从 D 到 X 的幂集的广义 R_KKM 映射(实际上, Γ 就是从 D 到 X 的幂集的广义 R_KKM 映射)。 所以, 拓扑空间中的"R_凸"包含 G_凸空间中的 G_凸(或 Γ_凸)为特例, 拓扑空间中的"R_β_拟凸"包含 G_凸空间中的 G_β_拟凸为特例。

为了证明的完整性, 给出著名的 KKM 原理, 它在引理 1.1 的证明中将会被用到。

KKM 原理: 设 D 是 Δ_n 的顶点集, $F: D \to \Delta_n$ 是具有闭值(或开值)的 KKM 映射(即对任意 $A \in \langle D\rangle$, 有 $\mathrm{co}A \subset F(A)$), 则 $\bigcap_{a \in D} F(a) \neq \emptyset$。

闭值情形见文献[1]。 根据文献[9], 开值情形是闭值情形的一个简单推论。 关于 KKM 原理的开值情形的推广和应用, 见文献[10]。

为了证明交定理, 我们需要下面的引理

引理 1.1　设 X 是拓扑空间, D 是非空集合, $T: D \to 2^X$ 是广义 R_KKM 映射, $F: D \to 2^X$ 是具有闭值(或开值)的集值映射, 若对任意 $A \in \langle D\rangle$ 有 $T(A) \subset F(A)$, 则 $\{F(a)\}_{a \in D}$ 具有有限交性质。

证明　设 $A = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\} \in \langle D\rangle$。 因为 $T: D \to 2^X$ 是广义 R_KKM 映射, 所以存在连续映射 $\varphi_A: \Delta_n \to X$ 使得对任意 $0 \leqslant i_0 < i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, 有

$$\varphi_A(\mathrm{co}\{e_{i_0}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}\}) \subset T(\{a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}\}) \cap \varphi_A(\Delta_n)。$$

故

$$\begin{aligned}\mathrm{co}\{e_{i_0}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}\} &\subset \varphi_A^{-1}(T(\{a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}\}) \cap \varphi_A(\Delta_n)) \subset \\ &\varphi_A^{-1}(F(\{a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}\}) \cap \varphi_A(\Delta_n)) = \\ &\varphi_A^{-1}\left(\bigcup_{j=0}^{k} F(a_{i_j}) \cap \varphi_A(\Delta_n)\right) = \varphi_A^{-1}\left(\bigcup_{j=0}^{k}(F(a_{i_j}) \cap \varphi_A(\Delta_n))\right) = \\ &\bigcup_{j=0}^{k} \varphi_A^{-1}(F(a_{i_j}) \cap \varphi_A(\Delta_n))。\end{aligned}$$

因为 $F(a_{i_j}) \cap \varphi_A(\Delta_n)$ 在 X 的紧子集 $\varphi_A(\Delta_n)$ 中是闭的(或开的), 所以 $\varphi_A^{-1}(F(a_{i_j}) \cap \varphi_A(\Delta_n))$ 在 Δ_n 中是闭的(或开的)。 注意到 $\boldsymbol{e}_i \to \varphi_A^{-1}(F(a_i) \cap \varphi_A(\Delta_n))$ 是 KKM 映射。 根据 KKM 原理, 有

$$\bigcap_{i=0}^{n} \varphi_A^{-1}(F(a_i) \cap \varphi_A(\Delta_n)) \neq \emptyset,$$

这意味着 $\bigcap_{i=0}^{n} F(a_i) \neq \emptyset$。 证明完毕。

注 1.3　引理 1.1 将文献[11]的定理 1(ⅰ)从 G_凸空间推广到一般拓扑空间。 由于在引理 1.1 的证明

中,采用的是 KKM 原理, 并没有涉及连续单位分解的技巧和 Brouwer 不动点定理(或 Tychonoff 不动点定理), 所以引理 1.1 与文献[7] 的定理 3.1 是不同的• 若 $X=\Delta_n$, D 是 Δ_n 的顶点集, $T=\mathrm{co}$ (凸包), 则引理 1.1 就化为文献[1] 中的KKM 原理• 若 D 是拓扑向量空间 X (不一定是 Hausdorff) 的一个非空子集, 则引理 1.1 推广了文献[2] 的 Ky FanKKM 引理•

