应用数学和力学, 第 28 卷 第 2 期
2007 年 2 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 28, No. 2, Feb. 15, 2007

文章编号: 1000_0887(2007) 02_0147_09

重建极性连续统理论的基本定律和原理(XI)——兼容性问题*

戴天民

(辽宁大学 数学系和数学应用中心, 沈阳 110036)

(我刊原编委戴天民来稿)

摘要: 对现有连续统场论中存在若干有关兼容性问题进行了简略的评论. 根据重建的极性的连续统基本定律阐述三类兼容性问题. 第一类是讨论各基本定律间的兼容性问题. 第二类是讨论微极连续统基本定律兼容一般连续统基本定律的问题. 第三类是讨论微极连续统基本定律兼容刚体动力学基本方程的问题. 推导出的结果有助于深刻理解各种连续统理论的基本定律体系的结构和它们之间的联系. 明确地指出, 在传统的连续统场论的基本均衡定律的框架下, 相容性问题是不可能自然地得到解决.

关 键 词: 微极连续统; 非极性连续统; 刚体; 基本定律; 兼容性问题

中图分类号: O33 文献标识码: A

引 言

本文是文献[1]至[10]的直接延续.

Eringen 在他最近出版的两卷本专著“微连续统场论”[11_12]中把微连续统分为微态(具有可变形方向子)、微拉伸(只具有拉伸方向子)和微极(具有刚性方向子)连续统三类. 接着, 他又于 2002 年出版了新著“非局部连续统场论”[13].

这3部新著与以前由他本人主编的“连续统物理, 第Ⅳ卷”[14](已分成微极场论、非局部场论、非局部微极场论 3 个分册译成中文)相比较, 除了增加许多系列新研究成果外, 最突出的差异就是后者用公理去建立质量、动量、角动量和能量守恒定律, 并由此推导出相应的均衡方程, 而前者则一律改为用能量均衡定律在 Galileo 变换群下为形式不变性的条件推导出质量、动量、角动量和能量均衡方程的.

在传统的各种极性连续统基本定律体系中, 质量和动量均衡方程均具有相同的形式, 所有能量守恒定律都是非耦合的, 而且从它们也推导不出完整的动量矩均衡方程, 亦即, 这些基本定律之间并不存在兼容性. 为了克服这类理论的缺陷, 一些作者, 包括前面提到的 Eringen, 都是采用刚体运动下不变性的附加条件, 进行相当麻烦的推导, 给出所期望的结果, 这便是在连续统场论中存在的一类兼容性问题.

---

* 收稿日期: 2006_01_14; 修订日期: 2006_11_04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472041)

作者简介: 戴天民(1931—), 男, 满族, 辽宁开原人, 教授, 博士(Tel: + 86_24_86870115; Fax: + 86_24_86852421; E_mail: tianmin_dai@yahoo.com.cn).

我们认为产生这类理论缺陷的根源是基本定律本身不完整所引起的．为此我们从 2001 年以来，先后提出过非传统的半耦合型和耦合型能量守恒定律和功率能率原理，从而可以不必采用刚体运动下不变性这样附加条件即可自然地推导出质量、动量、角动量和能量均衡方程．

下面举几个现有的例子加以说明．

1986 年 Nowacki[15] 提出微极热磁弹性理论，并借助于刚体运动下不变性要求推导出所有均衡方程和部分边界条件．针对这种不完整的表述，我们在文献[16] 中提出的半耦合型 Hamilton 原理就自然地推导出所有均衡方程和边界条件，并没有引用任何附加条件．

1992 年 Eringen[17] 已经开始改变他本人以前公设微态连续统理论基本定律推导均衡方程的方法，并用全局能量均衡定律服从任意常值速度平移和角速度转动不变性的要求，推导出运动方程和局部能量均衡方程．事实上，我们已在文献[18] 和文献[19] 中针对这类问题分别提出一个耦合型的能量守恒定律及新的功能和功率能率原理，从而可以自然地推导出微态连续统的局部均衡方程，并从后者还另推导出所有边界条件，而且没有去用刚体运动不变性这样的附加条件．

1993 年 Ciarletta 和 Iesan 在专著[20] 中系统地研究了非经典弹性固体理论．他们也是利用刚体运动不变性要求，并经过相当繁冗的推导才给出相应的均衡方程．面对这个问题，我们在文献[21] 中提出一个半耦合型的功率和能率原理，并在没有引用文献[20] 中附加条件的情况下，直接给出与之相同的结果．