引理 1.2 设 X 是拓扑空间, D 是非空集合, $A\in\langle D\rangle$, 且 $\left\{M_z: z\in A\right\}$ 是 X 的一个开(或者闭) 覆盖, $T: D\to 2^X$ 是广义 R_KKM 映射, 则存在 A 的非空子集 B 使得 $T(B)\cap\bigcap\left\{M_z: z\in B\right\}\neq\emptyset$•

证明 事实上, 引理 1.2 与引理 1.1 等价•

引理 1.1 ⇒ 引理 1.2 假定对 A 的任意非空子集 B, 都有 $T(B)\cap\bigcap\left\{M_z: z\in B\right\}=\emptyset$• 因此, $T(B)\subset\bigcup\left\{M_z^{\mathrm{c}}: z\in B\right\}$• 定义集值映射 $F: A\to 2^X$ 如下

$$F(z)=M_z^{\mathrm{c}},\qquad \forall z\in A•$$

因为 $\left\{M_z: z\in A\right\}$ 是 X 的一个开(或者闭) 覆盖, 所以 F 具有闭值(或开值), 并且 $\bigcup\left\{M_z: z\in A\right\}=X$• 从而 $\bigcap\left\{M_z^{\mathrm{c}}: z\in A\right\}=\emptyset$• 由 $T(B)\subset\bigcup\left\{M_z^{\mathrm{c}}: z\in B\right\}$, 得 $T(B)\subset F(B)$• 引理 1.1 的所有条件都满足, 所以 $\left\{F(z): z\in A\right\}$ 具有有限交性质• 特别地, $\bigcap\left\{F(z): z\in A\right\}=\bigcap\left\{M_z^{\mathrm{c}}: z\in A\right\}\neq\emptyset$• 这是一个矛盾• 因此, 引理 1.2 成立•

引理 1.2 ⇒ 引理 1.1 假设 $A\in\langle D\rangle$, 并且 $\bigcap_{a\in A}F(a)=\emptyset$, 则 $\bigcup_{a\in A}F(a)^{\mathrm{c}}=X$• 因为 $F: A\to 2^X$ 是具有闭值(或开值) 的映射, 所以 $\left\{F(a)^{\mathrm{c}}: a\in A\right\}$ 是 X 的一个开(或者闭) 覆盖• 由引理 1.2, 存在 A 的非空子集 B 使得 $T(B)\cap\bigcap\left\{F(a)^{\mathrm{c}}: a\in B\right\}\neq\emptyset$• 所以, 存在 $x_0\in T(B)$ 使得对任意 $a\in B$ 有 $x_0\notin F(a)$• 因此, $x_0\in T(B)$ 但 $x_0\notin F(B)$• 这与 $T(B)\subset F(B)$ 矛盾• 因此, 引理 1.1 成立• 证明完毕•

注 1.4 引理 1.2 将文献[6] 的引理 1 从 G_凸空间推广到一般拓扑空间• 在第 2 节交定理的证明中将会用到引理 1.2•

2 交定理

定理 2.1 设 X 是紧拓扑空间, D 和 Y 是非空集合, $T: X\to 2^Y$ 和 $S: D\to 2^Y$ 是两个集值映射, 满足下面的条件

(i) S 是关于 T 的弱 R_KKM 映射;

(ii) 对任意 $z\in D$, 集合 $\left\{x\in X: T(x)\cap S(z)\neq\emptyset\right\}$ 是闭的•

则存在 $x_0\in X$, 使得对任意的 $z\in D$ 有 $T(x_0)\cap S(z)\neq\emptyset$•

证明 假设结论不成立• 任意 $z\in D$, 令 $M_z=\left\{x\in X: T(x)\cap S(z)=\emptyset\right\}$, 则 $\left\{M_z: z\in D\right\}$ 是 X 的开覆盖• 因为 X 是紧的, 故存在集合 $A\in\langle D\rangle$ 使得 $\bigcup\left\{M_z: z\in A\right\}=X$• 由引理 1.2, 存在 A 的非空子集 B 使得 $W(B)\cap\bigcap\left\{M_z: z\in B\right\}\neq\emptyset$, 这里 $W: D\to 2^X$ 是在弱 R_KKM 映射 S 的定义中出现的伴随广义 R_KKM 映射• 即存在 $x_0\in W(B)\cap\bigcap\left\{M_z: z\in B\right\}$• 因为 S 是关于 T 的弱 R_KKM 映射, 且 $x_0\in W(B)$, 因此 $T(x_0)\cap S(B)\neq\emptyset$• 另一方面, 因为 $x_0\in\bigcap\left\{M_z: z\in B\right\}$, 所以对任意 $z\in B$ 有 $T(x_0)\cap S(z)=\emptyset$, 从而 $T(x_0)\cap S(B)=\emptyset$• 这是一个矛盾, 从而假设错误, 定理的结论成立• 证明完毕•

注 2.1 若 Y 是拓扑空间, T 是上半连续的, S 具有闭值, 则定理 2.1 的条件(ii) 同样满足• 定理 2.1 将文献[6] 中的定理 2 从 G_凸空间推广到一般拓扑空间•

下面的定理实际上是定理 2.1 的一个变形•

定理 2.2 设 X 是拓扑空间, D 和 Y 是非空集合, $T: X \to 2^Y$ 和 $S: D \to 2^Y$ 是两个集值映射, 满足下列条件

(i) S 是关于 T 的弱 R_KKM 映射;

(ii) 对所有的 $z \in D$, 集合 $\{x \in X: T(x) \cap S(z) \neq \emptyset\}$ 要么全是闭的, 要么全是开的•

若对任意 $A \in \langle D\rangle$, $W(A)$ 是紧的(这里的 W 是在弱 R_KKM 映射 S 的定义中出现的伴随广义 R_KKM 映射), 则存在 $x_0 \in W(A)$ 使得对任意 $z \in A$ 有 $T(x_0) \cap S(z) \neq \emptyset$•

证明 对任意 $A \in \langle D\rangle$, 考虑 $T|_{W(A)}: W(A) \to 2^Y$ 和 $S|_A: A \to 2^Y$, 则 $S|_A$ 是关于 $T|_{W(A)}$ 的弱 R_KKM 映射• 注意到 $W(A)$ 是紧的• 在定理 2.1 中, 令 $X = W(A)$, $D = A$, $T = T|_{W(A)}$, $S = S|_A$, 则定理 2.1 的所有条件都满足• 由定理 2.1, 存在 $x_0 \in W(A)$ 使得对任意 $z \in A$ 有 $T(x_0) \cap S(z) \neq \emptyset$• 证明完毕•

注 2.2 若 Y 是拓扑空间, T 是上半连续且 S 具有闭值(或者 T 是下半连续且 S 具有开值), 则定理 2.2 的条件(ii) 同样满足• 定理 2.2 将文献[6] 的定理 3 从 G_凸空间推广到一般拓扑空间•

3 Ky Fan 型极大极小不等式

在下述的极大极小定理中, 我们都将假定 $\inf_x \sup_y > -\infty$• 实际上, 当 $\inf_x \sup_y = -\infty$ 时, 结论自然成立•