1991 年 Green 和 Naghdi[22] 曾试图放弃刚体运动下不变性要求，从热力连续统能量守恒定律推导出质量、动量、角动量和熵均衡方程，但是没有完全做到．因为角动量均衡方程并不是自然推导出来的，而是人为引进的．

另一类兼容性问题是极性连续统基本均衡定律能否兼容非极连续统的相应结果．显然，在传统的微极连续统基本定律中，略去微极效应即可兼容经典连续统的结果，这是顺理成章的．但是，由于传统的微极连续统基本定律体系是非耦合的，因而，它并不能兼容我们在 2002 年建立起来的耦合的一般连续统基本定律体系，请参阅文献[23_24]．

还有一类兼容性问题是指微极连续统变成刚体时，前者的基本定律能否兼容刚体动力学基本方程．实际上，传统的微极连续统基本定律体系实现不了这类理应做到的兼容性，因此，我们可以把这一事实看作是传统的微极连续统理论中的一个悖论．

本文的目的，就是要根据我们在文献[25] 中提出的非传统(耦合) 的微极连续统能量守恒定律，探讨前述三类兼容性问题．具体点说，就是要弄清楚各种连续统理论基本定律之间究竟谁能兼容谁的问题，并为解除本夏指出的上述悖论给出一个较为明确的答案．

为说明问题和节省篇幅，本文将直接给出一些结果．为了方便和清晰起见，我们在本文中将分别对下列三类兼容性问题加以讨论．

1 第一类兼容性问题

这一类，主要研究微极连续统基本定律之间的兼容性问题．

1.1 非传统的微极连续统基本定律和均衡方程

1) 质量守恒定律和均衡方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}v = 0, \tag{1a}$$

$$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot (\boldsymbol{v} + \gamma \times \boldsymbol{x}) = 0, \tag{1b}$$

式中 ρ、$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 分别为质量密度、速度和微角速度.

2) 动量均衡定律和均衡方程

动量均衡定律可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho[\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})]\,\mathrm{d}v-\int_A \boldsymbol{t}_{(n)}\,\mathrm{d}a-\int_V \rho\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}v=\boldsymbol{0}, \tag{2a}$$

式中 $\boldsymbol{\xi}$ 为微体积元内距其质心的位置矢量, $\boldsymbol{t}_{(n)}$ 为面力矢量, $\boldsymbol{f}$ 为体力矢量. 应用 Green_Gauss 定理和质心定理后, 上式可被整理成下列形式:

$$\int_V\Big\{[(\dot\rho+\rho\nabla\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x})]+$$
$$[\rho((\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{\cdot}}-\boldsymbol{f})]-\nabla\cdot\boldsymbol{t}\Big\}\,\mathrm{d}v=\boldsymbol{0}. \tag{2a$'$}$$

考虑到式(1b), 则由上式得到动量均衡方程

$$[\rho((\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{\cdot}}-\boldsymbol{f})]-\nabla\cdot\boldsymbol{t}=\boldsymbol{0}. \tag{2b}$$

由此可见, 动量均衡定律可以兼容质量守恒方程和动量均衡方程.

3) 角动量均衡定律和均衡方程

角动量均衡定律可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho[(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi}))]\,\mathrm{d}v-\int_A(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}_{(n)}+\boldsymbol{m}_{(n)})\,\mathrm{d}a-$$
$$\int_V \rho[(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\times\boldsymbol{f}+\boldsymbol{l}]\,\mathrm{d}v=\boldsymbol{0}, \tag{3a}$$

式中 $\boldsymbol{m}_{(n)}$ 和 $\boldsymbol{l}$ 分别为面矩矢量和体矩密度. 应用 Green_Gauss 定理和质心定理, 则上式可改写成下列形式:

$$\int_V\Big\{[(\dot\rho+\rho\nabla\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}))((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})))]+$$
$$[\boldsymbol{x}\times((\rho(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{\cdot}}-\boldsymbol{f})-\nabla\cdot\boldsymbol{t}]+$$
$$[\rho(\dot{\boldsymbol{\sigma}}-\boldsymbol{l})-\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{t}-\nabla\cdot\boldsymbol{m}]\Big\}\,\mathrm{d}v=\boldsymbol{0}. \tag{3a$'$}$$

考虑到式(1b)和(2b), 则由上式得到角动量均衡方程

$$\rho(\dot{\boldsymbol{\sigma}}-\boldsymbol{l})-\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{t}-\nabla\cdot\boldsymbol{m}=\boldsymbol{0}, \tag{3b}$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为自旋密度, $\boldsymbol{t}$ 为应力张量, $\boldsymbol{m}$ 为偶应力张量.