定理 3.1 设 X 是紧拓扑空间, D 是非空集合, Y 是拓扑空间, $W: D \to 2^X$ 是广义 R_KKM 映射, $T: X \to 2^Y$ 是上半连续映射, $\psi: D \times Y \to \mathbf{R}$, $\varphi: X \times Y \to \mathbf{R}$ 是两个函数, 且 $\beta = \inf_{x \in X} \sup_{y \in T(x)} \varphi(x, y)$• 假定

1) 对任意 $z \in D$, $\psi(z, \cdot)$ 在 Y 上是上半连续的;

2) 对任意 $\lambda < \beta$, $y \in T(X)$ 和任意 $A \in \langle\{z \in D: \psi(z, y) < \lambda\}\rangle$, 有 $W(A) \subset \{x \in X: \varphi(x, y) < \lambda\}$

则下列陈述成立

(a) $\inf\limits_{x \in X} \sup\limits_{y \in T(x)} \varphi(x, y) \leqslant \sup\limits_{x \in X} \inf\limits_{z \in D} \sup\limits_{y \in T(x)} \psi(z, y)$;

(b) 若对任意 $x \in X$, $T(x)$ 是紧的, 则存在 $x_0 \in X$ 使得

$$\inf_{x \in X} \sup_{y \in T(x)} \varphi(x, y) \leqslant \inf_{z \in D} \sup_{y \in T(x_0)} \psi(z, y)•$$

证明 给定 $\lambda < \beta$, 定义 $S: D \to 2^Y$ 如下

$$S(z) = \{y \in Y: \psi(z, y) \geqslant \lambda\}, \qquad \forall z \in D•$$

由 1), 对任意 $z \in D$, $S(z)$ 是闭的• 我们证明 S 是关于 T 的弱 R_KKM 映射, W 是相应的伴随广义 R_KKM 映射• 假定存在 $A \in \langle D\rangle$ 和 $x \in W(A)$ 使得 $T(x) \cap S(A) = \emptyset$• 则对任意 $y \in T(x)$, 有 $A \subset \{z \in D: \psi(z, y) < \lambda\}$• 由 2) 得

$$x \in W(A) \subset \{x \in X: \varphi(x, y) < \lambda\}, \qquad \forall y \in T(x)•$$

所以 $\sup_{y \in T(x)} \varphi(x, y) \leqslant \lambda$, 这与 $\lambda < \beta$ 矛盾•

由定理 2.1 和注 2.1, 存在 $x_0 \in X$ 使得对任意 $z \in D$, $T(x_0) \cap S(z) \neq \emptyset$• 因此, $\lambda \leqslant \inf_{z \in D} \sup_{y \in T(x_0)} \psi(z, y)$, 从而 $\lambda \leqslant \sup_{x \in X} \inf_{z \in D} \sup_{y \in T(x)} \psi(z, y)$• (a) 的证明完成•

进一步, 若对任意 $x \in X$, $T(x)$ 是紧的• 因为 T 在 X 上是上半连续的, 且 $\psi(z, \cdot)$ 在 Y 上是上半连续的(见文献[12] 中的命题 3.1.21), 所以 $x \to \inf_{z \in D} \sup_{y \in T(x)} \psi(z, y)$ 在 X 上是上半

连续的• 因为 X 是紧的, 所以存在 $x_0 \in X$, 使得

$$\inf_{z \in D} \sup_{y \in T(x_0)} \phi(x, y) = \sup_{x \in X} \inf_{z \in D} \sup_{y \in T(x)} \phi(z, y)•$$

由(a)知(b)成立• 证明完毕•

注 3.1 定理 3.1 将文献[6]中的定理 4 从 G_凸空间推广到一般拓扑空间•

推论 3.1 若 $D \subset X$, 定理 3.1 的条件 2) 被下列两个条件代替

3) 对任意 $(z, y) \in D \times T(X)$, 有 $\varphi(z, y) \leqslant \phi(z, y)$;

4) $\varphi|_{X \times T(X)}$ 在 X 上是 R_β_拟凸的, 且 W 是相应的伴随广义 R_KKM 映射;

则定理 3.1 仍然成立•

证明 只需证明 3) 和 4) 可以推出 2)• 若 $\lambda < \beta, y \in T(X), A \in \langle\{z \in D: \phi(z, y) < \lambda\}\rangle$, 则由 3), $A \in \langle\{z \in D: \varphi(z, y) < \lambda\}\rangle$• 由 4), $W(A) \subset \{x \in X: \varphi(x, y) < \lambda\}$• 证明完毕•

注 3.2 推论 3.1 将文献[6]中的推论 5 从 G_凸空间推广到一般拓扑空间•

下面的两个定理是定理 3.1 的变形, 它们的证明与定理 3.1 的证明类似• 不同的是, 用的是定理 2.2, 而不是定理 2.1• 为说明这一点, 我们给出定理 3.3 的证明•

定理 3.2 设 X 是一个紧的拓扑空间, D 是非空集合, $W: D \to 2^X$ 是广义 R_KKM 映射, Y、T、ϕ、φ、β 见定理 3.1• 假设定理 3.1 的条件 1) 和 2) 成立• 则

$$\inf_{x \in X} \sup_{y \in T(x)} \varphi(x, y) \leqslant \inf_{A \in \langle D\rangle} \sup_{x \in W(A)} \min_{z \in A} \sup_{y \in T(x)} \phi(z, y)•$$

如果 $D \subset X$, 则条件 2) 换成 3) 和 4) 后仍然成立•

定理 3.3 设 X 是拓扑空间, D 是非空集合, Y 是拓扑空间, $W: D \to 2^X$ 是广义 R_KKM 映射, $T: X \to 2^Y$ 是下半连续的, $\phi: D \times Y \to \mathbf{R}$, $\varphi: X \times Y \to \mathbf{R}$ 是两个函数, $\beta = \inf_{x \in X} \sup_{y \in T(x)} \varphi(x, y)$• 假定

5) 对任意 $z \in D$, $\phi(z, \cdot)$ 在 Y 上是下半连续的;

6) 对任意 $\lambda < \beta, y \in T(X)$ 和任意 $A \in \langle\{z \in D: \phi(z, y) \leqslant \lambda\}\rangle$, 有 $W(A) \subset \{x \in X: \varphi(x, y) \leqslant \lambda\}$• 若对任意 $A \in \langle D\rangle$, $W(A)$ 是紧的, 则

$$\inf_{x \in X} \sup_{y \in T(x)} \varphi(x, y) \leqslant \inf_{A \in \langle D\rangle} \sup_{x \in W(A)} \min_{z \in A} \sup_{y \in T(x)} \phi(z, y)•$$

若 $D \subset X$, 则条件 6) 换成 3) 和 4) 后仍然成立•

证明 给定 $\lambda < \beta$, 定义 $S: D \to 2^Y$ 如下

$$S(z) = \{y \in Y: \phi(z, y) > \lambda\}, \qquad \forall z \in D•$$

由 5), 对任意 $z \in D$, $S(z)$ 是开的• 我们证明 S 是关于 T 的弱 R_KKM 映射, 且 W 是伴随广义 R_KKM 映射• 假定存在 $A \in \langle D\rangle$ 和 $x \in W(A)$ 使得 $T(x) \cap S(A) = \varnothing$• 则对任意 $y \in T(x)$, $A \subset \{z \in D: \phi(z, y) \leqslant \lambda\}$• 由 6) 得

$$x \in W(A) \subset \{x \in X: \varphi(x, y) \leqslant \lambda\}, \qquad \forall y \in T(x)•$$