由此可见, 角动量守恒定律兼容质量、动量、角动量均衡方程.

4) 能量守恒定律和均衡方程

能量守恒定律可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\Big[\varepsilon+\frac{1}{2}((\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi}))\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})))\Big]\,\mathrm{d}v-$$
$$\int_A[\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x})+\boldsymbol{m}_{(n)}\cdot\boldsymbol{\omega}]\,\mathrm{d}a+\int_A\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}-$$
$$\int_V \rho[\boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi}))+\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\omega}]\,\mathrm{d}v-\int_V\rho h\,\mathrm{d}v=0, \tag{4a}$$

式中 ε、$\boldsymbol{q}$ 和 h 分别为内能密度、热矢量和热源密度. 应用 Green_Gauss 定理和质心定理后, 上式可被整理成下列形式:

$$\int_V\Big\{[(\dot\rho+\rho\nabla\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}))(\varepsilon+K)]+[\rho((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{\cdot}}-\boldsymbol{f})-\nabla\cdot\boldsymbol{t}]\cdot\boldsymbol{v}+$$
$$[\boldsymbol{x}\times(\rho((\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{\cdot}}-\boldsymbol{f})-\nabla\cdot\boldsymbol{t})+(\rho(\dot{\boldsymbol{\sigma}}-\boldsymbol{l})-\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{t}-\nabla\cdot\boldsymbol{m})]\cdot\boldsymbol{\omega}+$$
$$[\rho\dot\varepsilon-\boldsymbol{t}:\nabla\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}):\nabla\boldsymbol{\omega}+\nabla\cdot\boldsymbol{q}-\rho h]\Big\}\,\mathrm{d}v=0. \tag{4a$'$}$$

式中 K 表示动能.

考虑到式(1b)、(2b)和(3b),则由上式可得局部能量均衡方程

$$\rho\dot{\varepsilon} - \boldsymbol{t}:\nabla\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}):\nabla\boldsymbol{\omega} + \nabla\cdot\boldsymbol{q} - \rho h = 0. \tag{4b}$$

反过来看,由于内能和动能之和 $(\varepsilon + K)$,速度 $\boldsymbol{v}$ 和微角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 都是任意的和独立的物理量,它们的系数必须为 0,因此,由(4a)′即可给出下列质量、动量、角动量和能量均衡方程

$$\dot{\rho} + \rho\nabla\cdot(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}) = 0, \tag{1b}$$

$$\rho((\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x})^{\bullet} - \boldsymbol{f}) - \nabla\cdot\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}, \tag{2b}$$

$$\rho(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{l}) - \boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{t} - \nabla\cdot\boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}, \tag{3b}$$

$$\rho\dot{\varepsilon} - \boldsymbol{t}:\nabla\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}):\nabla\boldsymbol{\omega} + \nabla\cdot\boldsymbol{q} - \rho h = 0. \tag{4b}$$

这里我们并没有像其他作者那样去用刚体运动不变性的附加条件,就已自然地而且同时给出上列结果.

由此可见,非传统的能量守恒定律(4a)可以兼容质量、动量、角动量和能量均衡方程.

5) 熵均衡定律和均衡方程

熵均衡定律和均衡方程可以写成下列形式(例如,文献[11])

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\eta\,\mathrm{d}v + \int_A \left(\frac{\boldsymbol{q}}{T}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} - \int_V \left(\frac{\rho h}{T}\right)\mathrm{d}v = 0, \tag{5a}$$

$$\rho\dot{\eta} + \nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{q}}{T}\right) - \left(\frac{\rho h}{T}\right) = 0, \tag{5b}$$

式中 η 和 T 分别为熵密度和绝对温度.

为了进行比较,取

$$\varepsilon = \psi + T\eta,\quad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}/T,\quad s = h/T,$$

式中 ψ 为自由能,于是式(4a)′可改写成下列形式:

$$\begin{aligned}\int_V \Big\{&[(\dot{\rho} + \rho\nabla\cdot(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}))(\varepsilon + K)] + [\rho((\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x})^{\bullet} - \boldsymbol{f}) - \nabla\cdot\boldsymbol{t}]\cdot\boldsymbol{v} + \\ &[\boldsymbol{x}\times(\rho((\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x})^{\bullet} - \boldsymbol{f}) - \nabla\cdot\boldsymbol{t}) + (\rho(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{l}) - \boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{t} - \nabla\cdot\boldsymbol{m})]\cdot\boldsymbol{\omega} + \\ &[(\rho\dot{\eta} + \nabla\cdot\boldsymbol{p} - \rho s)T] + [\rho(\dot{\psi} + \dot{T}\eta) + \boldsymbol{p}\cdot\nabla T - \boldsymbol{t}:\nabla\boldsymbol{v} - \\ &(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}):\nabla\boldsymbol{\omega}]\Big\}\,\mathrm{d}v = 0.\end{aligned} \tag{4a$''$}$$

由于 $(\varepsilon + K)$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{\omega}$ 和 T 均为任意的和独立的物理量,所以它们的系数必须为 0,于是由上式可以自然地而且同时给出下列均衡方程:

$$\dot{\rho} + \rho\nabla\cdot(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}) = 0, \tag{1b}$$

$$\rho[(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x})^{\bullet} - \boldsymbol{f}] - \nabla\cdot\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}, \tag{2b}$$

$$\rho(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{l}) - \boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{t} - \nabla\cdot\boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}, \tag{3b}$$

$$\rho\dot{\eta} + \nabla\cdot\boldsymbol{p} - \rho s = 0, \tag{5b}$$

$$\rho(\dot{\psi} + \dot{T}\eta) + \boldsymbol{p}\cdot\nabla T - \boldsymbol{t}:\nabla\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}):\nabla\boldsymbol{\omega} = 0. \tag{6}$$

这里,式(6)可称为Clausius_Duhem 等式.

由此可见,非传统的能量守恒定律(4a)可以兼容质量、动量、角动量和熵均衡方程以及Clausius_Duhem 等式.

1.2 传统的微极连续统基本均衡定律和均衡方程

很显然,如果在式(4a)中取 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,其余各项保持不变,即可直接写出传统的微极连续统能量守恒定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\left[\varepsilon + \frac{1}{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\xi})\cdot(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\xi})\right]\mathrm{d}v -$$

$$\int_A [\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{m}_{(n)}\cdot\gamma]\,\mathrm{d}a - \int_A \boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} - \int_V \rho[\boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{v} + \gamma\times\xi) + \boldsymbol{l}\cdot\gamma]\,\mathrm{d}v - \int_V \rho h\,\mathrm{d}v = 0. \tag{7}$$

应用 Green_Gaurs 定理和质心定理后, 则上式可被整理成下列形式:

$$\int_V \Big\{[(\dot\rho + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v})(\varepsilon + K')] + [\rho(\dot{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{f}) - \nabla\cdot\boldsymbol{t}]\cdot\boldsymbol{v} + [((\boldsymbol{x}\times(\rho(\dot{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{f}) - \nabla\cdot\boldsymbol{t})) + (\rho(\dot\sigma - \boldsymbol{l}) - \nabla\cdot\boldsymbol{m}))]\cdot\gamma + [\rho\dot e - \boldsymbol{t}:\nabla\boldsymbol{v} - \boldsymbol{m}:\nabla\gamma + \nabla\cdot\boldsymbol{q} - \rho h]\Big\} = \boldsymbol{0}. \tag{7$'$}$$

由于 ε、K' (传统的动能)、$\boldsymbol{v}$、γ 均系任意的和独立的物理量, 因此它们的系数必须为 0, 则由式(7)$'$ 只能得到下列非耦合的结果:

$$\dot\rho + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, \tag{8}$$
$$\rho(\dot{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{f}) - \nabla\cdot\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}, \tag{9}$$
$$\rho(\dot\sigma - \boldsymbol{l}) - \nabla\cdot\boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}, \tag{10}$$
$$\rho\dot e - \boldsymbol{t}:\nabla\boldsymbol{v} - \boldsymbol{m}:\nabla\gamma + \nabla\cdot\boldsymbol{q} - \rho h = 0. \tag{11}$$

这些便是现有有关微极连续统场论的专著和教科书中, 由能量守恒定律所能导出的结果(例如文献[11, 14]) .