所以 $\sup_{y \in T(x)} \varphi(x, y) \leqslant \lambda$, 这与 $\lambda < \beta$ 矛盾•

由定理 2.2 和注 2.2, 对任意 $A \in \langle D\rangle$, 存在 $x_0 \in W(A)$ 使得对任意 $z \in A$, 有 $T(x_0) \cap S(z) \neq \varnothing$• 所以 $\min_{z \in A} \sup_{y \in T(x_0)} \phi(z, y) > \lambda$, 从而

$$\sup_{x \in W(A)} \min_{z \in A} \sup_{y \in T(x)} \phi(z, y) > \lambda, \qquad \forall A \in \langle D\rangle•$$

若 $D \subset X$, 并且条件 4) 满足, 则对任意 $\lambda < \beta$ 和 $y \in T(X)$, 集合 $\{x \in X: \varphi(x, y) \leqslant \lambda\} = \bigcap_{\lambda < \alpha < \beta} \{x \in X: \varphi(x, y) < \alpha\}$ 是 R_凸的, 且 W 是相应的伴随广义 R_KKM 映射(因为具

有相同的伴随广义 R_KKM 映射的 R_凸集的交, 仍然是 R_凸的且具有相同的伴随广义 R_KKM 映射) • 容易看出 3) 和 4) 可以推出 6) • 证明完毕•

注 3.3 定理 3.2 和定理 3.3 分别将文献[6] 中的定理 6 和定理 7 从 G_凸空间推广到一般拓扑空间•

[参 考 文 献]

[1] Knaster B, Kuratowski C, Mazurkiewicz S. EinBeweis des fixpunktsatzes fur n_dimensionale simplexe[J]. Fund Math, 1929, **14**(1): 132_137.

[2] Fan K. A generalization of Tychonoff s fixed point theorem[J]. Math Ann, 1961, **142**(3): 305_310.

[3] Park S. Generalizations of Ky Fan' s matching theorems and their applications[J]. J Math Anal Appl, 1989, **141**(1): 164_176.

[4] Chang T H, Yen C L. KKM property and fixed point theorems[J]. J Math Anal Appl, 1996, **203**(1): 224_235.

[5] Lin L J, Ko C J, Park S. Coincidence theorems for set_valued mapps with G_KKM property on generalized convex space[J]. Discuss Math Differential Incl, 1998, **18**(1): 69_85.

[6] Balaj M. Weakly G_KKM mappings, G_KKM property, and minimax inequalities[J]. J Math Anal Appl, 2004, **294**(1): 237_245.

[7] Deng L, Xia X. Generalized R_KKM theorems in topological spaces and their applicatons[J]. J Math Anal Appl, 2003, **285**(2): 679_690.

[8] Park S, Kim H. Admissible classes of multifunctions on generalized convex spaces[J]. Proc Coll Natur Sci Seoul National University, 1993, **18**(1): 1_21.

[9] Shih M H. Covering properties of convex sets[J]. Bull London Math Soc, 1986, **18**(1): 57_59.

[10] Park S, Kim H. Foundations of the KKM theory on generalized convex spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **209**(2): 551_571.

[11] Park S. Fixed point theorems in locally G_convex spaces[J]. Nonlinear Anal, 2002, **48**(6): 869_879.

[12] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis[M]. New York: Wiley, 1984.

Weakly R_KKM Mappings—Intersection Theorems and Minimax Inequalities in Topological Spaces

DENG Lei[1], YANG Ming_ge[1,2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, P. R. China;
2. College of Mathematics Science, Luoyang Normal University, Luoyang 471022, P. R. China)

Abstract: The concepts of weakly R_KKM mappings, R_convex and R_β_quasiconvex in general topological spaces without any convex structure are introduced. Relating to these, an extension to general topological spaces of Fan' s matching theorem is obtained, namely Lemma 1.2. On this basis, two intersection theorems are proved in topological spaces. By using intersection theorems, some minimax inequalities of Ky Fan type are also proved in topological spaces. The results generalize and improve the corresponding results in the literature.

Key words: weakly R_KKM mapping; R_convex; R_β_quasiconvex; generalized R_KKM mapping