然而, 式(10) 和(11) 并不是传统的微极连续统角动量和能量均衡方程. 因此为了能在传统的极性连续统理论框架下, 也能使能量守恒定律兼容所有传统的均衡方程, Eringen 在专著[11] 中, 根据他本人提出的“ 能量均衡定律是 Galileo 变换下的形式不变性” 这条公理, 和“ 对能量均衡定律的每个 Galileo 群都有一个相应的微连续统力学的均衡定律” 这个定理, 经过麻烦的运算, 才最后给出下列传统的微极连续统均衡方程:

$$\dot\rho + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, \tag{8}$$
$$\rho(\dot{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{f}) - \nabla\cdot\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}, \tag{9}$$
$$\rho(\dot\sigma - \boldsymbol{l}) - \varepsilon:\boldsymbol{t} - \nabla\cdot\boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}, \tag{3b}$$
$$\rho\dot e - \boldsymbol{t}:(\nabla\boldsymbol{v} - \varepsilon\cdot\gamma) - \boldsymbol{m}:\nabla\gamma + \nabla\cdot\boldsymbol{q} - \rho h = 0. \tag{12}$$

由此可见, 传统的基本均衡定律体系是不完整的.

2 第二类兼容性问题

这一类, 主要研究非传统的微极连续统基本均衡定律与其它各种非极连续统的之间的兼容性问题. 下面分 3 种情况进行讨论.

2.1 较为完整的非极连续统基本均衡定律和均衡方程

在非传统的微极连续统能量守恒定律(4a)$'$ 和(4a)$''$ 中, 把微角速度 γ 改用为自然的转动速率 θ, 即可直接得到较为完整的非极连续统的质量、动量、角动量和能量均衡方程以及熵均衡方程和 Clausius_Duhem 等式:

$$\dot\rho + \rho\nabla\cdot(\boldsymbol{v} + \theta\times\boldsymbol{x}) = 0, \tag{13}$$
$$\rho[(\boldsymbol{v} + \theta\times\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{\cdot}} - \boldsymbol{f}] - \nabla\cdot\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}, \tag{14}$$
$$\rho(\Sigma - \boldsymbol{l}) - \varepsilon:\boldsymbol{t} - \nabla\cdot\boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}, \tag{15}$$

和
$$\rho\dot e - \boldsymbol{t}:\nabla\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}):\nabla\theta + \nabla\cdot\boldsymbol{q} - \rho h = 0 \tag{16}$$

以及
$$\rho\dot\eta + \nabla\cdot\boldsymbol{p} - \rho s = 0 \tag{5b}$$

和
$$\rho(\dot\psi + T\dot\eta) + \boldsymbol{p}\cdot\nabla T - \boldsymbol{t}:\nabla\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}):\nabla\theta = 0. \tag{17}$$

式中 $\Sigma = \boldsymbol{I}\cdot\theta$ 可称为宏自旋密度.

若略去热效应, 则式(13)～式(17)即归结为我们在文献[23]中给出的结果.

2.2　修正的经典连续统理论(偶应力理论)基本均衡方程组

在非传统的微极连续统能量守恒定律(4a)′和(4a)″中, 把微角速度 γ 改用为定义的转动速率 $\beta = (\nabla\times\boldsymbol{v})/2$, 即可直接得到修正的非极连续统的质量、动量、角动量和能量均衡方程以及熵均衡方程和 Clausius_Duhem 等式:

$$\dot\rho + \rho\nabla\cdot(\boldsymbol{v} + \beta\times\boldsymbol{x}) = 0, \tag{18}$$

$$\rho[(\boldsymbol{v} + \beta\times\boldsymbol{x})^{\cdot} - \boldsymbol{f}] - \nabla\cdot\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}, \tag{19}$$

$$\rho(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{l}) - \varepsilon:\boldsymbol{t} - \nabla\cdot\boldsymbol{m} = \boldsymbol{0} \tag{20}$$

和

$$\rho\dot e - \boldsymbol{t}:\nabla\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}):\nabla\beta + \nabla\cdot\boldsymbol{q} - \rho h = 0 \tag{21}$$

以及

$$\rho\dot\eta + \nabla\cdot\boldsymbol{p} - \rho s = 0 \tag{5b}$$

和

$$\rho(\dot\psi + T\dot\eta) + \boldsymbol{p}\cdot\nabla T - \boldsymbol{t}:\nabla\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}):\nabla\gamma = 0, \tag{22}$$

式中 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{I}\cdot\theta$ 可称为偶应力理论的自旋密度.

若略去热效应, 则式(18)～(21)即归结为我们在文献[26]中给出的修正的经典连续统力学均衡方程组.

若略去定义的转动速率, 即取 $\beta = \boldsymbol{0}$, 并改用右散度记法, 则式(18)～(21)、(5b)、(22)便归结为

$$\dot\rho + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, \tag{1b}$$

$$\rho(\dot{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{f}) - \boldsymbol{t}\cdot\nabla = \boldsymbol{0}, \tag{2b}$$

$$\rho\boldsymbol{l} - \varepsilon:\boldsymbol{t} + \boldsymbol{m}\cdot\nabla = \boldsymbol{0}, \tag{23}$$

$$\rho\dot e - \boldsymbol{t}:\nabla\boldsymbol{v} + \nabla\cdot\boldsymbol{q} - \rho h = 0, \tag{24}$$

$$\rho\dot\eta + \nabla\cdot\boldsymbol{p} - \rho s = 0, \tag{5b}$$

$$\rho(\dot\psi + T\dot\eta) + \boldsymbol{p}\cdot\nabla T - \boldsymbol{t}:(\boldsymbol{v}\nabla) = 0. \tag{25}$$

这些表达式刚好是黄在他的专著[27]中推导出的经典热力连续统理论的基本均衡方程组.

2.3　经典连续统理论基本均衡方程组

在2.2节导出的均衡方程组中, 再令 $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}$, 则得下列经典连续统理论基本均衡方程组:

$$\dot\rho + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, \tag{1b}$$

$$\rho(\dot{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{f}) - \boldsymbol{t}\cdot\nabla = \boldsymbol{0}, \tag{2b}$$

$$\varepsilon:\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}, \tag{26}$$

$$\rho\dot e - \boldsymbol{t}:\nabla\boldsymbol{v} + \nabla\cdot\boldsymbol{q} - \rho h = 0, \tag{24}$$

$$\rho\dot\eta + \nabla\cdot\boldsymbol{p} - \rho s = 0, \tag{5b}$$

$$\rho(\dot\psi + T\dot\eta) + \boldsymbol{p}\cdot\nabla T - \boldsymbol{t}:(\boldsymbol{v}\nabla) = 0. \tag{25}$$

这些表达式也包括了 Green 和 Naghdi 在文献[22]中给出的全部结果. 这里需要指出的是, 式(26)是他们直接引进的, 而不是像本文这样自然地推导出来的.

3　第三类兼容性问题

这一类, 主要研究非传统的微极连续统能量守恒定律, 也可兼容刚体动力学基本方程的问题, 也就是要解除当微极连续统变成为刚体时, 前者的基本方程不能归结为后者的这个"悖论"的问题.

对于刚体而言, 在非传统的微极连续统理论基本定律中取 $\varepsilon = h = 0$, $\boldsymbol{t}_{(n)} = \boldsymbol{m}_{(n)} = \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{m} = \boldsymbol{0}$, $\gamma = \omega$ (刚体角速度), $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}^{c}$ (质心位置矢量), $\xi = \boldsymbol{r}^{p,c}$ (任意点 p 到质心的位

置矢量), $\boldsymbol{v}+\gamma\times\xi=\boldsymbol{v}^p$, $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$(质心速度), $\rho\mathrm{d}v=\mathrm{d}\mu$, $V=B$(整个刚体), 则可得到下列刚体动力学的基本定律和方程组.

1) 质量守恒定律

式(1a)归结为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B \mathrm{d}\mu=0 \tag{27a}$$

即 $$\dot{M}=0,\quad M=\text{const}. \tag{27b}$$

2) 动量守恒定律

式(2a)归结为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B(\boldsymbol{v}^c+\omega\times\boldsymbol{r}^{p,c})\mathrm{d}\mu=\int_B\boldsymbol{f}\mathrm{d}\mu. \tag{28a}$$

应用质心定理, 并考虑到式(27a), 则得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}^c}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}, \tag{28b}$$

式中 $\boldsymbol{F}$ 为合力. 式(28b)即 Euler 第一定律.

由此可见, 式(28a)兼容(27a)和(28b).

3) 动量矩守恒定律

式(3a)归结为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B(\boldsymbol{r}^c+\boldsymbol{r}^{p,c})\times(\boldsymbol{v}^c+\omega\times\boldsymbol{r}^{p,c})\mathrm{d}\mu=\int_B[(\boldsymbol{r}^c+\boldsymbol{r}^{p,c})\times\boldsymbol{f}+\boldsymbol{l}]\mathrm{d}\mu. \tag{29a}$$

应用质心定理, 上式可改写成下列形式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B(\boldsymbol{r}^c+\boldsymbol{v}^c+\boldsymbol{r}^{p,c}\times\omega\times\boldsymbol{r}^{p,c})\mathrm{d}\mu=\int_B[(\boldsymbol{r}^c\times\boldsymbol{f})+\boldsymbol{l}]\mathrm{d}\mu. \tag{29a$'$}$$

考虑到式(27a)和(28a)则得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{I}\cdot\omega)=\boldsymbol{G}, \tag{29b}$$

式中 $\boldsymbol{I}\cdot\omega=\boldsymbol{r}^{p,c}\times\omega\times\boldsymbol{r}^{p,c}$ 可称为刚体自旋矢量, $\boldsymbol{G}$ 为合力矩. 式(29b)即 Euler 第二定律. 由此可见, 式(29a)′兼容式(27a)、(28a)和(29b).

4) 动能守恒定律

式(4a)归结为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}^c+\omega\times\boldsymbol{r}^{p,c})\cdot(\boldsymbol{v}^c+\omega\times\boldsymbol{r}^{p,c})\mathrm{d}\mu=$$
$$\int_B[\boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{v}^c+\omega\times\boldsymbol{r}^{p,c})+\boldsymbol{l}\cdot\omega]\mathrm{d}\mu. \tag{30a}$$

应用质心定理, 则由上式可同时得到

$$\mathrm{d}M/\mathrm{d}t=0,, \tag{27b}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}^c/\mathrm{d}t=\boldsymbol{F}, \tag{28b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{I}\cdot\omega)=\boldsymbol{G}, \tag{29b}$$

由此可见, 动能守恒定律(30a)兼容式(27b)、(28b)和(29b).

Wang 曾在他的专著[28]中详细地阐述了刚体动力学的基本原理, 并且指出连续统力学中的 Cauchy 第一和第二定律与刚体动力学的 Euler 第一和第二定律可以兼容. 但从我们这里所得的结果可见, 他所指的 Cauchy 第二定律并不能与 Euler 第二定律兼容.

4 结 语

1) 从本文所论微极连续统力学基本定律的兼容性问题的过程和结果,可以清晰地看出,各种连续统理论基本定律体系的结构和它们之间的联系. 同时也可清晰地看出,能量守恒定律的主导作用.

2) 与我们提出的非传统的微极连续统基本定律和均衡方程体系对比,即可清晰地看出,其它现有各连续统理论的传统的基本定律和均衡方程体系的不完整性程度.

3) 这里我们愿着重指出的是,许多作者在他们专著中,为了由能量守恒定律推导出其它均衡方程时必须用附加的刚体运动下的不变性要求是多此一举.

[参 考 文 献]

[1] 戴天民.重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅰ)——微极连续统[J].应用数学和力学,2003,**24**(10):991_997.

[2] 戴天民.重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅱ)——微态连续统理论和偶应力理论[J].应用数学和力学,2003,**24**(10):998_1004.

[3] 戴天民.重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅲ)——Noether定理[J].应用数学和力学,2003,**24**(10):1005_1011.

[4] 戴天民.重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅳ)——表面守恒定律[J].应用数学和力学,2003,**24**(11):1101_1107.

[5] 戴天民.重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅴ)——极性热力连续统[J].应用数学和力学,2003,**24**(11):1108_1113.

[6] 戴天民.重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅵ)——质量和惯性守恒定律[J].应用数学和力学,2003,**24**(12):1211_1216.

[7] 戴天民.重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅶ)——增率型[J].应用数学和力学,2003,**24**(12):1217_1221.

[8] 戴天民.重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅷ)——全功能原理[J].应用数学和力学,2005,**26**(3):287_292.

[9] 戴天民.重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅸ)——热力学[J].应用数学和力学,2005,**26**(6):653_658.

[10] 戴天民.重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅹ)——主均衡定律[J].应用数学和力学,2006,**27**(2):151—158.

[11] Eringen A C. Microcontinuum Field Theories Ⅰ—Foundations and Solids[M]. New York, Berlin, London: Springer, 1999.

[12] Eringen A C. Microcontinuum Field Theories Ⅱ—Fluent Media[M]. New York, Berlin, London: Springer, 2001.

[13] Eringen A C. Nonlocal Continuum Field Theories[M]. New York, Berlin, London: Springer, 2002.

[14] Eringen A C. Continuum Physics[M]. Vol Ⅳ. New York: Academic Press, 1976.

[15] Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity[M]. Oxford: Pergamon Press, 1986.

[16] 戴天民.微极连续统的耦合场理论的再研究(Ⅱ)——微极热压电弹性理论和电磁热弹性理论[J].应用数学和力学,2002,**23**(3):229_238.

[17] Eringen A C. Balance laws of micromorphic continua revisited[J]. Internat J Engng Sci, 1992, **30**(6):805_810.

[18] 戴天民.带有微结构的连续统中新的能量守恒定律和C_D不等式[J].应用数学和力学,2001,**22**(2):119_126.

[19] 戴天民. 广义连续统场论中新的功能和功率原理[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(11): 1111_1118.
[20] Ciarletta M, Iesan D. Non_Classical Elastic Solids [M]. Boston, London, Melbourne: Longman Scientific & Technical, 1993.
[21] 戴天民. 对带有微结构的弹性固体理论的再研究[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(8): 771_777.
[22] Green A E, Naghdi P M. A demonstration of consistency of an entropy balance with balance of energy[J]. Appl Math Phys, 1991, **42**(3): 159_168.
[23] DAI Tian_min. New laws and principles for continuum mechanics Part Ⅰ —balance laws and equations[A]. In: CHIEN Wei_zang Ed. Proc 4th International Conference on Nonlinear Mechanics [C]. Shanghai: Shanghai University Press, 2002, 206_209.
[24] DAI Tian_min. New laws and principles for continuum mechanics Part Ⅱ —energy rate and power [A]. In: CHIEN Wei_zang Ed. Proc 4th International Conference on Nonlinear Mechanics [C]. Shanghai: Shanghai University Press, 2002, 210_212.
[25] DAI Tian_min. On laws and principles for continuum field theories[A]. In: CHIEN Wei_zang Ed. Proc 4th International Conference on Nonlinear Mechanics [C]. Shanghai: Shanghai University Press, 2002, 29_41.
[26] 戴天民. 论经典连续统力学基本定律和均衡方程体系[J]. 见: 戴世强, 周哲玮, 程昌钧, 等 编. 现代数学和力学(MMM_IX)[C]. 上海: 上海大学出版社, 2004, 23_33.
[27] 黄筑平. 连续介质力学基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
[28] Wang C C. Mathematical Principles of Mechanics and Electromagnetism: Part A —Analytical and Continuum Mechanics [M]. New York, London: Plenum Press, 1979.

Renewal of Basic Laws and Principles for Polar Continuum Theories(Ⅺ) — Consistency Problems

DAI Tian_min
(Department of Mathematics & Center for the Application of Mathematics,
Liaoning University, Shenyang 110036, P. R. China)

Abstract: Some consistency problems existing in continuum field theories are briefly reviewed. Three arts of consistency problems are clarified based on the renewed basic laws for polar continua. The first art discussed the consistency problems between the basic laws for polar continua. The second art discussed the consistency problems between the basic laws for polar continua and for other nonpolar continua. The third art discussed the consistency problems between the basic laws for micropolar continuum theories and the dynamical equations for rigid body. The results presented here can help us get a deeper understanding of the structure of the basic laws for various continuum theories and the interrelations between them. In the meantime, these results obtained also show clearly that the consistency problems could not be solved in the framework of traditional basic laws for continuum field theories.

Key words: micropolar continua; nonpolar continua; rigid body; basic laws; consistency problems